Algoritmos e Teoria dos Grafos

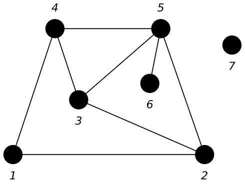
Tópico 3: Grau

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

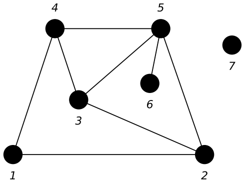
2023

Grau



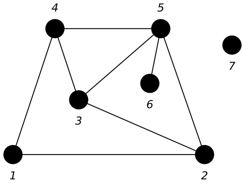
grau de v :

Grau



grau de v : número de arestas de G incidentes em v

Grau

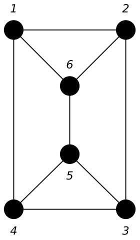


v	$\delta_G(v)$
1	2
2	3
3	3
4	3
5	4
6	1
7	0

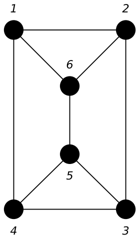
grau de v : número de arestas de G incidentes em v

$$\delta_G(v) := |\partial_G(v)|$$

Grafo Regular

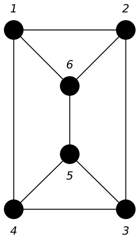


Grafo Regular



todos os vértices tem o mesmo grau

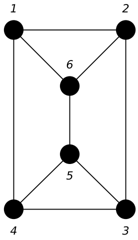
Grafo Regular



todos os vértices tem o mesmo grau

grafo *k*-regular :

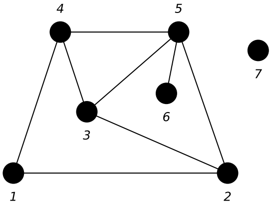
Grafo Regular



todos os vértices tem o mesmo grau

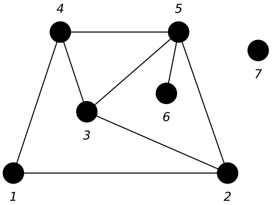
grafo k-regular : todos os vértices tem grau k

Matriz de Incidência



$$\overline{M}_G =$$

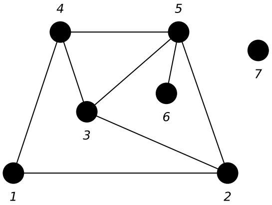
Matriz de Incidência



$$\overline{M}_G = \begin{array}{c|c|} & \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \\ 7 & \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice

Matriz de Incidência



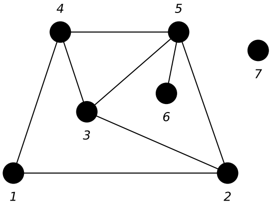
$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	4,5	5,6
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada aresta

Matriz de Incidência



$$\overline{M}_G = \begin{array}{c|cccccccc|} & 1,2 & 1,4 & 2,3 & 2,5 & 3,4 & 3,5 & 4,5 & 5,6 \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

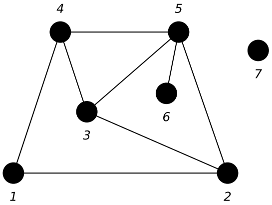
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada aresta

na linha v, coluna a tem

1 se $v \in a$

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	4,5	5,6
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

uma linha para cada vértice

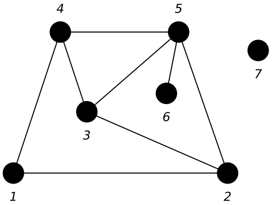
uma coluna para cada aresta

na linha v, coluna a tem

1 se $v \in a$

0 se $v \notin a$

Matriz de Incidência



$$\overline{M}_G = \begin{array}{c|cccccccc|} & 1,2 & 1,4 & 2,3 & 2,5 & 3,4 & 3,5 & 4,5 & 5,6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada aresta

na linha v, coluna a tem

- 1 se $v \in a$
- 0 se $v \notin a$

$$\overline{M}_G[v, a] = \begin{cases} 0, & \text{se } v \notin a, \\ 1, & \text{se } v \in a. \end{cases}$$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\
\hline
v_1 & M[v_1, a_1] & M[v_1, a_2] & \dots & M[v_1, a_m] \\
v_2 & M[v_2, a_1] & M[v_2, a_2] & \dots & M[v_2, a_m] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
v_n & M[v_n, a_1] & M[v_n, a_2] & \dots & M[v_n, a_m]
\end{array}$$

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & \sum \text{linha} \\
\hline
v_1 & M[v_1, a_1] & M[v_1, a_2] & \dots & M[v_1, a_m] & \\
v_2 & M[v_2, a_1] & M[v_2, a_2] & \dots & M[v_2, a_m] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
v_n & M[v_n, a_1] & M[v_n, a_2] & \dots & M[v_n, a_m] &
\end{array}$$

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

	a_1	a_2	$\ldots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\ldots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\ldots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\ldots$	$M[v_n, a_m]$	

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & \sum \text{linha} \\
\hline
v_1 & M[v_1, a_1] & M[v_1, a_2] & \dots & M[v_1, a_m] & \delta(v_1) \\
v_2 & M[v_2, a_1] & M[v_2, a_2] & \dots & M[v_2, a_m] & \delta(v_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
v_n & M[v_n, a_1] & M[v_n, a_2] & \dots & M[v_n, a_m] & \delta(v_n)
\end{array}$$

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna					

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & \sum \text{linha} \\
\hline
v_1 & M[v_1, a_1] & M[v_1, a_2] & \dots & M[v_1, a_m] & \delta(v_1) \\
v_2 & M[v_2, a_1] & M[v_2, a_2] & \dots & M[v_2, a_m] & \delta(v_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
v_n & M[v_n, a_1] & M[v_n, a_2] & \dots & M[v_n, a_m] & \delta(v_n) \\
\hline
\sum \text{coluna} & 2 & & & &
\end{array}$$

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2	2			

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

	a_1	a_2	$\ldots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\ldots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\ldots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\ldots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2	2	$\ldots$	2	

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & \sum \text{linha} \\
\hline
v_1 & M[v_1, a_1] & M[v_1, a_2] & \dots & M[v_1, a_m] & \delta(v_1) \\
v_2 & M[v_2, a_1] & M[v_2, a_2] & \dots & M[v_2, a_m] & \delta(v_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
v_n & M[v_n, a_1] & M[v_n, a_2] & \dots & M[v_n, a_m] & \delta(v_n) \\
\hline
\sum \text{coluna} & 2 & 2 & \dots & 2 & 2|E(G)|
\end{array}$$

$\square$

Teorema 1

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G:

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2	2	$\dots$	2	$2\|E(G)\| = \sum_v \delta(v)$

$\square$

Corolário 2

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar é par

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\sum_v \delta(v)$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\sum_v \delta(v) \quad = \quad \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad + \quad \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v)$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{array}{ccccc} \sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & & & & \end{array}$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$
\begin{array}{rcccc}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v)
\end{array}
$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{array}{rcccc}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & & & &
\end{array}$$

Corolário 2 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$
\begin{array}{rcccc}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v)
\end{array}
$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{array}{rcccc} \sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. } 1) \end{array}$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$
\begin{array}{rcccc}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \qquad \text{(T. 1)} \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & & & &
\end{array}
$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{array}{rcccc}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad \text{(T. 1)} \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \text{par} & &
\end{array}$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{array}{rcccc}
\sum_{v} \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_{v} \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. } 1) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \text{par} & - & \text{par}
\end{array}$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$
\begin{array}{rcccl}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \qquad (\text{T. } 1) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \text{par} & - & \text{par} \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & & & &
\end{array}
$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$
\begin{array}{rclcl}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \qquad (\text{T. } 1) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \text{par} & - & \text{par} \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \text{par} & &
\end{array}
$$

Corolário 2 ("handshaking lemma")

O número de vértices de grau ímpar é par

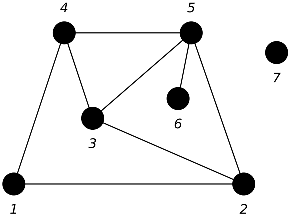
Demonstração.

$$\begin{array}{rclcl}
\sum_v \delta(v) & = & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) & + & \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \sum_v \delta(v) & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & 2|E(G)| & - & \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. } 1) \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \text{par} & - & \text{par} \\
\sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & = & \text{par} & &
\end{array}$$

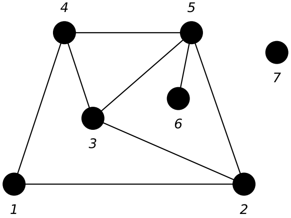
Portanto $|\{v \text{ de grau ímpar}\}|$ deve ser par

$\square$

Sequência de Graus

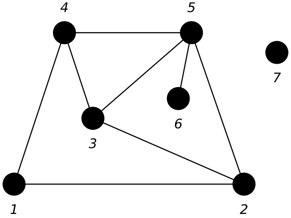


Sequência de Graus



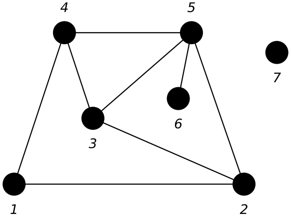
sequência de graus:

Sequência de Graus



sequência de graus: $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$

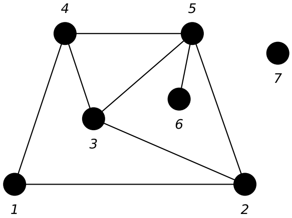
Sequência de Graus



sequência de graus: $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$

não-crescente,

Sequência de Graus

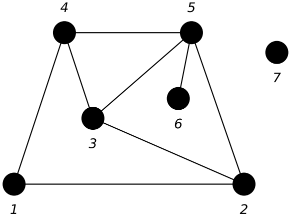


$(4, 3, 3, 3, 2, 1, 0)$

sequência de graus: $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$

não-crescente, i.e., $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \ldots \geq \delta(v_{n-1}) \geq \delta(v_n)$

Sequência de Graus



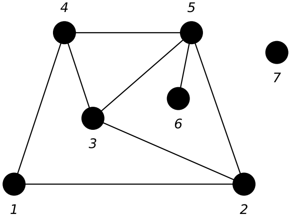
$(4, 3, 3, 3, 2, 1, 0)$

sequência de graus: $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$

não-crescente, i.e., $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \ldots \geq \delta(v_{n-1}) \geq \delta(v_n)$

sequência gráfica:

Sequência de Graus



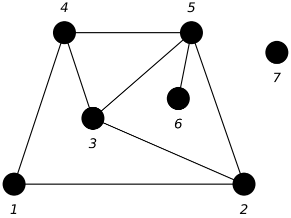
$(4, 3, 3, 3, 2, 1, 0)$

sequência de graus: $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$

não-crescente, i.e., $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \ldots \geq \delta(v_{n-1}) \geq \delta(v_n)$

sequência gráfica: sequência de inteiros que é sequência de graus de algum grafo

Sequência de Graus



$(4, 3, 3, 3, 2, 1, 0)$

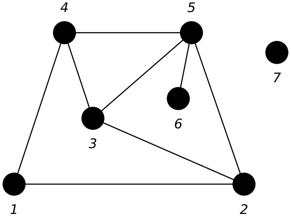
sequência de graus: $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$

não-crescente, i.e., $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \ldots \geq \delta(v_{n-1}) \geq \delta(v_n)$

sequência gráfica: sequência de inteiros que é sequência de graus de algum grafo

$(2, 1, 0)$

Sequência de Graus



$(4, 3, 3, 3, 2, 1, 0)$

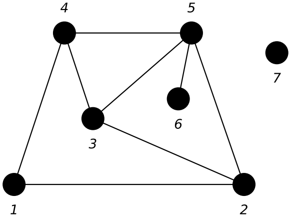
sequência de graus: $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$

não-crescente, i.e., $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \ldots \geq \delta(v_{n-1}) \geq \delta(v_n)$

sequência gráfica: sequência de inteiros que é sequência de graus de algum grafo

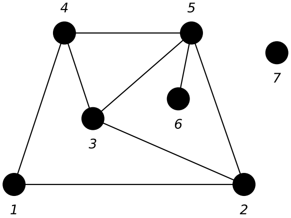
$(2, 1, 0)$ não é sequência gráfica

Grau Máximo e Grau Mínimo



grau máximo:

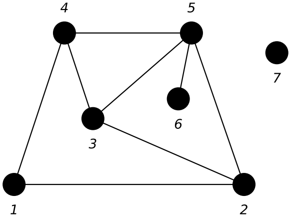
Grau Máximo e Grau Mínimo



$$\Delta(G) = 4$$

grau máximo: $\Delta(G) := \max\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$

Grau Máximo e Grau Mínimo

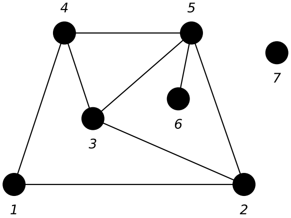


$\Delta(G) = 4$

grau máximo: $\Delta(G) := \max\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$

grau mínimo:

Grau Máximo e Grau Mínimo



$\Delta(G) = 4$

$\delta(G) = 0$

grau máximo: $\Delta(G) := \max\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$

grau mínimo: $\delta(G) := \min\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$