Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 4: Grafos Direcionados

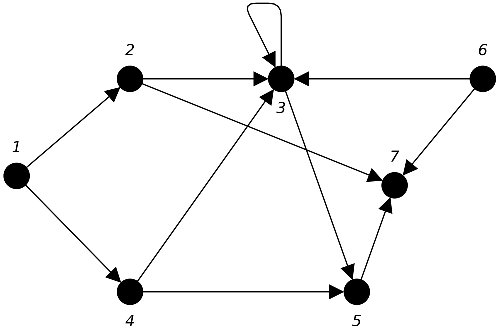
Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2023

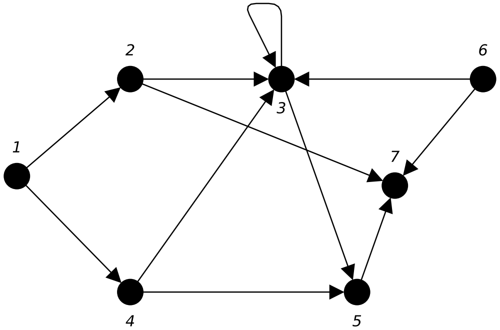
Definição

Definição



grafo direcionado G: par $(V(G), A(G))$

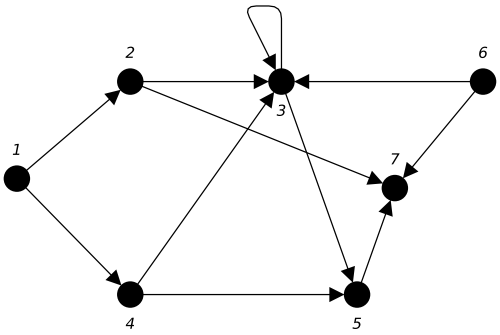
Definição



grafo direcionado G: par $(V(G), A(G))$

$V(G)$: conjunto finito **(vértices)**

Definição

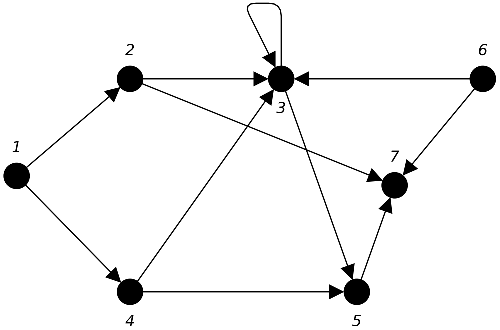


grafo direcionado G: par $(V(G), A(G))$

$V(G)$: conjunto finito **(vértices)**

$A(G)$: $\subseteq V(G) \times V(G)$ **(arcos)**

Definição



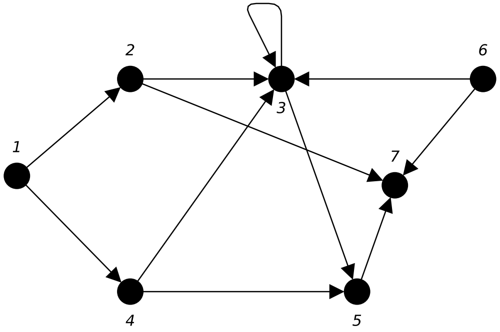
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

grafo direcionado G: par $(V(G), A(G))$

$V(G)$: conjunto finito **(vértices)**

$A(G)$: $\subseteq V(G) \times V(G)$ **(arcos)**

Definição



$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,7), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5), (5,7), (6,3), (6,7)\}$

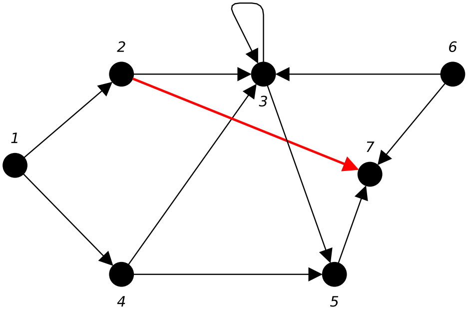
grafo direcionado G: par $(V(G), A(G))$

$V(G)$: conjunto finito **(vértices)**

$A(G)$: $\subseteq V(G) \times V(G)$ **(arcos)**

Arcos e Vizinhos

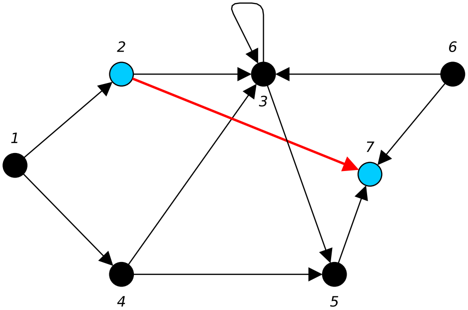
$a = (u, v)$: arco de G



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

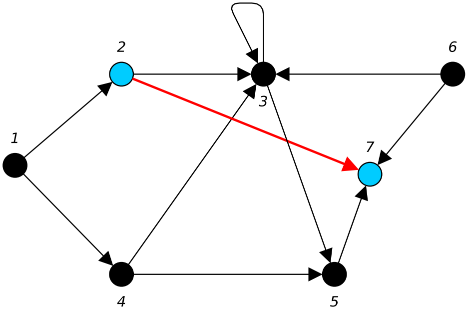
- o arco a está **direcionado de u para v**



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

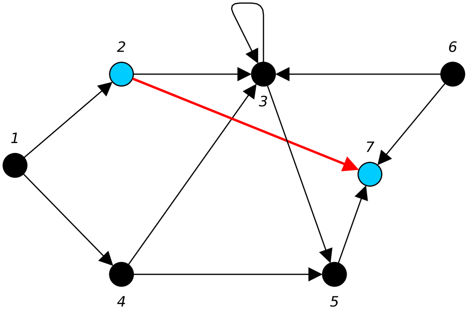
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

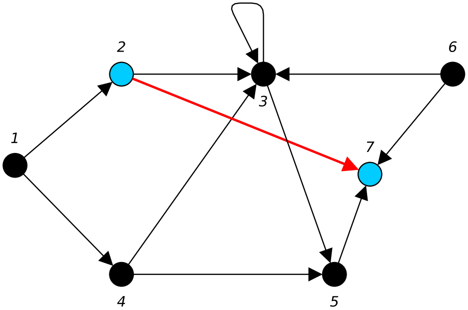
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

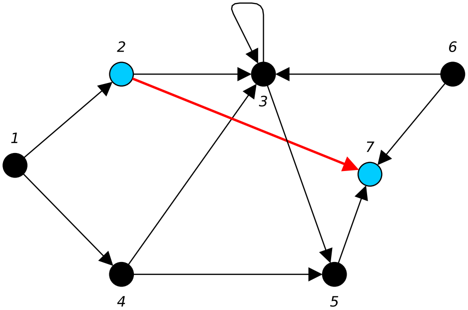
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

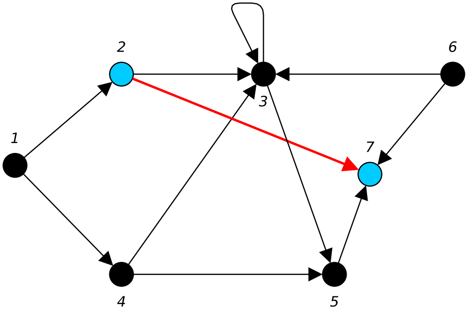
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

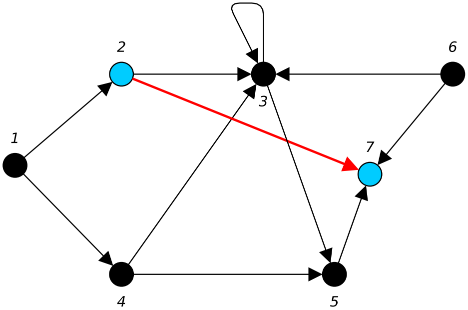
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

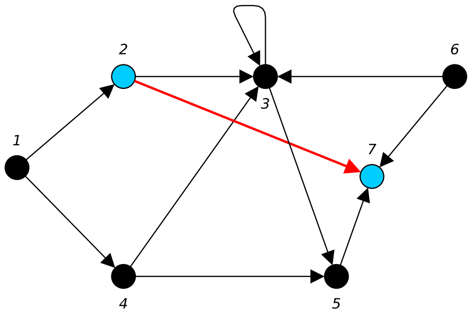
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

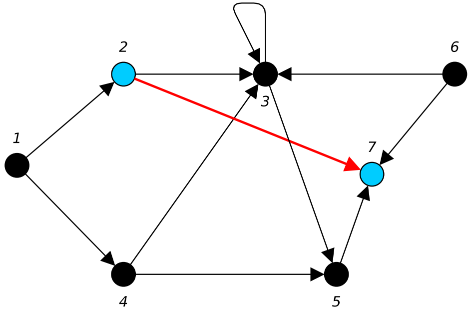
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

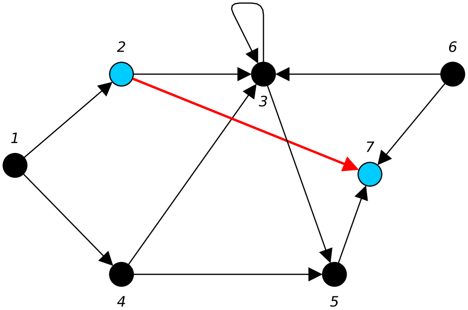
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

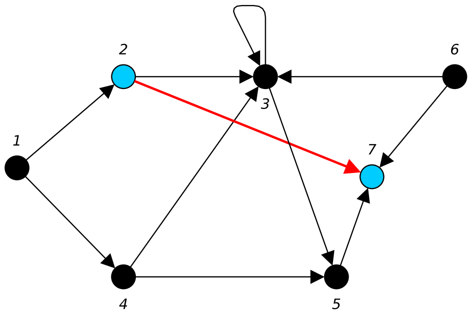
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v
- u e v são **vizinhos**



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

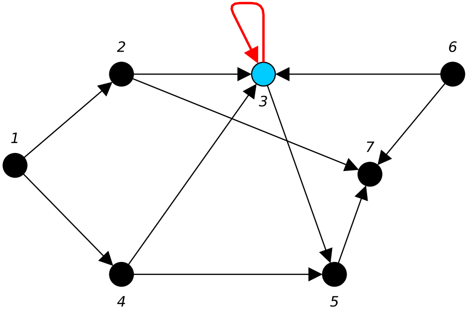
- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v
- u e v são **vizinhos** (**adjacentes**)



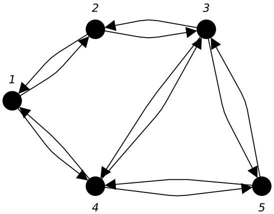
Arcos e Vizinhos

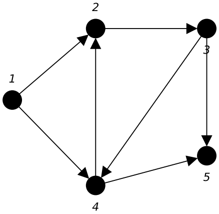
$a = (u, v)$: arco de G

- o arco a está **direcionado de** u **para** v
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v
- u e v são **vizinhos** (**adjacentes**)
- o arco a é um **laço** se $u = v$



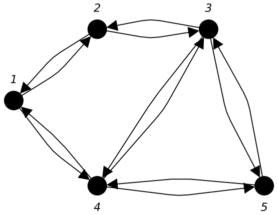
Simetria

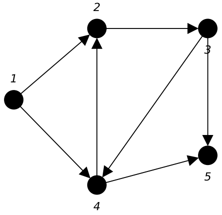




G é **simétrico**:

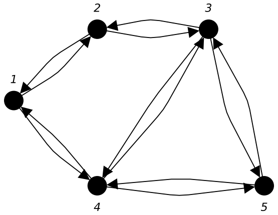
Simetria

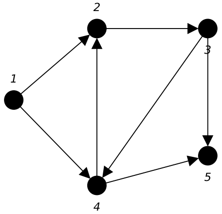




G é **simétrico**: todo arco tem "retorno"

Simetria

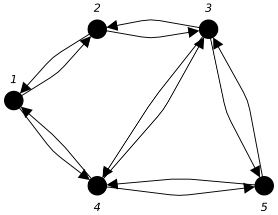


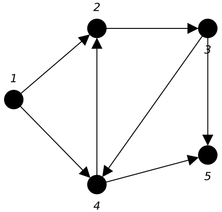


G é **simétrico**: todo arco tem "retorno"

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

Simetria



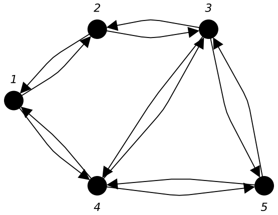


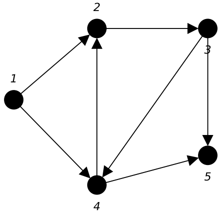
G é **simétrico**: todo arco tem "retorno"

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

G é **anti-simétrico**:

Simetria



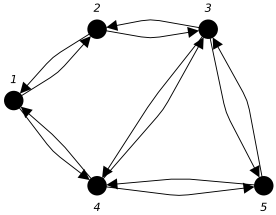


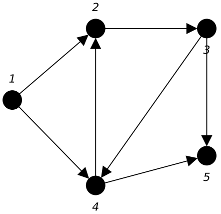
G é **simétrico**: todo arco tem "retorno"

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

G é **anti-simétrico**: nenhum arco tem "retorno"

Simetria





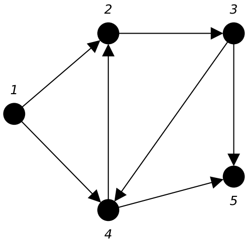
G é **simétrico**: todo arco tem "retorno"

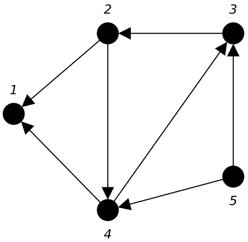
$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

G é **anti-simétrico**: nenhum arco tem "retorno"

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \notin A(G)$$

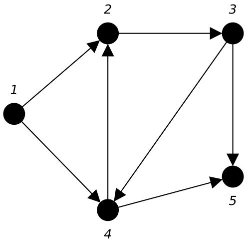
Grafo Transposto

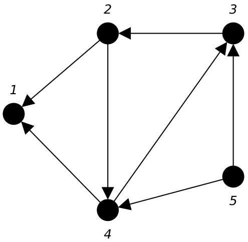




G^T:

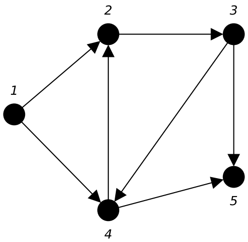
Grafo Transposto

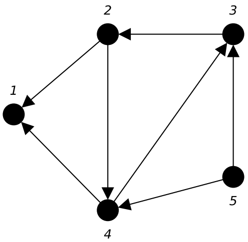




G^T: **grafo transposto** de G

Grafo Transposto

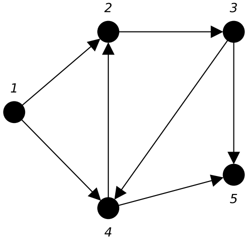


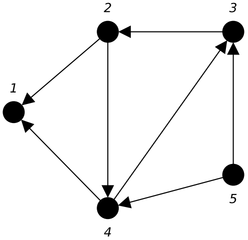


G^T: **grafo transposto** de G

cada arco é trocado por seu "retorno"

Grafo Transposto



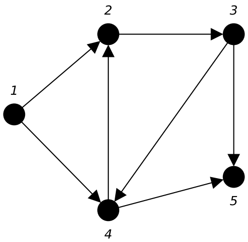


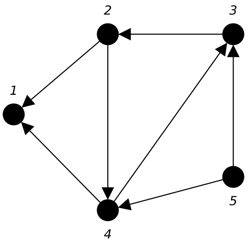
G^T: **grafo transposto** de G

cada arco é trocado por seu "retorno"

$$V(G^T) \;=\; V(G)$$

Grafo Transposto



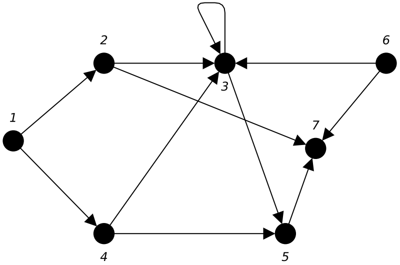


G^T: **grafo transposto** de G

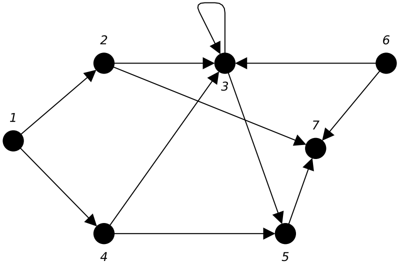
cada arco é trocado por seu "retorno"

$$\begin{aligned} V(G^T) &= V(G) \\ A(G^T) &= \{(v,u) \mid (u,v) \in A(G)\} \end{aligned}$$

Vizinhanças

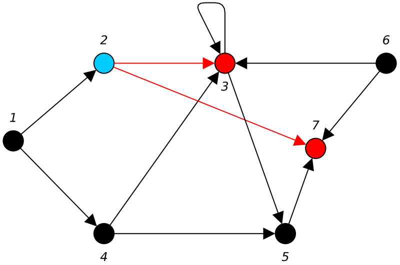


Vizinhanças



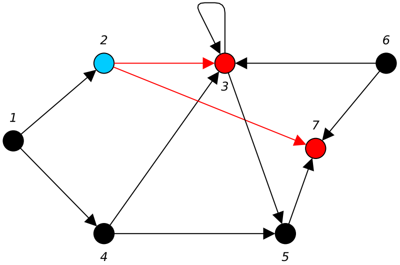
vizinhança de saída:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

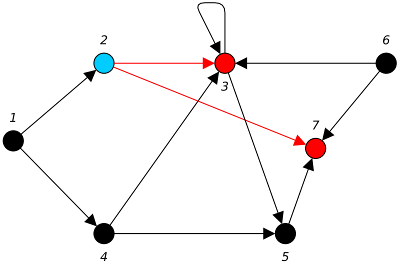
Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma^+_G(v) := \{u \in V(G) \mid (v,u) \in A(G)\}$

Vizinhanças

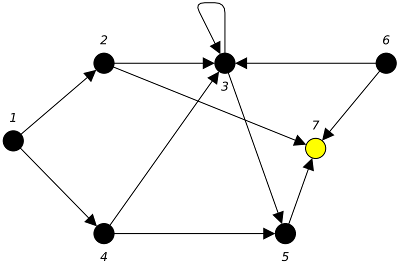


vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

sumidouro:

Vizinhanças

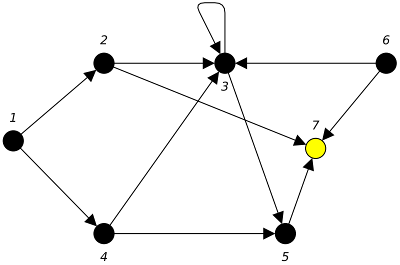


vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

Vizinhanças



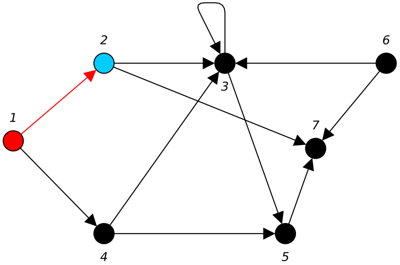
vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma^+_G(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada:

Vizinhanças



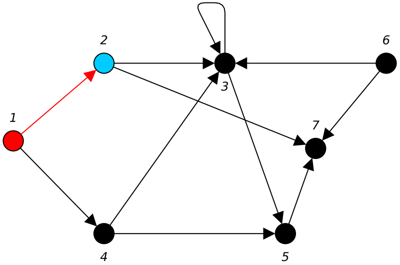
vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

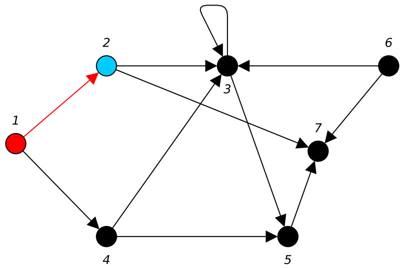
$\Gamma^+_G(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$\Gamma^-_G(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

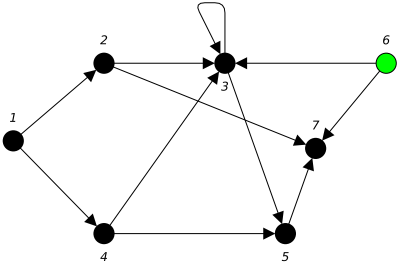
sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$

fonte:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

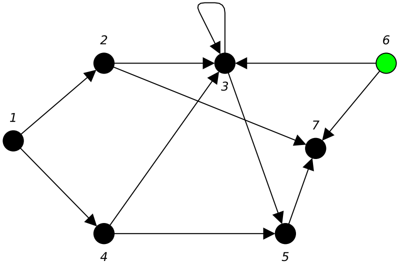
sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$

fonte: vértice sem vizinhos de entrada

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v,u) \in A(G)\}$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

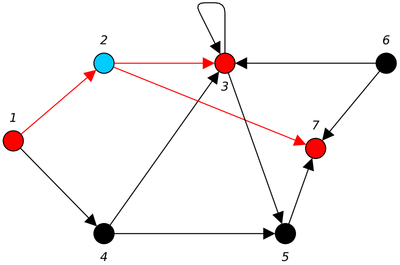
vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u,v) \in A(G)\}$

fonte: vértice sem vizinhos de entrada

vizinhança:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma^+_G(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

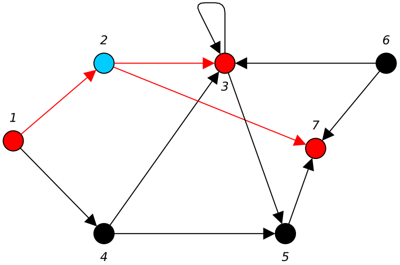
vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$\Gamma^-_G(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$

fonte: vértice sem vizinhos de entrada

vizinhança: união de ambas:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

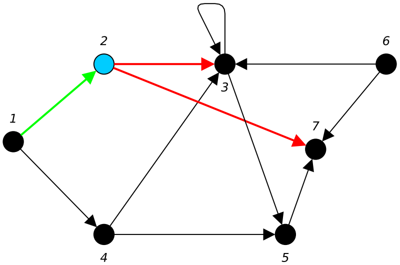
vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$

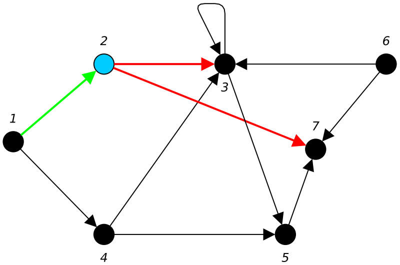
fonte: vértice sem vizinhos de entrada

vizinhança: união de ambas: $\Gamma_G(v) := \Gamma_G^+(v) \cup \Gamma_G^-(v)$

Fronteiras

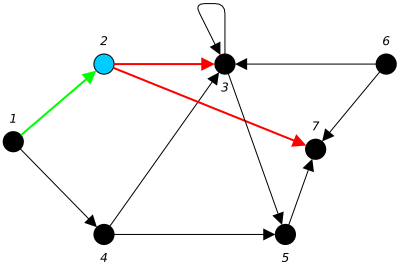


Fronteiras



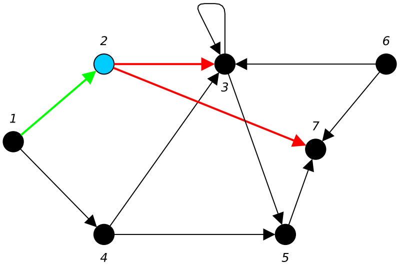
fronteira de saída de v:

Fronteiras



fronteira de saída de v: arcos que saem de v

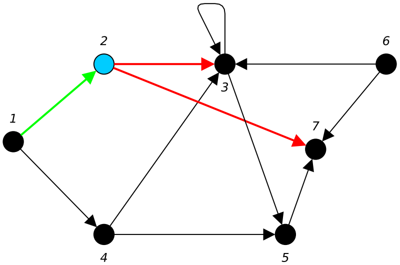
Fronteiras



fronteira de saída de v: arcos que saem de v

$$\partial^+_G(v) := \{(v,u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

Fronteiras

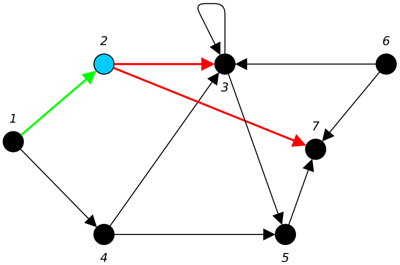


fronteira de saída de v: arcos que saem de v

$$\partial_G^+(v) := \{(v,u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v:

Fronteiras

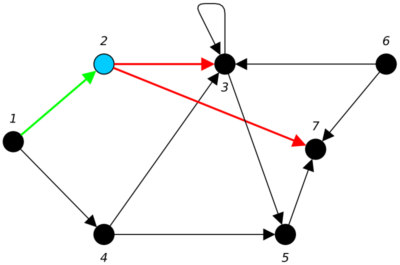


fronteira de saída de v: arcos que saem de v

$$\partial^+_G(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v: arcos que entram em v

Fronteiras



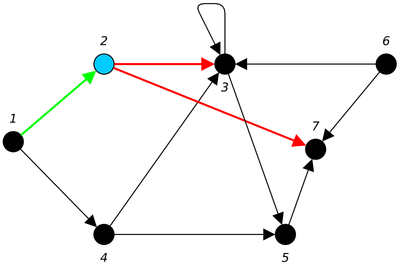
fronteira de saída de v: arcos que saem de v

$$\partial^+_G(v) := \{(v,u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v: arcos que entram em v

$$\partial^-_G(v) := \{(u,v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

Fronteiras



fronteira de saída de v: arcos que saem de v

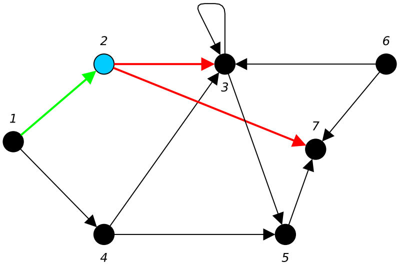
$$\partial^+_G(v) := \{(v,u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v: arcos que entram em v

$$\partial^-_G(v) := \{(u,v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de v:

Fronteiras



fronteira de saída de v: arcos que saem de v

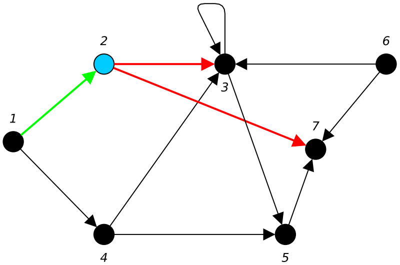
$$\partial_G^+(v) := \{(v,u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v: arcos que entram em v

$$\partial_G^-(v) := \{(u,v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de v: união de ambas

Fronteiras



fronteira de saída de v: arcos que saem de v

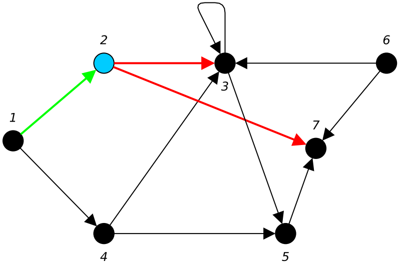
$$\partial^+_G(v) := \{(v,u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v: arcos que entram em v

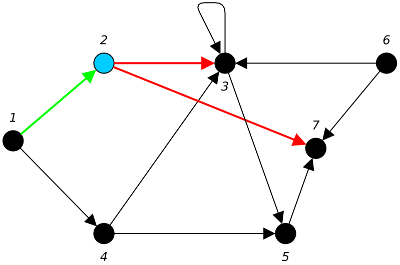
$$\partial^-_G(v) := \{(u,v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de v: união de ambas: $\partial_G(v) = \partial^+_G(v) \cup \partial^-_G(v)$

Grau

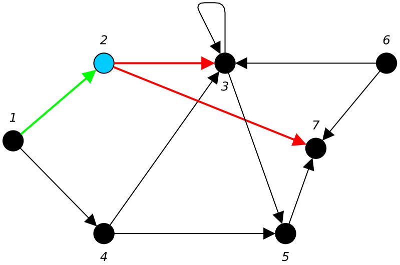


Grau



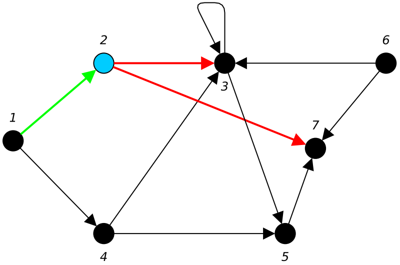
grau de saída de v:

Grau



grau de saída de v: número de arcos que saem de v

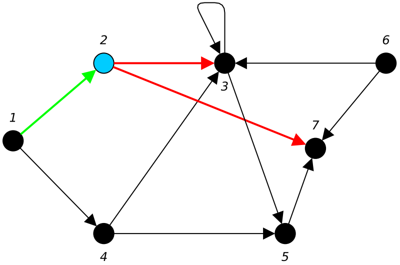
Grau



$\delta_G^+(v) = 2$

grau de saída de v: número de arcos que saem de v: $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

Grau

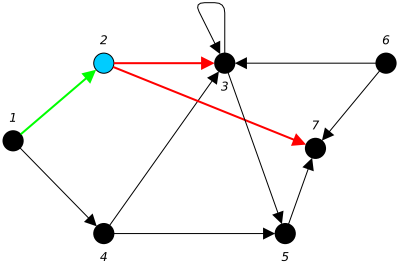


$\delta^+_G(v) = 2$

grau de saída de v: número de arcos que saem de v: $\delta^+_G(v) := |\partial^+_G(v)|$

grau de entrada de v:

Grau

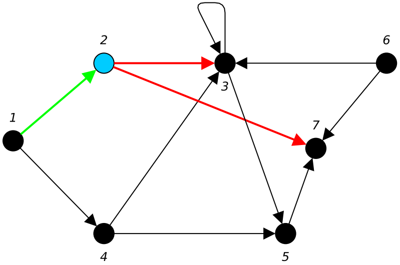


$\delta^+_G(v) = 2$

grau de saída de v: número de arcos que saem de v: $\delta^+_G(v) := |\partial^+_G(v)|$

grau de entrada de v: número de arcos que entram de v

Grau

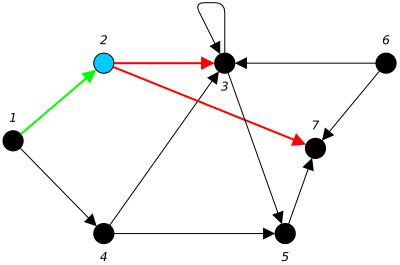


$$\delta^+_G(v) = 2$$
$$\delta^-_G(v) = 1$$

grau de saída de v: número de arcos que saem de v: $\delta^+_G(v) := |\partial^+_G(v)|$

grau de entrada de v: número de arcos que entram de v: $\delta^-_G(v) := |\partial^-_G(v)|$

Grau



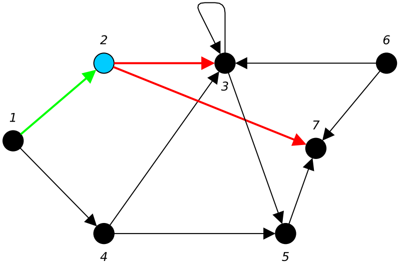
$\delta^+_G(v) = 2$
$\delta^-_G(v) = 1$

grau de saída de v: número de arcos que saem de v: $\delta^+_G(v) := |\partial^+_G(v)|$

grau de entrada de v: número de arcos que entram de v: $\delta^-_G(v) := |\partial^-_G(v)|$

grau de v:

Grau



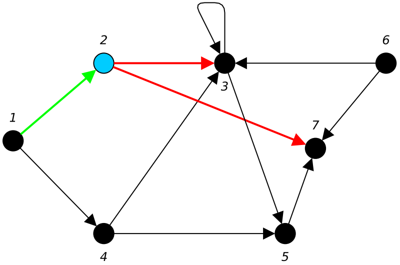
$\delta^+_G(v) = 2$
$\delta^-_G(v) = 1$

grau de saída de v: número de arcos que saem de v: $\delta^+_G(v) := |\partial^+_G(v)|$

grau de entrada de v: número de arcos que entram de v: $\delta^-_G(v) := |\partial^-_G(v)|$

grau de v: soma de ambos

Grau



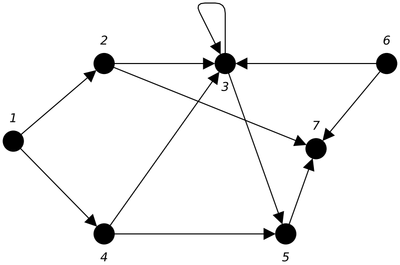
$\delta^+_G(v) = 2$
$\delta^-_G(v) = 1$
$\delta_G(v) = 3$

grau de saída de v: número de arcos que saem de v: $\delta^+_G(v) := |\partial^+_G(v)|$

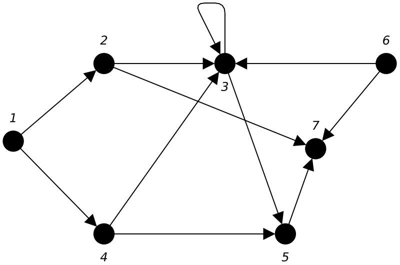
grau de entrada de v: número de arcos que entram de v: $\delta^-_G(v) := |\partial^-_G(v)|$

grau de v: soma de ambos: $\delta_G(v) = \delta^+_G(v) + \delta^-_G(v)$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado

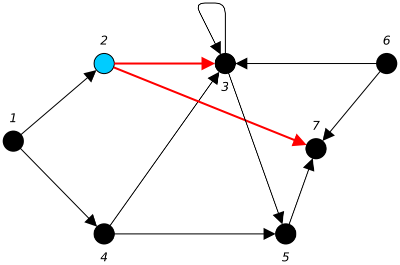


Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



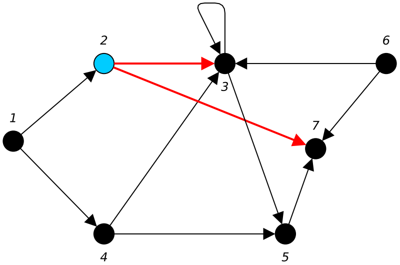
grau máximo de saída:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta^+_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

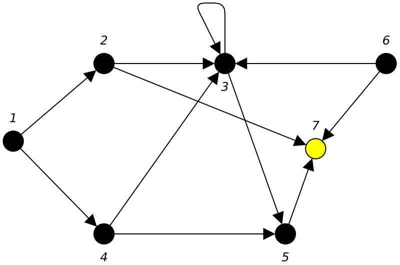
Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta^+_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de saída:

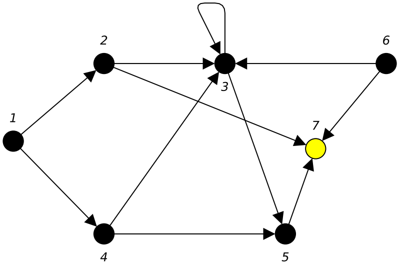
Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado

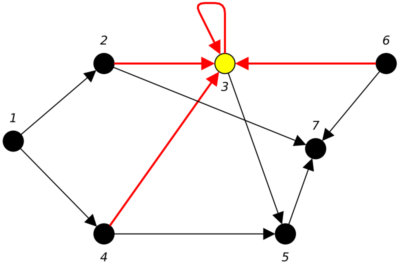


grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau máximo de entrada:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado

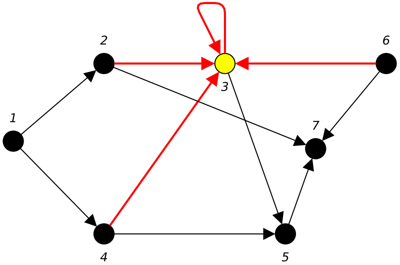


grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta^+_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min\left\{\delta^+_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max\left\{\delta^-_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



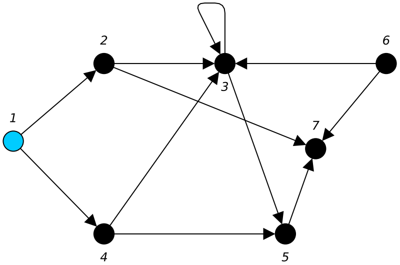
grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \left\{ \delta^+_G(v) \mid v \in V(G) \right\}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \left\{ \delta^+_G(v) \mid v \in V(G) \right\}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \left\{ \delta^-_G(v) \mid v \in V(G) \right\}$

grau mínimo de entrada:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



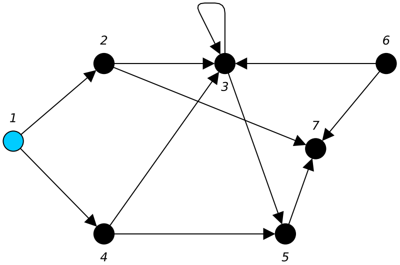
grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max\left\{\delta_G^-(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min\left\{\delta_G^-(v) \mid v \in V(G)\right\}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \left\{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \right\}$

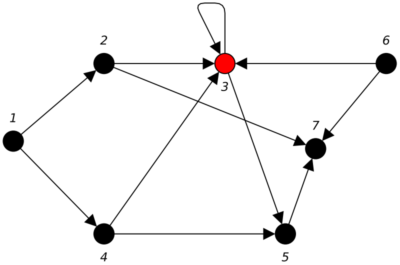
grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \left\{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \right\}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \left\{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \right\}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min \left\{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \right\}$

grau máximo:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

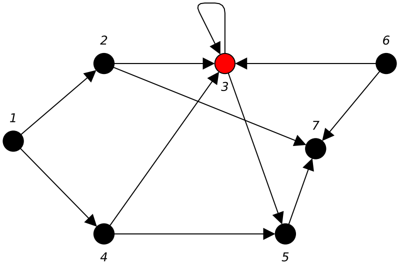
grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max\left\{\delta_G^-(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min\left\{\delta_G^-(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau máximo: $\Delta(G) = \max\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min\left\{\delta_G^+(v) \mid v \in V(G)\right\}$

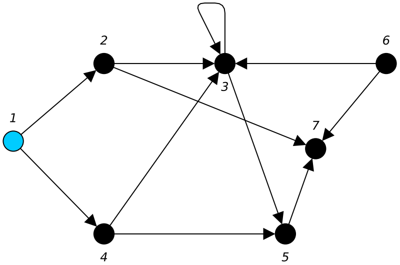
grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max\left\{\delta_G^-(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min\left\{\delta_G^-(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau máximo: $\Delta(G) = \max\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$

grau mínimo:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max\left\{\delta^+_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min\left\{\delta^+_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

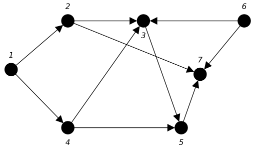
grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max\left\{\delta^-_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min\left\{\delta^-_G(v) \mid v \in V(G)\right\}$

grau máximo: $\Delta(G) = \max\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$

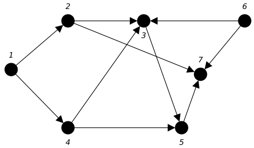
grau mínimo: $\delta(G) = \min\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}$

Matriz de Incidência



$$\overline{M}_G =$$

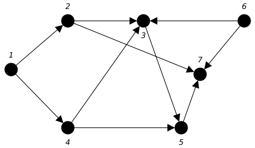
Matriz de Incidência



$$\overline{M}_G =$$

sem laço

Matriz de Incidência

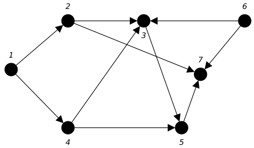


$$\overline{M}_G = \begin{array}{c|c|} & \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \\ 7 & \\ \hline \end{array}$$

sem laço

uma linha para cada vértice

Matriz de Incidência



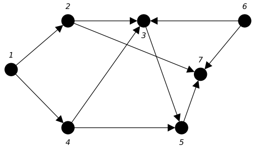
$$\overline{M}_G = \begin{array}{c|cccccccccc|} & 1,2 & 1,4 & 2,3 & 2,7 & 3,5 & 4,3 & 4,5 & 5,7 & 6,3 & 6,7 \\ \hline 1 & & & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & & & \\ 5 & & & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

sem laço

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

sem laço

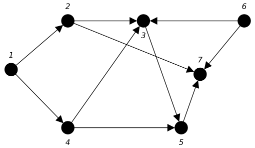
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

na linha v, coluna a tem

  1, se a sai de v

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

sem laço

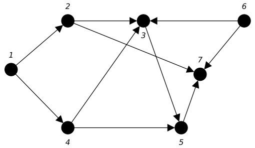
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

na linha v, coluna a tem

$$\begin{array}{rl} 1, & \text{se } a \text{ sai de } v \\ -1, & \text{se } a \text{ entra em } v \end{array}$$

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

sem laço

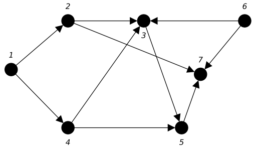
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

na linha v, coluna a tem

$$\begin{array}{rl} 1, & \text{se } a \text{ sai de } v \\ -1, & \text{se } a \text{ entra em } v \\ 0, & \text{se } a \text{ não incide em } v \end{array}$$

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-1	0	1	-1	0	0	-1	0
4	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	-1

sem laço

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

na linha v, coluna a tem

1, se a sai de v

-1, se a entra em v

0, se a não incide em v

$$\overline{M}_G[v,a] = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ sai de } v, \\ -1, & \text{se } a \text{ entra em } v, \\ 0, & \text{se } a \text{ não incide em } v. \end{cases}$$

Teorema 3

Versão do Teorema 1 para grafos direcionados

Teorema 3

Versão do Teorema 1 para grafos direcionados

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v)$$

Teorema 3

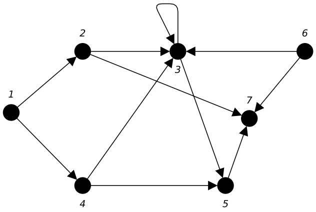
Versão do Teorema 1 para grafos direcionados

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v)$$

Demonstração.

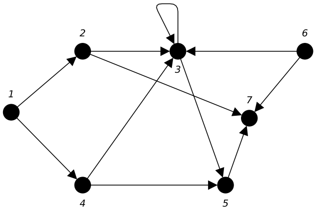
Exercício 16 $\square$

Matriz de Adjacência



$M_G =$

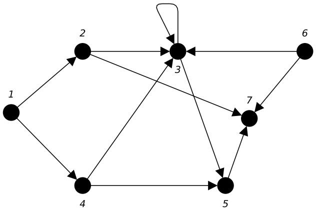
Matriz de Adjacência



$$M_G = \begin{array}{c|c|}
 & \\ \hline
1 & \\
2 & \\
3 & \\
4 & \\
5 & \\
6 & \\
7 & \\ \hline
\end{array}$$

uma linha para cada vértice

Matriz de Adjacência

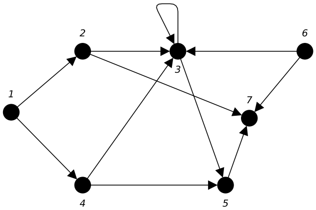


$$M_G = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & \\ 5 & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

Matriz de Adjacência



$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

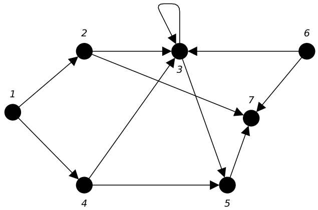
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u, coluna v tem

1

Matriz de Adjacência



$$M_G = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & \\ 5 & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

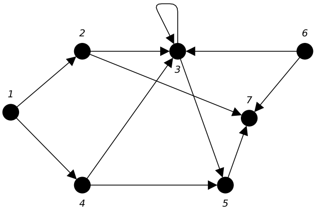
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u, coluna v tem

  1, se u é vizinho de entrada de v

Matriz de Adjacência



$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

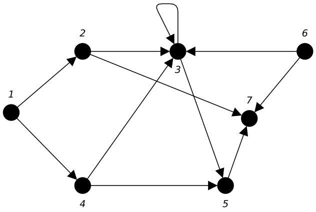
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u, coluna v tem

- 1, se u é vizinho de entrada de v
- 0

Matriz de Adjacência

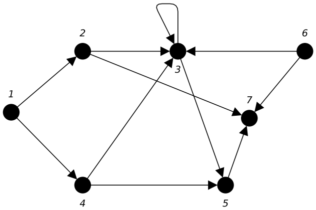


$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

- uma linha para cada vértice
- uma coluna para cada vértice
- na linha u, coluna v tem
  - 1, se u é vizinho de entrada de v
  - 0, caso contrário

Matriz de Adjacência



$$M_G = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

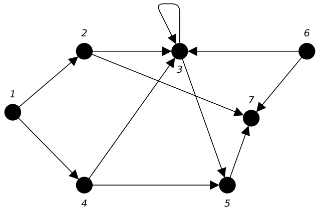
na linha u, coluna v tem

  1, se u é vizinho de entrada de v

  0, caso contrário

$$M_G[u,v] = \begin{cases} 1, & \text{se } (u,v) \in A(G), \\ 0, & \text{se } (u,v) \notin A(G). \end{cases}$$

Matriz de Adjacência



$$M_G = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u, coluna v tem

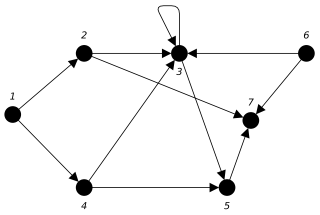
1, se u é vizinho de entrada de v

0, caso contrário

$$M_G[u,v] = \begin{cases} 1, & \text{se } (u,v) \in A(G), \\ 0, & \text{se } (u,v) \notin A(G). \end{cases}$$

- pode ter 1s na diagonal principal

Matriz de Adjacência



$$M_G = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u, coluna v tem

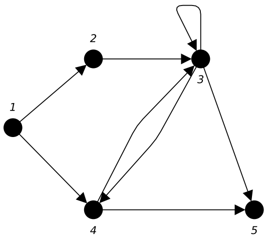
1, se u é vizinho de entrada de v

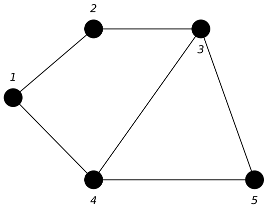
0, caso contrário

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 1, & \text{se } (u, v) \in A(G), \\ 0, & \text{se } (u, v) \notin A(G). \end{cases}$$

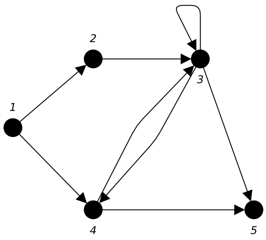
- pode ter 1s na diagonal principal
- só é simétrica se G for simétrico

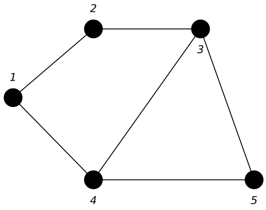
Grafo Subjacente





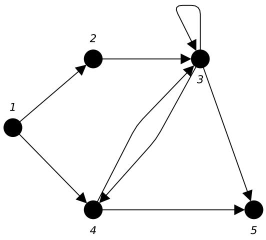
Grafo Subjacente

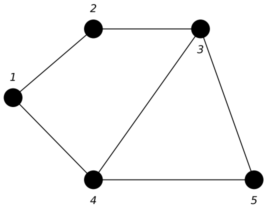




$S(G)$

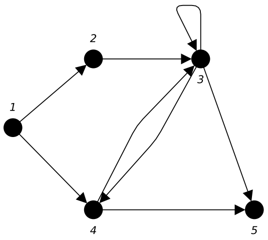
Grafo Subjacente

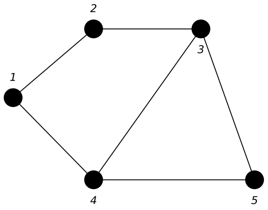




$S(G)$: grafo não-direcionado

Grafo Subjacente

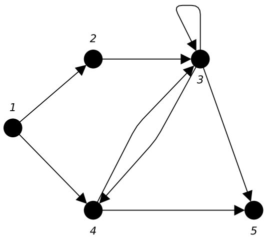


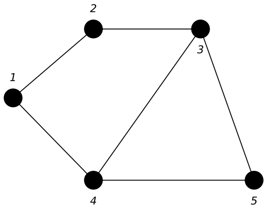


$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices

Grafo Subjacente

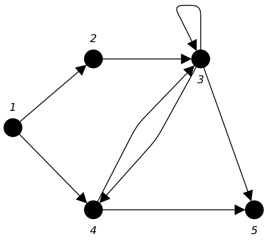


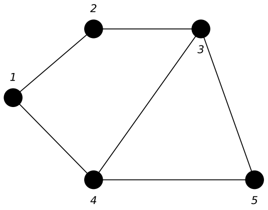


$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$

Grafo Subjacente

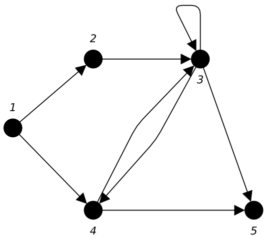


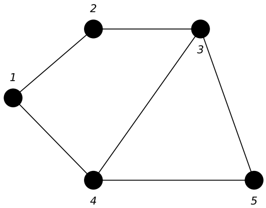


$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos

Grafo Subjacente

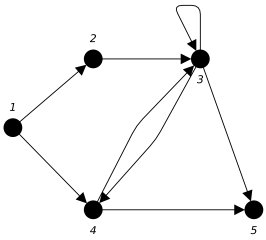


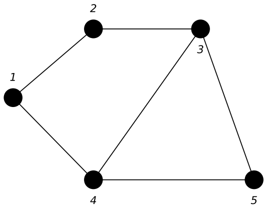


$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

Grafo Subjacente



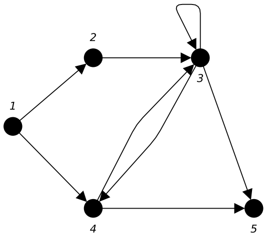


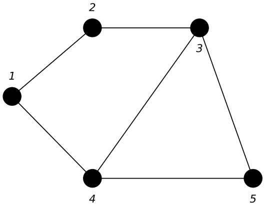
$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

Convenção/abuso de linguagem

Grafo Subjacente





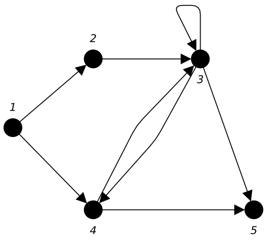
$S(G)$: grafo não-direcionado

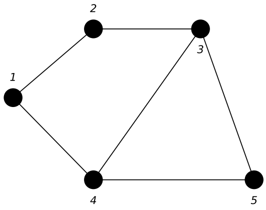
- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

Convenção/abuso de linguagem:

"arestas de G"

Grafo Subjacente





$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

Convenção/abuso de linguagem:

"arestas de G": $E(G) := E(S(G))$