Algoritmos e Teoria dos Grafos

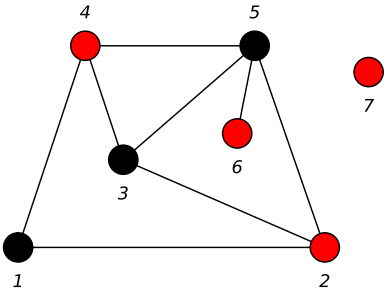
Tópico 8: Conjuntos Independentes e Cliques

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

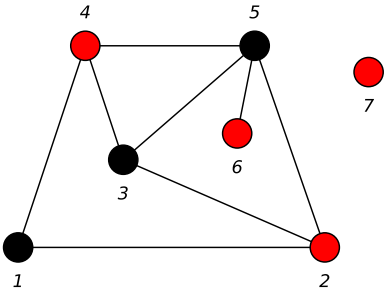
Departamento de Informática da UFPR

2023

Conjuntos Independentes

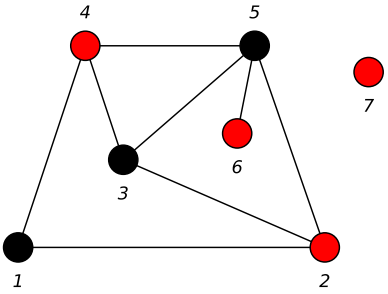


Conjuntos Independentes



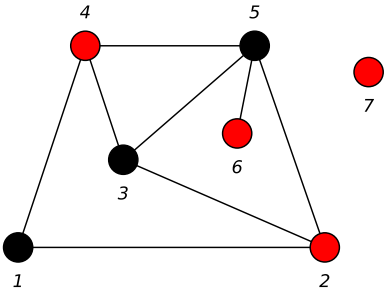
conjunto independente

Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

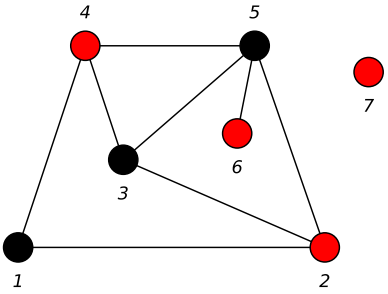
Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G

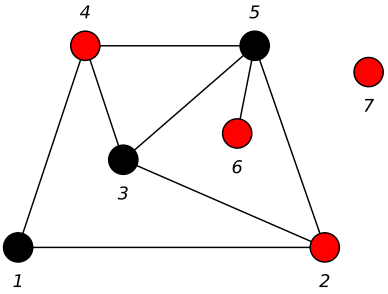
Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G: $E(G[X]) = \emptyset$

Conjuntos Independentes

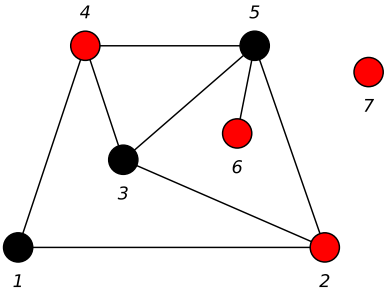


conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G: $E(G[X]) = \emptyset$

$\alpha(G)$

Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G: $E(G[X]) = \emptyset$

$\alpha(G) :=$ tamanho máximo de um conjunto independente em G

Problema do Conjunto Independente

Dados

Problema do Conjunto Independente

Dados: um grafo G e um inteiro k

Problema do Conjunto Independente

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda

Problema do Conjunto Independente

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem conjunto independente de tamanho k?

Problema do Conjunto Independente

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem conjunto independente de tamanho k?

Teorema 4 (Karp (1972)) O Problema do Conjunto Independente é $\mathcal{NP}$–Difícil

Problema do Conjunto Independente

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem conjunto independente de tamanho k?

Teorema 4 (Karp (1972)) O Problema do Conjunto Independente é $\mathcal{NP}$–Difícil

Corolário 5: Determinar o tamanho máximo de um conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil.

Problema do Conjunto Independente

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem conjunto independente de tamanho k?

Teorema 4 (Karp (1972)) O Problema do Conjunto Independente é $\mathcal{NP}$–Difícil

Corolário 5: Determinar o tamanho máximo de um conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil.

Demonstração.

Exercício 33 □

Exercício 33

Exercício 33

provar que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil**

Exercício 33

provar que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil**

$A(G)$: algoritmo que devolve o tamanho máximo de um conjunto independente em G

Exercício 33

provar que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil**

$A(G)$: algoritmo que devolve o tamanho máximo de um conjunto independente em G

CI(G, k)

Se $A(G) \geq k$
    Devolva **sim**
Devolva **não**

Exercício 33

provar que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil**

$A(G)$: algoritmo que devolve o tamanho máximo de um conjunto independente em G

CI(G, k)

Se $A(G) \geq k$
    Devolva **sim**
Devolva **não**

---

1. CI(G) é um algoritmo para o problema do Conjunto Independente

Exercício 33

provar que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil**

$A(G)$: algoritmo que devolve o tamanho máximo de um conjunto independente em G

CI(G, k)

Se $A(G) \geq k$
    Devolva **sim**
Devolva **não**

---

1. CI(G) é um algoritmo para o problema do Conjunto Independente
2. se $A(G)$ é um algoritmo polinomial, então CI(G) também é

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H
Responda: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G?

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H
Responda: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G?

Corolário 6: O Problema do Subgrafo Induzido é $\mathcal{NP}$–Difícil.

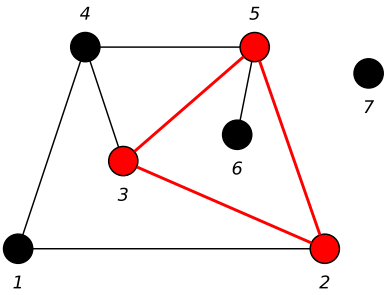
Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H
Responda: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G?

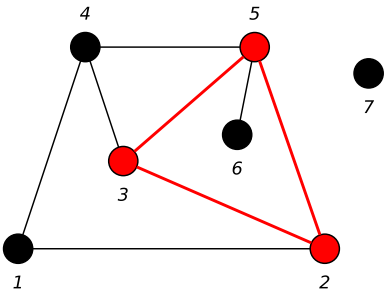
Corolário 6: O Problema do Subgrafo Induzido é $\mathcal{NP}$–Difícil.

Demonstração.
Exercício 34 □

Cliques

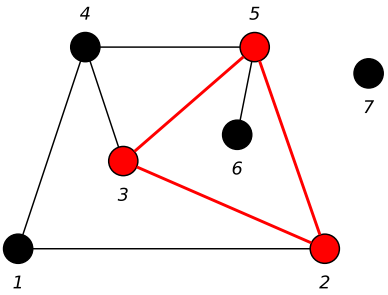


Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

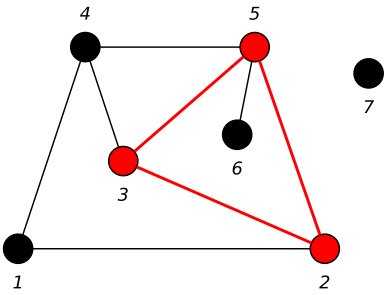
Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G

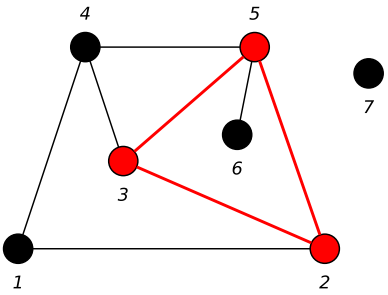
Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G: $G[X]$ é completo

Cliques

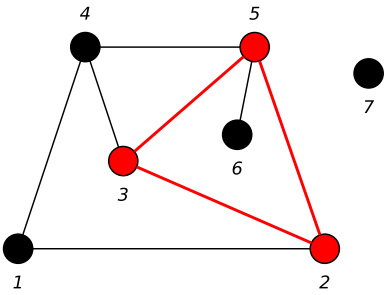


conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G: $G[X]$ é completo

$\omega(G)$

Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G: $G[X]$ é completo

$\omega(G) :=$ tamanho máximo de uma clique em G

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Problema da Clique

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k?

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k?

Problema da Clique Máxima

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Teorema 7

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$–Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Demonstração.

Exercício 28 □

Referências

Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In Raymond E. Miller, James W. Thatcher, and Jean D. Bohlinger, editors, **Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department**, pages 85–103, Boston, MA, 1972. Springer US. ISBN 978-1-4684-2001-2. doi: 10.1007/978-1-4684-2001-2_9. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9.