Algoritmos e Teoria dos Grafos

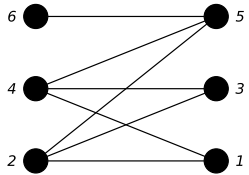
Tópico 9: Grafos Bipartidos

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

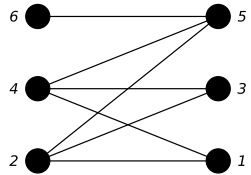
Departamento de Informática da UFPR

2023

Grafos Bipartidos

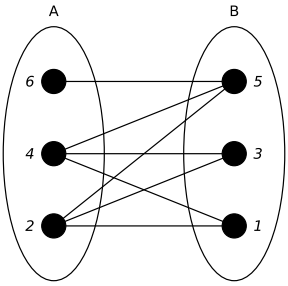


Grafos Bipartidos



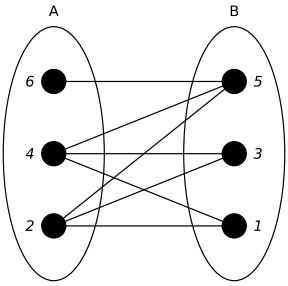
bipartição de G

Grafos Bipartidos



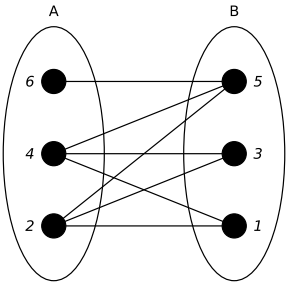
bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes

Grafos Bipartidos



bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes (**partes**)

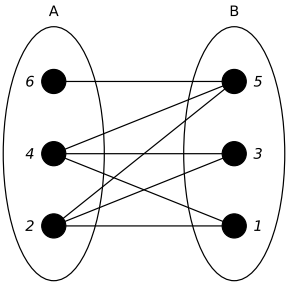
Grafos Bipartidos



bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes (**partes**)

grafo bipartido

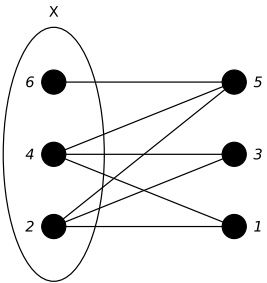
Grafos Bipartidos



bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes (**partes**)

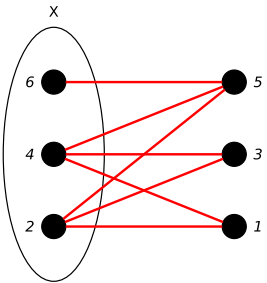
grafo bipartido: grafo que admite bipartição

Lema 8



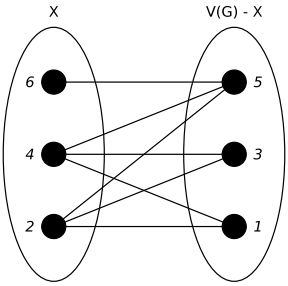
G é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas

Lema 8



G é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas, isto é,
$E(G) = \partial_G(X)$, para algum $X \subseteq V(G)$

Lema 8

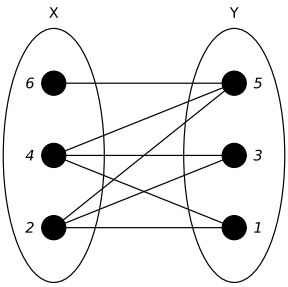


G é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas, isto é,
$E(G) = \partial_G(X)$, para algum $X \subseteq V(G)$
$\{X, V(G) - X\}$ é uma bipartição de G

Demonstração.

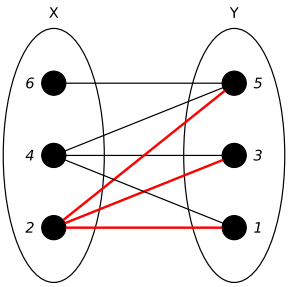
Exercício 35 □

Corolário 9



X, Y: bipartição de G

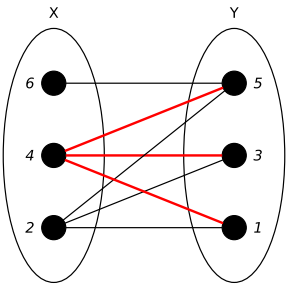
Corolário 9



X, Y: bipartição de G

G tem no máximo $|X||Y|$ arestas

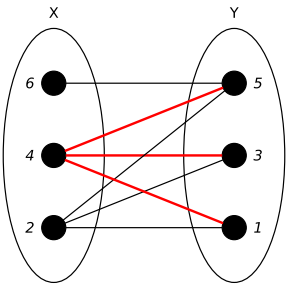
Corolário 9



X, Y: bipartição de G

G tem no máximo $|X||Y|$ arestas

Corolário 9



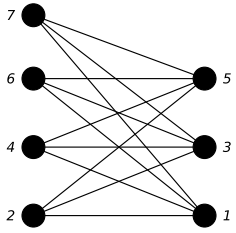
X, Y: bipartição de G

G tem no máximo $|X||Y|$ arestas

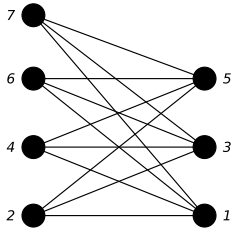
Demonstração.

Exercício 9 □

Grafo Bipartido Completo

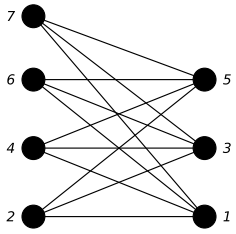


Grafo Bipartido Completo



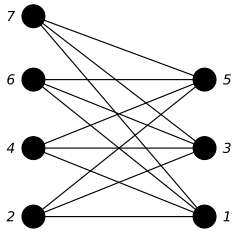
grafo bipartido completo

Grafo Bipartido Completo



grafo bipartido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

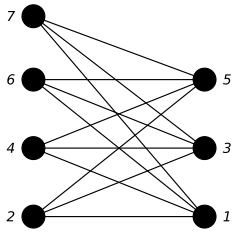
Grafo Bipartido Completo



grafo bipartido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

$K_{p,q}$

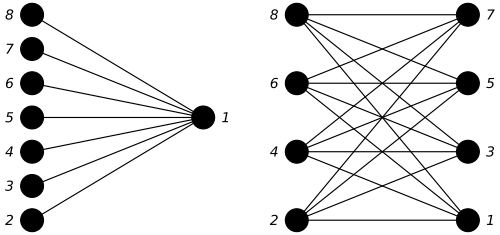
Grafo Bipartido Completo



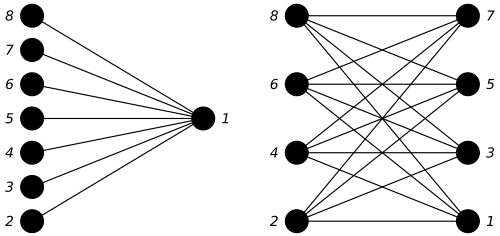
grafo bipartido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

$K_{p,q}$:= grafo bipartido completo cujas partes tem p e q vértices

Corolario 10

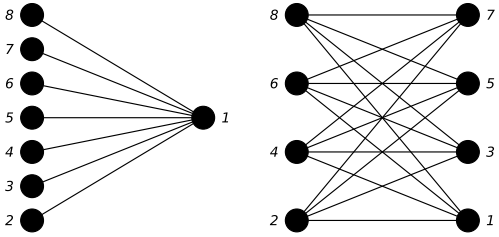


Corolario 10



Um grafo bipartido de n vértices tem no máximo ??? arestas

Corolario 10

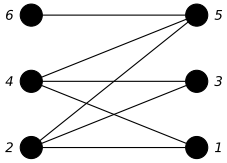


Um grafo bipartido de n vértices tem no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas

Demonstração.

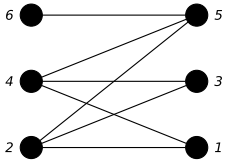
Exercício 36 □

Matriz de bi–adjacência



$M =$

Matriz de bi–adjacência

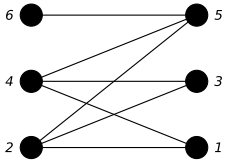


$M =$

1	
3	
5	

uma linha para cada vértice de uma das partes

Matriz de bi–adjacência



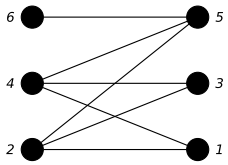
$M =$

	2	4	6
1			
3			
5			

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

Matriz de bi–adjacência



$M =$

	2	4	6
1			
3			
5			

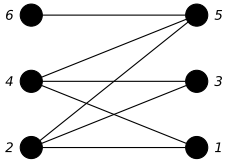
uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1

Matriz de bi–adjacência



$M =$

	2	4	6
1			
3			
5			

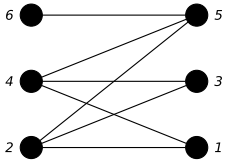
uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

Matriz de bi–adjacência



$M =$

	2	4	6
1			
3			
5			

uma linha para cada vértice de uma das partes

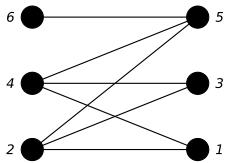
uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

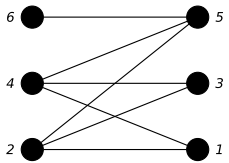
uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

- 1, se u e v são vizinhos
- 0, se u e v não são vizinhos

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

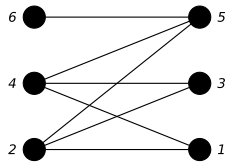
uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

- 1, se u e v são vizinhos
- 0, se u e v não são vizinhos

$$M[u,v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u,v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u,v\} \in E(G). \end{cases}$$

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

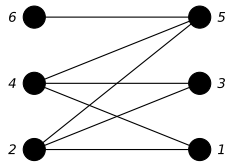
1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M[u,v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u,v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u,v\} \in E(G). \end{cases}$$

- qualquer matriz binária é matriz de bi–adjacência de um grafo bipartido

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M[u,v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u,v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u,v\} \in E(G). \end{cases}$$

- qualquer matriz binária é matriz de bi–adjacência de um grafo bipartido
- qualquer matriz é matriz de bi–adjacência de um grafo bipartido ponderado