

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 11: Passeios

Renato Carmo

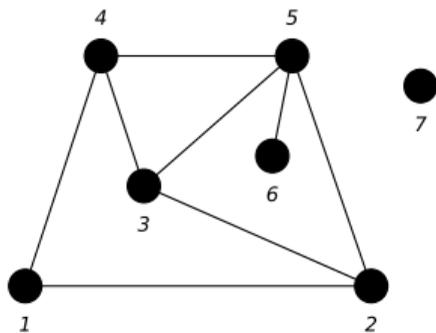
André Guedes

Murilo Silva

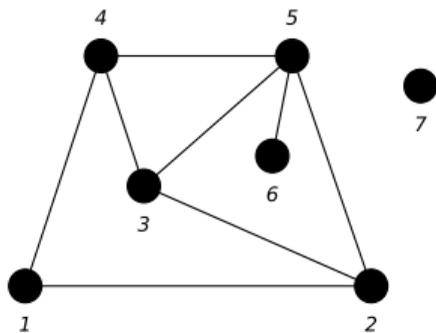
Departamento de Informática da UFPR

2023

Definição

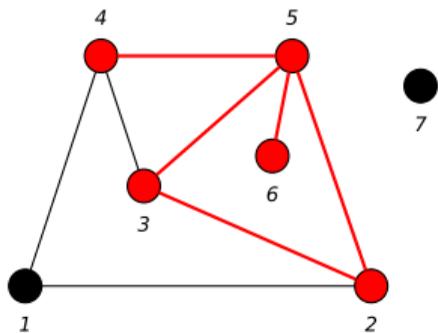


Definição



passeio

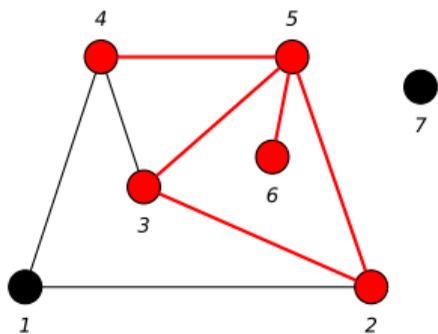
Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices

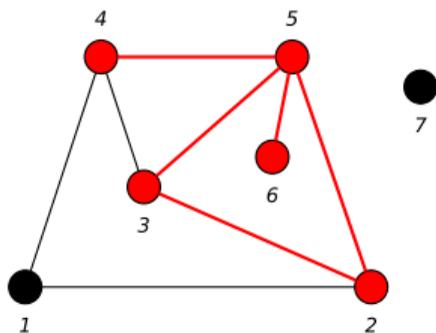
Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

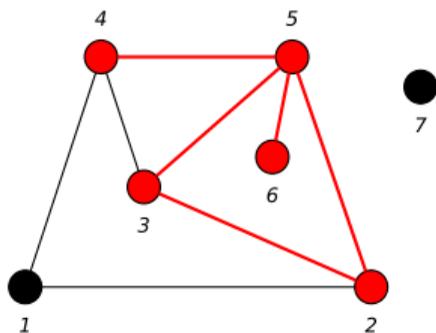
Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos
 v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

Definição



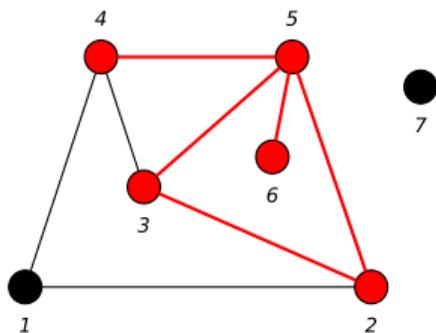
(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0

Definição



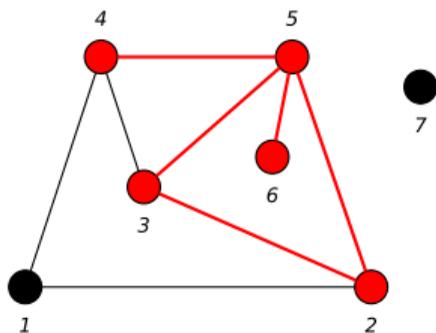
(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0 : **início** do passeio

Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

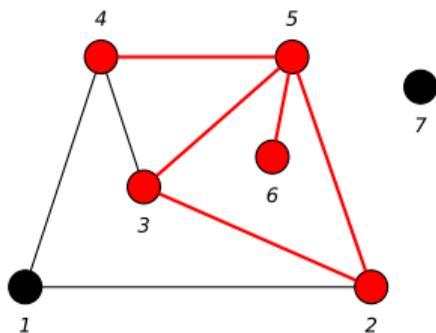
passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0 : **início** do passeio

v_n

Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

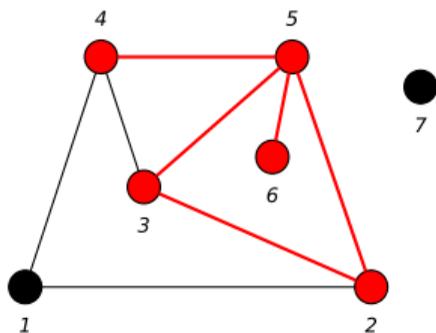
passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0 : **início** do passeio

v_n : **fim** do passeio

Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

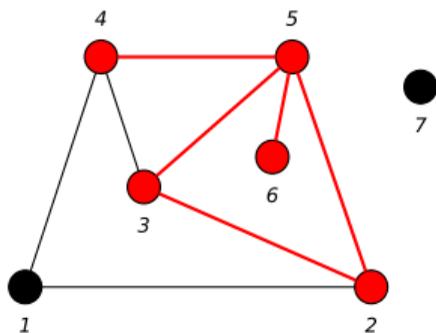
v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0 : **início** do passeio

v_n : **fim** do passeio

v_0 e v_n

Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

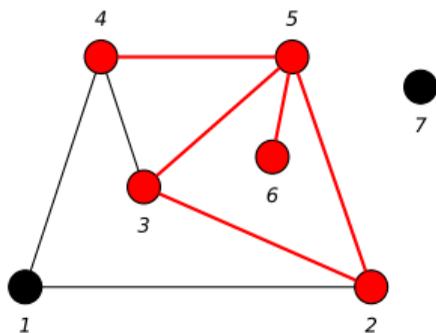
v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0 : **início** do passeio

v_n : **fim** do passeio

v_0 e v_n : **pontas** do passeio

Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

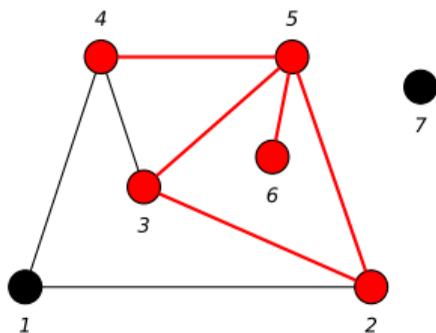
v_0 : **início** do passeio

v_n : **fim** do passeio

v_0 e v_n : **pontas** do passeio

v_1, \dots, v_{n-1}

Definição



(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0 : **início** do passeio

v_n : **fim** do passeio

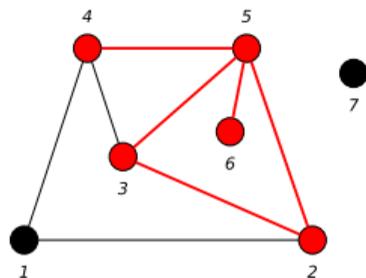
v_0 e v_n : **pontas** do passeio

v_1, \dots, v_{n-1} : **vértices internos** do passeio

passeio trivial

passeio trivial: passeio com um único vértice

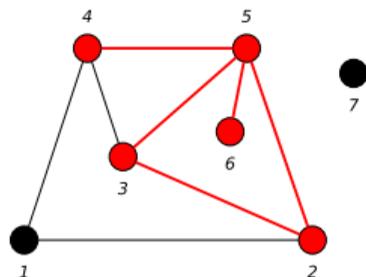
Definições auxiliares



passeio trivial: passeio com um único vértice

passeio **aberto**

Definições auxiliares

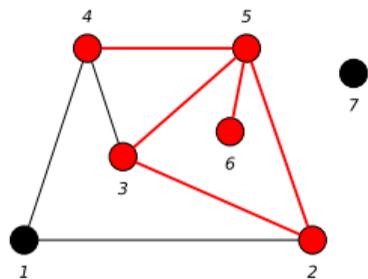


(4, 5, 2, 3, 5, 6)

passeio trivial: passeio com um único vértice

passeio **aberto:** pontas distintas

Definições auxiliares

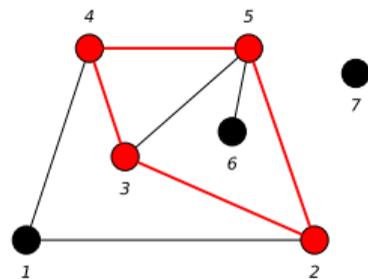


(4, 5, 2, 3, 5, 6)

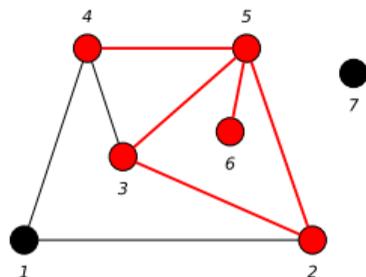
passeio trivial: passeio com um único vértice

passeio **aberto:** pontas distintas

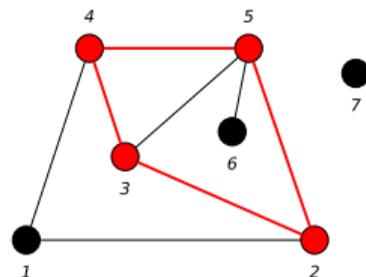
passeio **fechado**



Definições auxiliares



(4, 5, 2, 3, 5, 6)



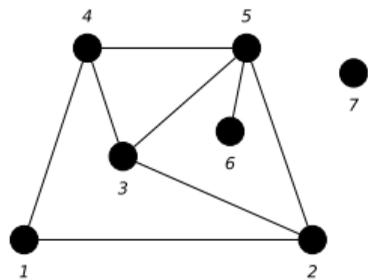
(4, 5, 2, 3, 4)

passeio trivial: passeio com um único vértice

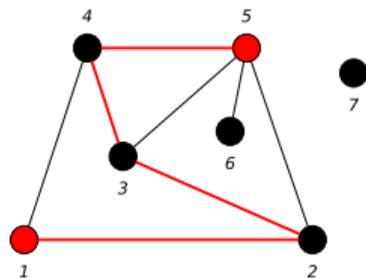
passeio **aberto:** pontas distintas

passeio **fechado:** pontas coincidem

Distância

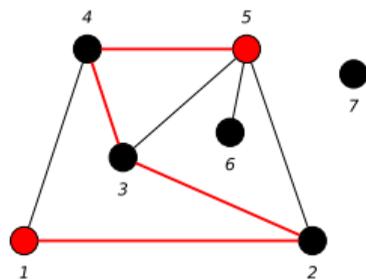


Distância



tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

Distância

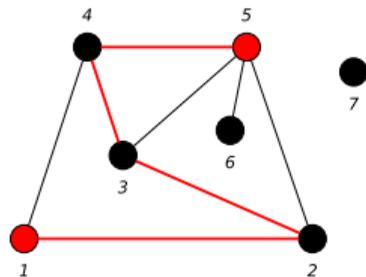


(1, 2, 3, 4, 5)

tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

Distância



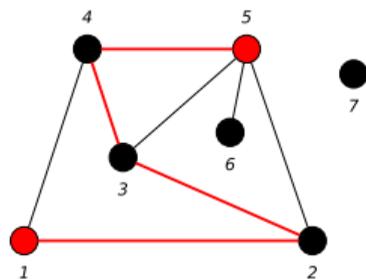
$$|(1, 2, 3, 4, 5)| = 4$$

tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

$$|P| = n$$

Distância



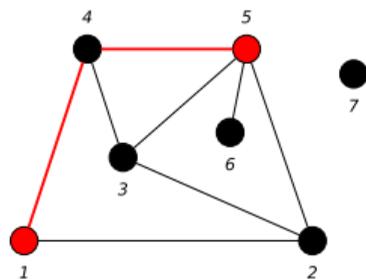
tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

$$|P| = n$$

distância entre u e v

Distância



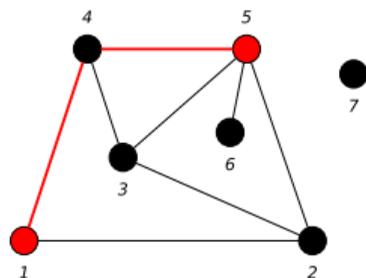
tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

$$|P| = n$$

distância entre u e v : tamanho do menor passeio de u a v

Distância



$$d_G(1, 5) = |(1, 4, 5)| = 2$$

tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

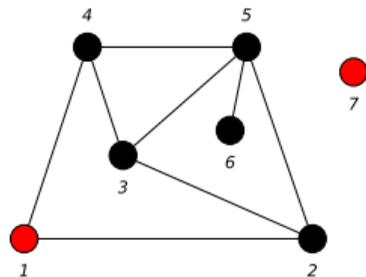
$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

$$|P| = n$$

distância entre u e v : tamanho do menor passeio de u a v

$$d_G(u, v) := \min \{ |P| \mid P \text{ é passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G \}$$

Distância



tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

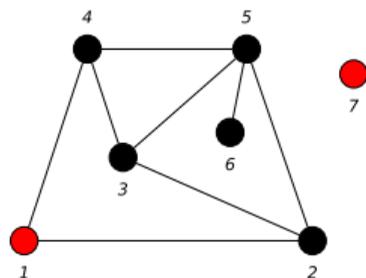
$$|P| = n$$

distância entre u e v : tamanho do menor passeio de u a v

$$d_G(u, v) := \min \{ |P| \mid P \text{ é passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G \}$$

não existe passeio de u a v

Distância



$$d_G(1, 7) = \infty$$

tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

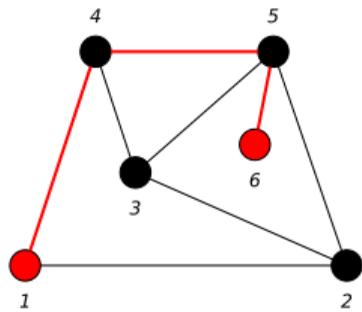
$$|P| = n$$

distância entre u e v : tamanho do menor passeio de u a v

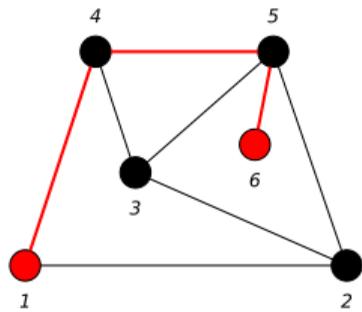
$$d_G(u, v) := \min \{ |P| \mid P \text{ é passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G \}$$

não existe passeio de u a v : $d_G(u, v) = \infty$

Diâmetro

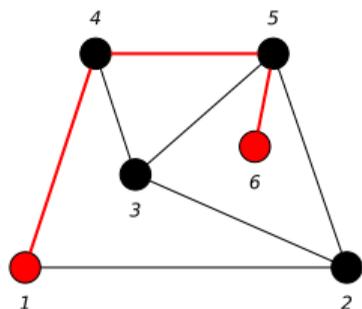


Diâmetro



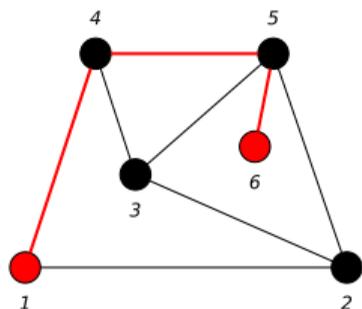
diâmetro de G

Diâmetro



diâmetro de G : maior distância entre dois vértices em G

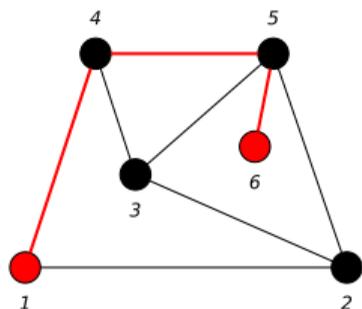
Diâmetro



diâmetro de G : maior distância entre dois vértices em G

$$\text{diam}(G) := \max \{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

Diâmetro

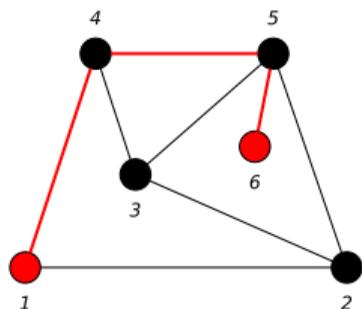


diâmetro de G : maior distância entre dois vértices em G

$$\text{diam}(G) := \max \{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

não existe passeio de u a v

Diâmetro

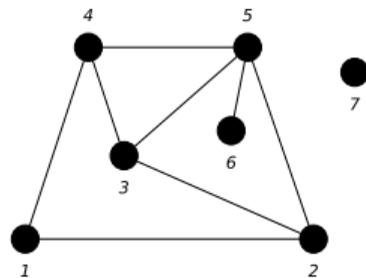


diâmetro de G : maior distância entre dois vértices em G

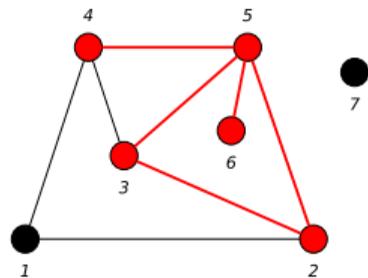
$$\text{diam}(G) := \max \{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

não existe passeio de u a v : $\text{diam}(G) = \infty$

Grafo induzido por passeio

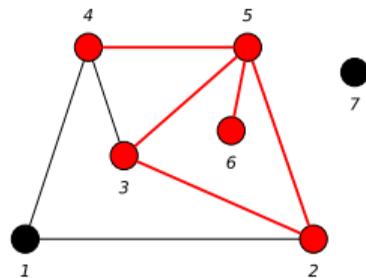


Grafo induzido por passeio



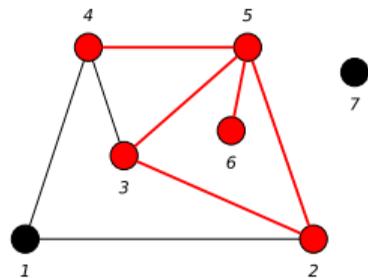
$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P

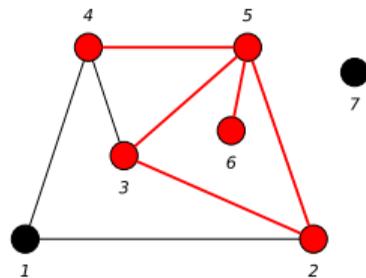
Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

Grafo induzido por passeio

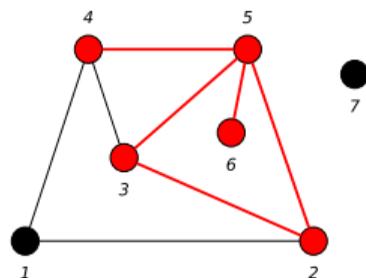


$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P

Grafo induzido por passeio

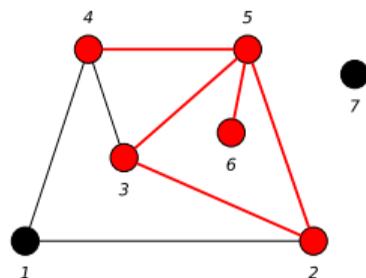


$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

Grafo induzido por passeio



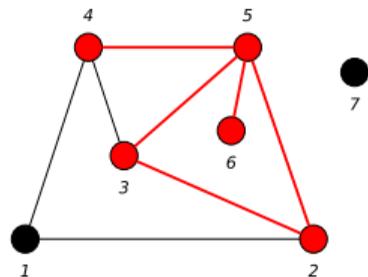
$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

grafo induzido por P

Grafo induzido por passeio



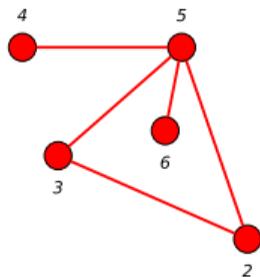
$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

grafo induzido por P : grafo com vértices e arestas de P

Grafo induzido por passeio



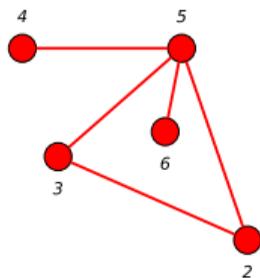
$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

grafo induzido por P : grafo com vértices e arestas de P : $G[P]$

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

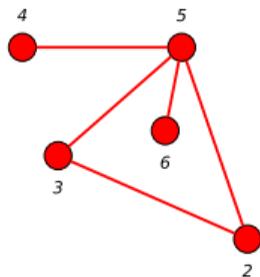
conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

grafo induzido por P : grafo com vértices e arestas de P : $G[P]$

$$V(G[P]) := V(P),$$

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

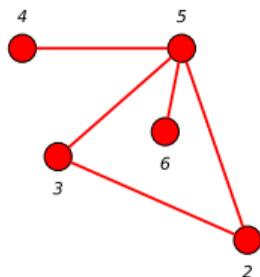
conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

grafo induzido por P : grafo com vértices e arestas de P : $G[P]$

$$V(G[P]) := V(P),$$

$$E(G[P]) := E(P).$$

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

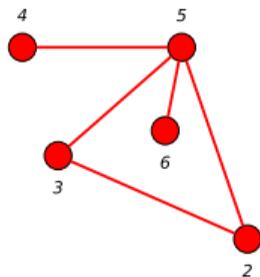
grafo induzido por P : grafo com vértices e arestas de P : $G[P]$

$$V(G[P]) := V(P),$$

$$E(G[P]) := E(P).$$

P é gerador

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

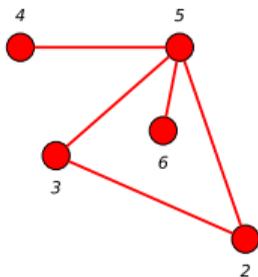
grafo induzido por P : grafo com vértices e arestas de P : $G[P]$

$$V(G[P]) := V(P),$$

$$E(G[P]) := E(P).$$

P é **gerador**: $G[P]$ é subgrafo gerador de G

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P : $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$

conjunto das arestas de P : $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

grafo induzido por P : grafo com vértices e arestas de P : $G[P]$

$$V(G[P]) := V(P),$$

$$E(G[P]) := E(P).$$

P é **gerador**: $G[P]$ é subgrafo gerador de G : P “passa por” todos os vértices de G

Passeio Reverso

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

Passeio Reverso

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

reverso de P

Passeio Reverso

$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

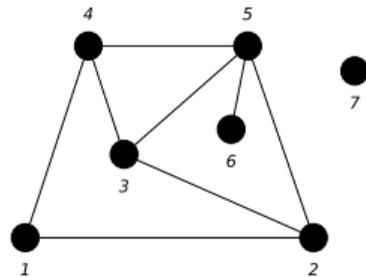
reverso de P : P^{-1}

Passeio Reverso

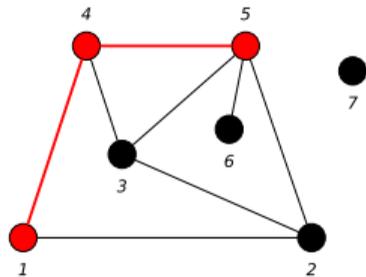
$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

reverso de P : $P^{-1} := (v_n, \dots, v_0)$

Concatenação de Passeios

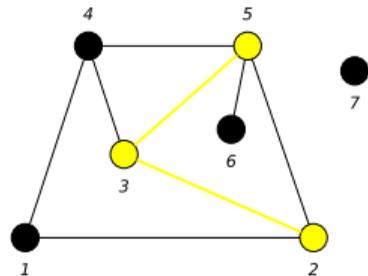


Concatenação de Passeios



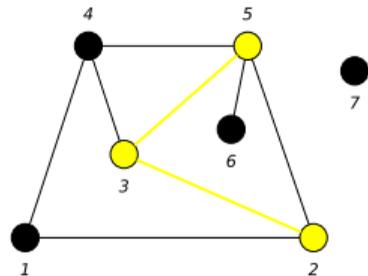
$$P = (v_0, \dots, v_n)$$

Concatenação de Passeios



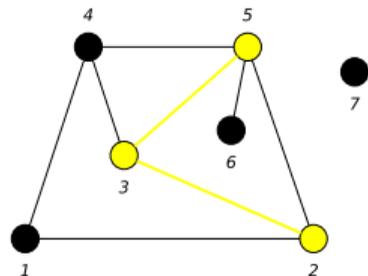
$P = (v_0, \dots, v_n)$, $Q = (u_0, \dots, u_m)$: passeios

Concatenação de Passeios



$P = (v_0, \dots, v_n)$, $Q = (u_0, \dots, u_m)$: passeios: $v_n = u_0$

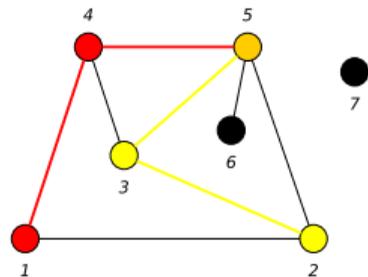
Concatenação de Passeios



$P = (v_0, \dots, v_n)$, $Q = (u_0, \dots, u_m)$: passeios: $v_n = u_0$

concatenação de P com Q

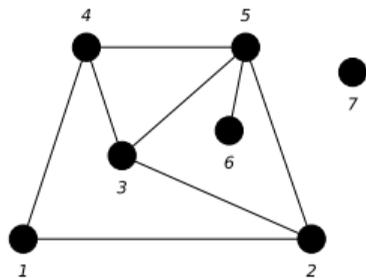
Concatenação de Passeios



$P = (v_0, \dots, v_n)$, $Q = (u_0, \dots, u_m)$: passeios: $v_n = u_0$

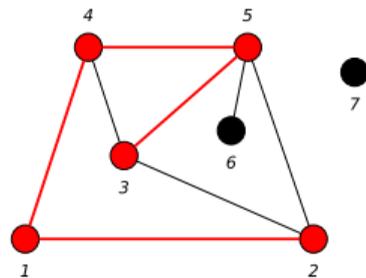
concatenação de P com Q : $PQ := (v_0, \dots, v_n = u_0, u_1, \dots, u_m)$

Segmentos de passeios



P : passeio

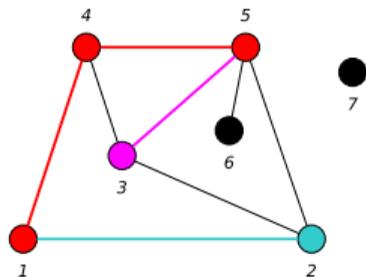
Segmentos de passeios



P : passeio

S é **segmento** de P

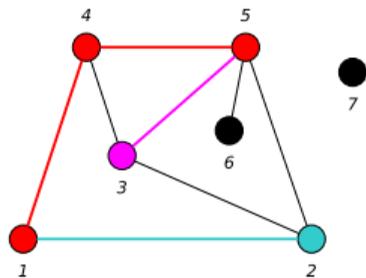
Segmentos de passeios



P : passeio

S é **segmento** de P : P é concatenação de S com outros passeios

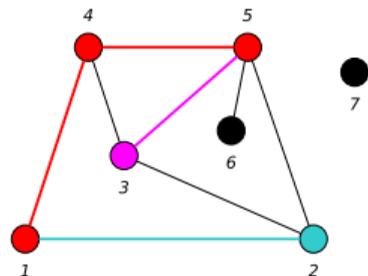
Segmentos de passeios



P : passeio

S é **segmento** de P : P é concatenação de S com outros passeios:

Segmentos de passeios

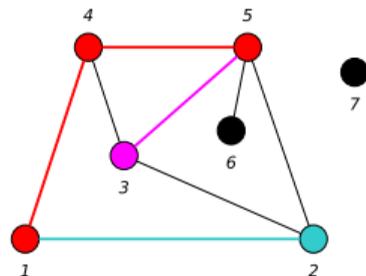


P : passeio

S é **segmento** de P : P é concatenação de S com outros passeios:

existem passeios I e F tais que $P = ISF$

Segmentos de passeios



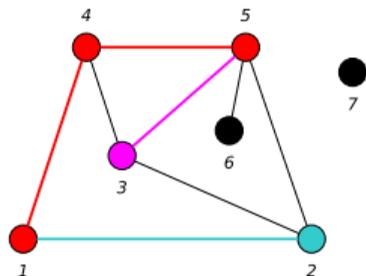
P : passeio

S é **segmento** de P : P é concatenação de S com outros passeios:

existem passeios I e F tais que $P = ISF$

I e/ou F podem ser triviais

Segmentos de passeios



P : passeio

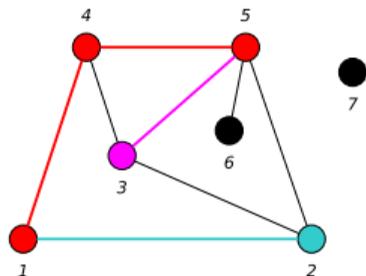
S é **segmento** de P : P é concatenação de S com outros passeios:

existem passeios I e F tais que $P = ISF$

I e/ou F podem ser triviais

S é **segmento próprio** de P

Segmentos de passeios



P : passeio

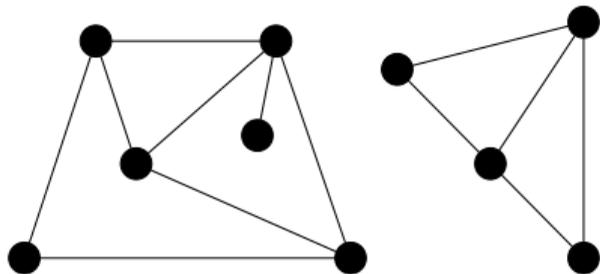
S é **segmento** de P : P é concatenação de S com outros passeios:

existem passeios I e F tais que $P = ISF$

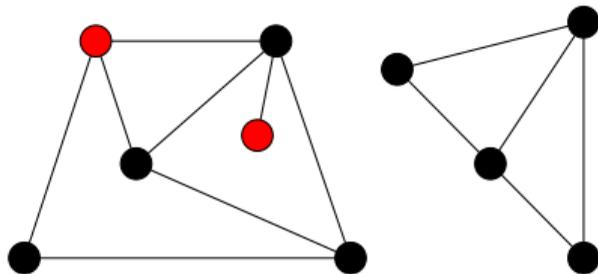
I e/ou F podem ser triviais

S é **segmento próprio** de P : S é segmento de P e $S \neq P$

Conexidade

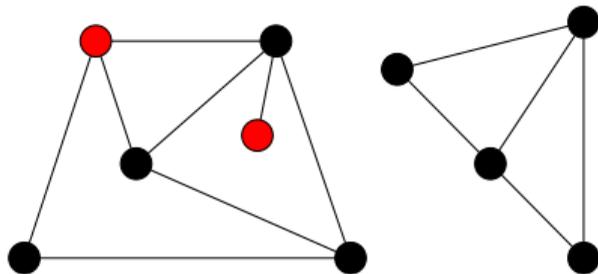


Conexidade



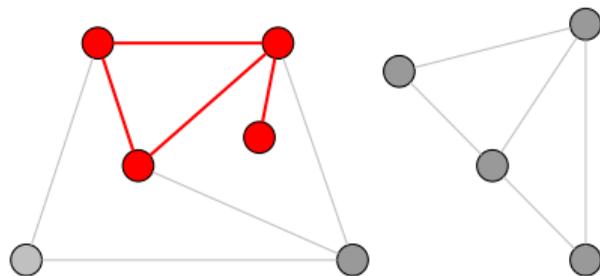
v é **alcançável** a partir de u

Conexidade



v é **alcançável** a partir de u : existe passeio de u a v

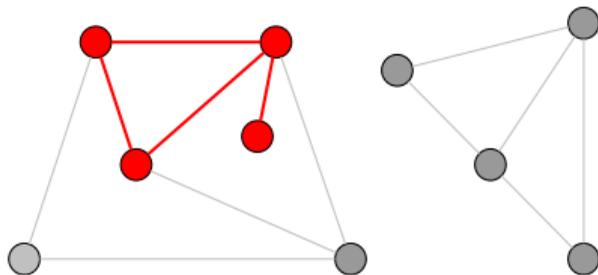
Conexidade



v é **alcançável** a partir de u : existe passeio de u a v

G é **conexo**

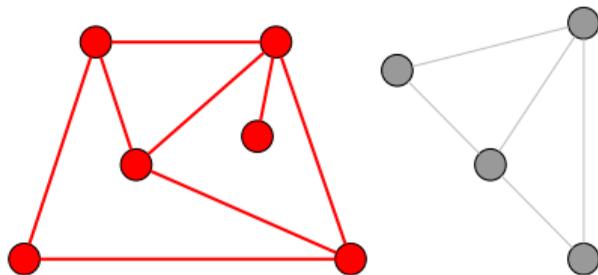
Conexidade



v é **alcançável** a partir de u : existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

Conexidade

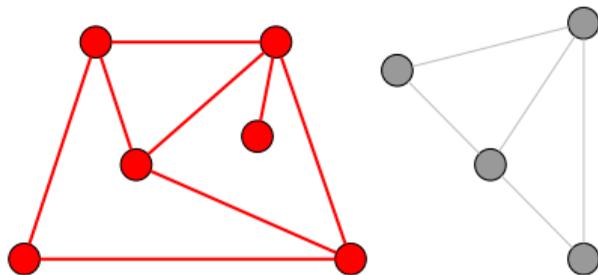


v é **alcançável** a partir de u : existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

componente de G

Conexidade

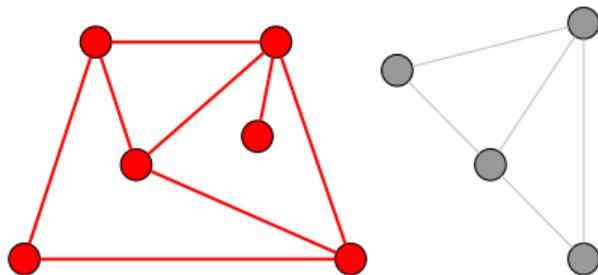


v é **alcançável** a partir de u : existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

componente de G : subgrafo conexo maximal de G

Conexidade



v é **alcançável** a partir de u : existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

componente de G : subgrafo conexo maximal de G

$\mathcal{C}(G)$: conjunto dos componentes de G

Teorema 16

Teorema 16

G é bipartido
se e somente se
não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Teorema 16

G é bipartido
se e somente se
não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Demonstração.

Exercício 48



Exercício 48

provar que

G é bipartido

se e somente se

não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Exercício 48

provar que

G é bipartido

se e somente se

não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

duas partes

Exercício 48

provar que

G é bipartido

se e somente se

não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

duas partes:

\Rightarrow) se G é bipartido, então não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Exercício 48

provar que

G é bipartido

se e somente se

não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

duas partes:

\Rightarrow) se G é bipartido, então não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

\Leftarrow) se G não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas, então G é bipartido

Exercício 48, \Rightarrow

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$$p = |P|$$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$$p = |P|$$

$$q = |Q|$$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$$p = |P|$$

$$q = |Q|$$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$$p = |P|$$

$$q = |Q|$$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$$p = |P|$$

$$q = |Q|$$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$

(L. 8)

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u \in X$

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u \in X$
8. $p + q$ é par

Exercício 48, \Rightarrow

G : grafo bipartido

P e Q : passeios de u a v

$p = |P|$

$q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u \in X$
8. $p + q$ é par
9. p e q paridades iguais

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

1. G é conexo

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)

Exercício 48, ⇐

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)
3. $x :=$ vértice de G

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)
3. $x :=$ vértice de G
4. $X :=$ vértices de G a distância par de x

Exercício 48, \Leftarrow

G : grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido \equiv existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 8)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)
3. $x :=$ vértice de G
4. $X :=$ vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e
 $d(x, v) = |P_u| - 1$)

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
 $(d(x, u) = |P_u| \text{ e } d(x, v) = |P_u| - 1)$

 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
 $(d(x, u) = |P_u| \text{ e } d(x, v) = |P_u| - 1)$
 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

- P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
- $\{u, v\} \in E(P_u)$
- $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e
 $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - $\{u, v\} \in \partial(X)$

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

- P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
- $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - $\{u, v\} \in \partial(X)$
- $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

- P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
- $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - $\{u, v\} \in \partial(X)$
- $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$
3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
 - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$
3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
 - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e
 $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$
3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
 - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
 - 3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e
 $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$
3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
 - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
 - 3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes ($|P_u| = d(x, u) \dots$)

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e
 $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$
3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
 - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
 - 3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes ($|P_u| = d(x, u) \dots$)
 - 3.4 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa

Exercício 48, \Leftarrow (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v
2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
 - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
($d(x, u) = |P_u|$ e
 $d(x, v) = |P_u| - 1$)
 - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$
3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
 - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
 - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
 - 3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes ($|P_u| = d(x, u) \dots$)
 - 3.4 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice-versa
 - 3.5 $\{u, v\} \in \partial(X)$