Algoritmos e Teoria dos Grafos

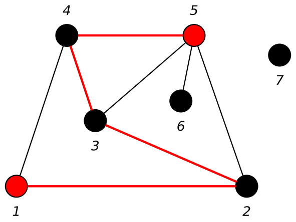
Tópico 13: Caminhos

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

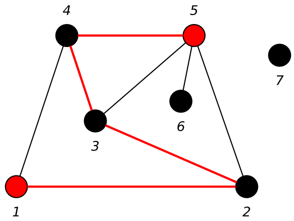
Departamento de Informática da UFPR

2023

Definição

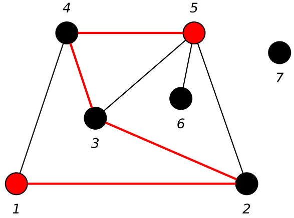


Definição



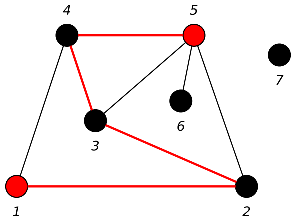
caminho

Definição



caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

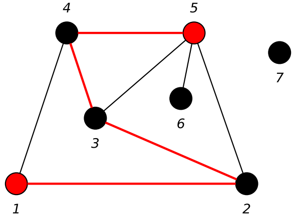
Definição



caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho

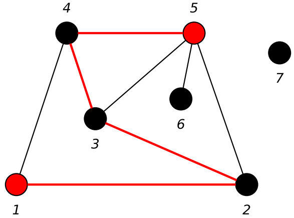
Definição



caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

Definição

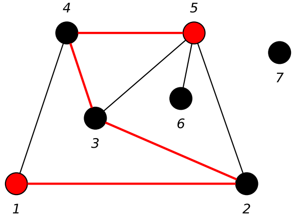


caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

P_n

Definição

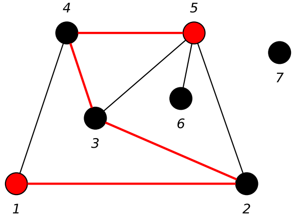


caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

P_n: grafo induzido por um caminho de n vértices

Definição



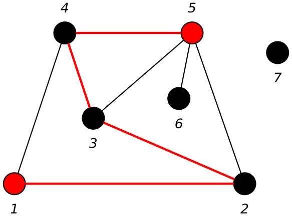
caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

P_n: grafo induzido por um caminho de n vértices

uPv

Definição



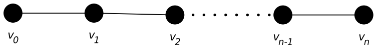
caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

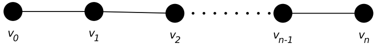
P_n: grafo induzido por um caminho de n vértices

uPv: caminho de u a v que é segmento de P

Teorema 19

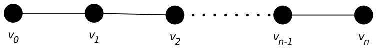


Teorema 19



P: caminho maximal em G

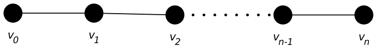
Teorema 19



P: caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Teorema 19

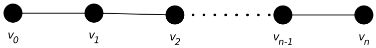


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$

Teorema 19

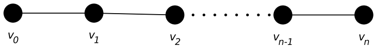


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal

Teorema 19

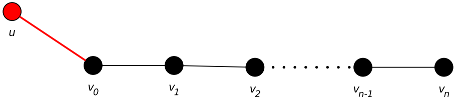


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal
2. u

Teorema 19

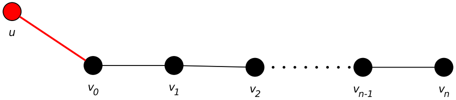


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal
2. u: vizinho de v_0 fora de P

Teorema 19

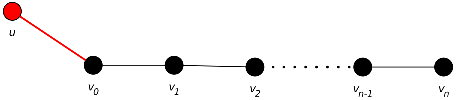


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u: vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$

Teorema 19

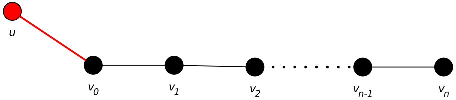


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal
2. u: vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho em G

Teorema 19

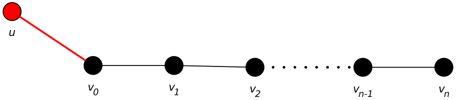


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal
2. u: vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q

Teorema 19

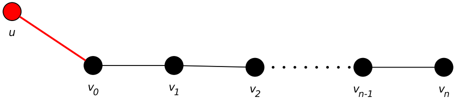


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal
2. u: vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q
5. contradiz P ser maximal

Teorema 19

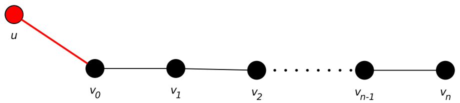


P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal
2. u: vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q
5. contradiz P ser maximal
6. v_n não pode ter vizinhos fora de P

Teorema 19



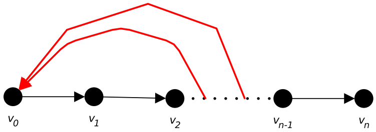
P: caminho maximal em G
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

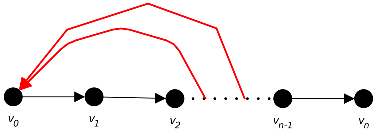
1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u: vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q
5. contradiz P ser maximal
6. v_n não pode ter vizinhos fora de P: mesmo raciocínio

$\square$

Teorema 20

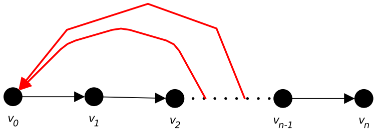


Teorema 20



“versão” do Teorema 19 para grafos direcionados

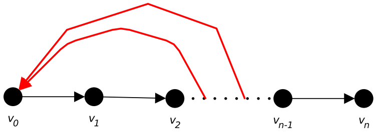
Teorema 20



"versão" do Teorema 19 para grafos direcionados

P

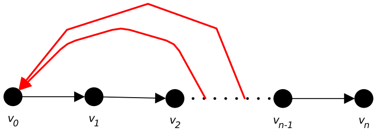
Teorema 20



"versão" do Teorema 19 para grafos direcionados

P: caminho direcionado maximal

Teorema 20

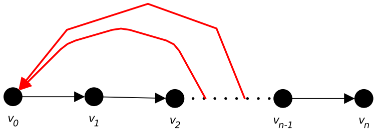


"versão" do Teorema 19 para grafos direcionados

P: caminho direcionado maximal

- todos os vizinhos de entrada do vértice inicial estão em P

Teorema 20

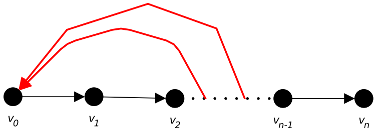


"versão" do Teorema 19 para grafos direcionados

P: caminho direcionado maximal

- todos os vizinhos de entrada do vértice inicial estão em P
- todos os vizinhos de saída do vértice final estão em P

Teorema 20



"versão" do Teorema 19 para grafos direcionados

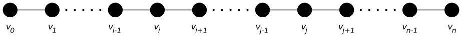
P: caminho direcionado maximal

- todos os vizinhos de entrada do vértice inicial estão em P
- todos os vizinhos de saída do vértice final estão em P

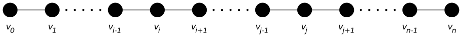
Demonstração.

Exercício 54 $\square$

Teorema 21

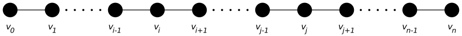


Teorema 21



Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Teorema 21

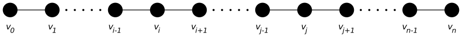


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$

Teorema 21

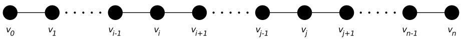


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n

Teorema 21

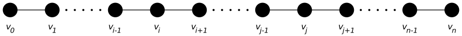


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho

Teorema 21

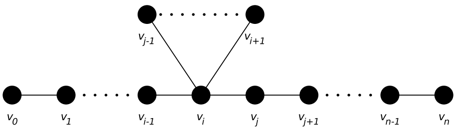


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P

Teorema 21

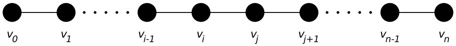


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$

Teorema 21

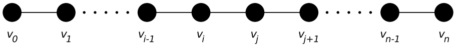


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$

Teorema 21

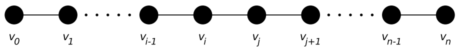


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n

Teorema 21

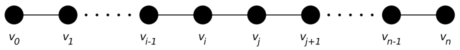


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n de tamanho $|Q|$

Teorema 21

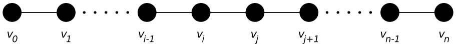


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n
   de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1)$

Teorema 21

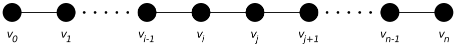


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1) < |P|$

Teorema 21

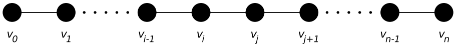


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n
   de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1) < |P|$ $\qquad (i < j)$

Teorema 21



Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho $\implies$ vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n
   de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1) < |P|$ $\qquad (i < j)$
5. contradiz o fato de P ser passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n

$\square$

Teorema 22

Teorema 22

Todo passeio direcionado de tamanho mínimo é caminho direcionado

Teorema 22

Todo passeio direcionado de tamanho mínimo é caminho direcionado

Demonstração.

Exercício 56 □

Caminhos Mínimos

Caminhos Mínimos

caminho mínimo em G

Caminhos Mínimos

caminho mínimo em G: caminho (direcionado) de tamanho mínimo entre suas pontas em G

Caminhos Mínimos

caminho mínimo em G: caminho (direcionado) de tamanho mínimo entre suas pontas em G

caminho mínimo em grafo ponderado

Caminhos Mínimos

caminho mínimo em G: caminho (direcionado) de tamanho mínimo entre suas pontas em G

caminho mínimo em grafo ponderado: caminho de peso mínimo no grafo

Teorema 23

Teorema 23

Todo segmento de caminho mínimo é caminho mínimo

Teorema 23

Todo segmento de caminho mínimo é caminho mínimo

Demonstração.

Exercício 51 $\square$

Teorema **??**

Teorema ??

Todo segmento de caminho mínimo em um grafo direcionado é caminho mínimo

Teorema ??

Todo segmento de caminho mínimo em um grafo direcionado é caminho mínimo

Demonstração.

Exercício 19 □