Algoritmos e Teoria dos Grafos

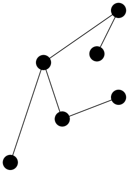
Tópico 15: Árvores

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

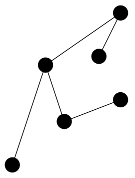
Departamento de Informática da UFPR

2023

Definição

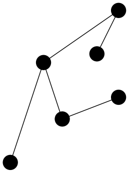


Definição



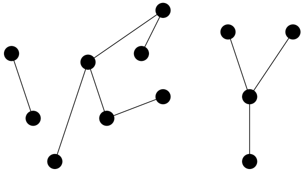
árvore

Definição



árvore: grafo acíclico conexo

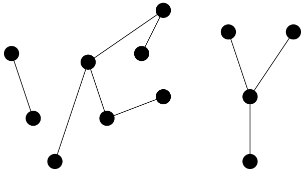
Definição



árvore: grafo acíclico conexo

floresta

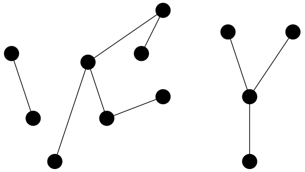
Definição



árvore: grafo acíclico conexo

floresta: grafo onde cada componente é árvore

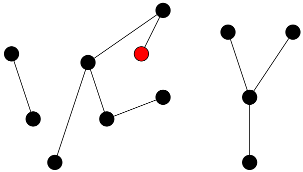
Definição



árvore: grafo acíclico conexo

floresta: grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

Definição

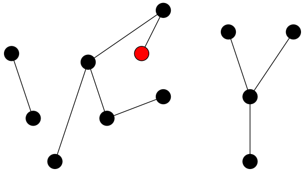


árvore: grafo acíclico conexo

floresta: grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

folha

Definição

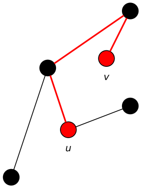


árvore: grafo acíclico conexo

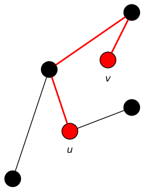
floresta: grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

folha: vértice de grau 1 em uma floresta

Corolário 41

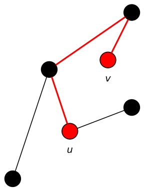


Corolário 41



Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

Corolário 41

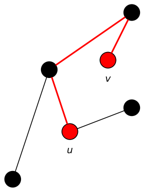


Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

Demonstração.

Imediato a partir do T. 25 □

Corolário 41



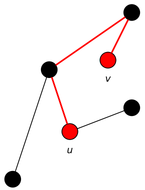
Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

Demonstração.

Imediato a partir do T. 25 □

uTv

Corolário 41



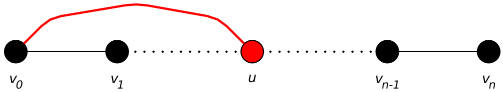
Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

Demonstração.

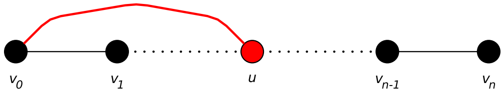
Imediato a partir do T. 25 $\square$

uTv: caminho de u a v na árvore T

Teorema 42



Teorema 42

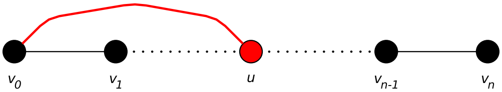


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T

Teorema 42

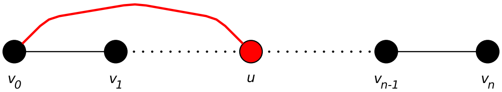


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial

Teorema 42

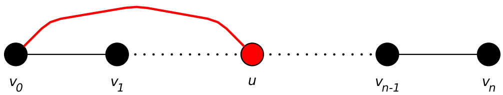


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$

Teorema 42

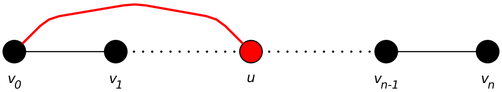


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T

Teorema 42

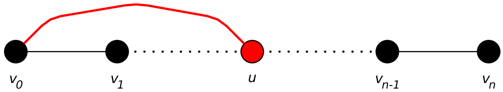


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha

Teorema 42

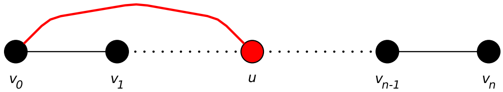


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
    3.1 u

Teorema 42

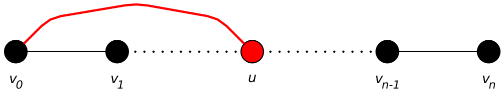


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
    3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1

Teorema 42

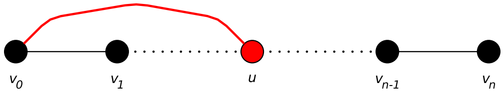


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
   3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1
   3.2 u tem que estar em P

Teorema 42

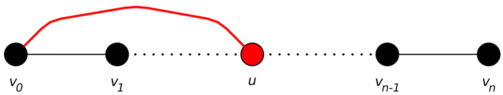


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
   - 3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1
   - 3.2 u tem que estar em P (L. 19)

Teorema 42

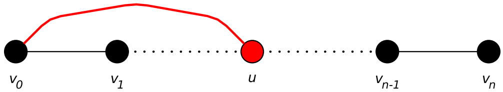


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
    3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1
    3.2 u tem que estar em P (L. 19)
    3.3 T tem ciclo

Teorema 42

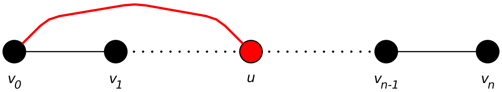


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
   - 3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1
   - 3.2 u tem que estar em P (L. 19)
   - 3.3 T tem ciclo (T. 25)

Teorema 42

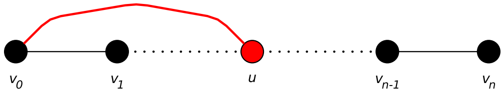


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
   3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1
   3.2 u tem que estar em P (L. 19)
   3.3 T tem ciclo (T. 25)
   3.4 contradiz T ser árvore

Teorema 42

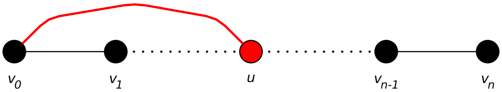


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
   3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1
   3.2 u tem que estar em P (L. 19)
   3.3 T tem ciclo (T. 25)
   3.4 contradiz T ser árvore
4. v_n é folha

Teorema 42



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T: árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
   3.1 u: vizinho de v_0 em T distinto de v_1
   3.2 u tem que estar em P (L. 19)
   3.3 T tem ciclo (T. 25)
   3.4 contradiz T ser árvore
4. v_n é folha (mesmo argumento)

□

Teorema 43

Teorema 43

Toda árvore de n vértices tem $n-1$ arestas

Teorema 43

Toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas

indução em n

Base: $n = 1$

Teorema 43

Toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas

indução em n

Base: $n = 1$ (G é trivial)

Teorema 43

Toda árvore de n vértices tem $n-1$ arestas

indução em n

Base: $n = 1$ (G é trivial)

tem $0 = n - 1$ arestas

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a-1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a+1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a+1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G-v$ é conexo (G é conexo e v é folha)

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a-1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a+1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a+1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G-v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G-v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G-v$ é árvore
6. $G-v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G-v$ tem $a-1$ arestas

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G (v é folha)

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G (v é folha)
9. G tem $(a - 1) + 1$

Prova do Teorema 43: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G: árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 42)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G (v é folha)
9. G tem $(a - 1) + 1 = a$ arestas

Teorema 44

Teorema 44

Todo grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas é árvore

Teorema 44

Todo grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas é árvore

Demonstração.

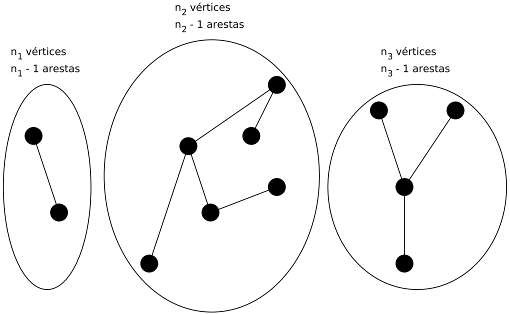
Exercício 76 $\square$

Corolário 45

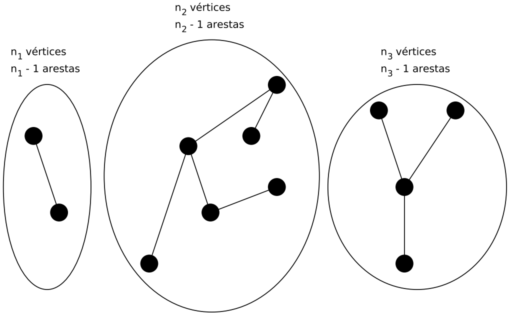
Corolário 45

Um grafo com n vértices é árvore se e somente se é conexo e tem $n - 1$ arestas

Corolário 46



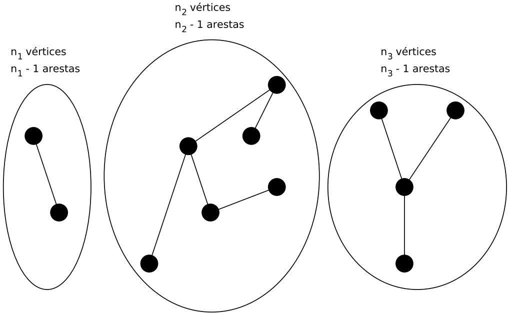
Corolário 46



O grafo G é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|$$

Corolário 46



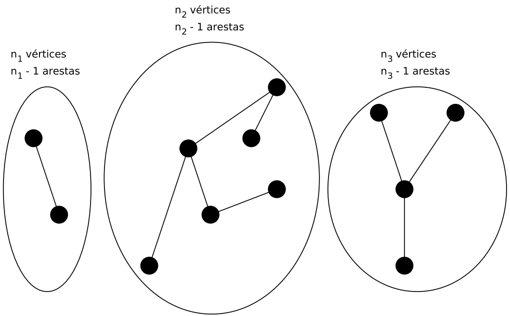
O grafo G é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|$$

Demonstração.

Exercício 77

Corolário 46



O grafo G é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|$$

Demonstração.

Exercício 77 (aplicar Corolário 45 a cada componente do grafo) $\square$

Teorema 47

Teorema 47

T

Teorema 47

T: árvore

Teorema 47

T: árvore; u, v

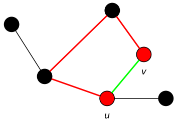
Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T

Teorema 47

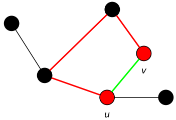
T: árvore; u, v: não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

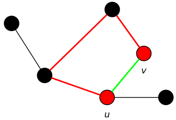


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

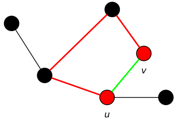


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

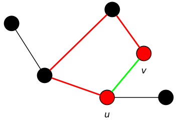


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

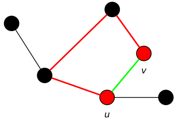


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

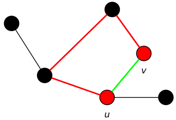


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

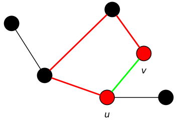


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

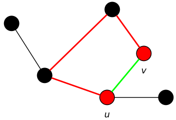


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

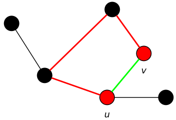


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

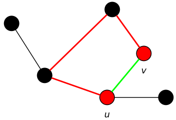


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

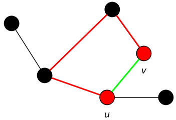


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv
7. T tem ciclo

Teorema 47

T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

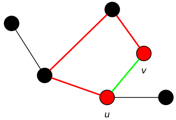


Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv
7. T tem ciclo (T.25)

Teorema 47

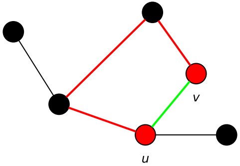
T: árvore; u, v: não vizinhos em T
$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



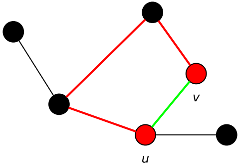
Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C: outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C (senão C seria ciclo em T)
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv
7. T tem ciclo (T.25)
8. contradiz a hipótese de T ser árvore

Ciclo Fundamental

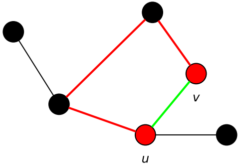


Ciclo Fundamental



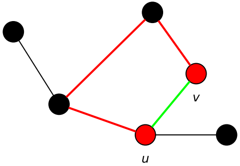
T

Ciclo Fundamental



T: árvore

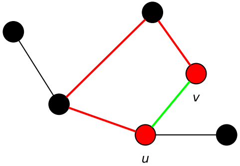
Ciclo Fundamental



T: árvore

u, v

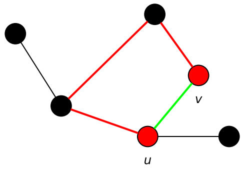
Ciclo Fundamental



T: árvore

u, v: não vizinhos em T

Ciclo Fundamental

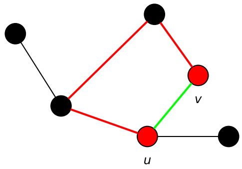


T: árvore

u, v: não vizinhos em T

ciclo fundamental de $\{u, v\}$ **com relação a** T

Ciclo Fundamental

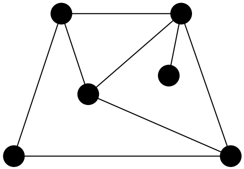


T: árvore

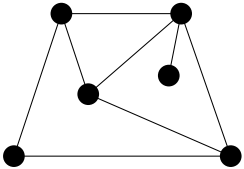
u, v: não vizinhos em T

ciclo fundamental de $\{u, v\}$ **com relação a** T: único ciclo em $T + \{u, v\}$

Árvores e Florestas Geradoras

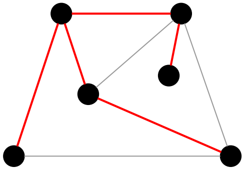


Árvores e Florestas Geradoras



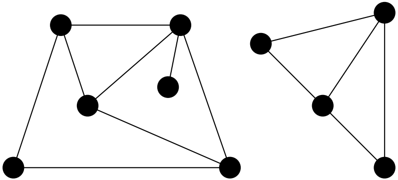
árvore geradora de G

Árvores e Florestas Geradoras



árvore geradora de G: subgrafo gerador de G que é árvore

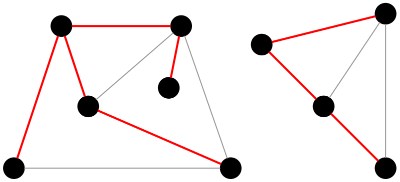
Árvores e Florestas Geradoras



árvore geradora de G: subgrafo gerador de G que é árvore

floresta geradora de G

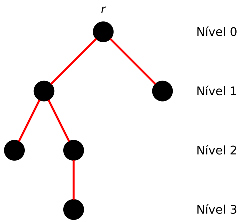
Árvores e Florestas Geradoras



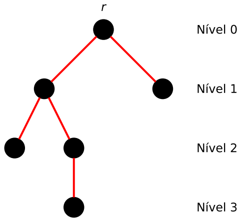
árvore geradora de G: subgrafo gerador de G que é árvore

floresta geradora de G: subgrafo gerador de G que é floresta

Árvore Enraizada

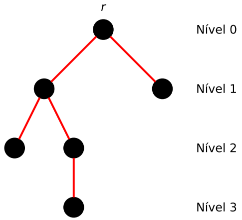


Árvore Enraizada



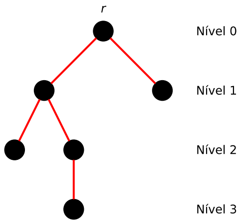
árvore enraizada

Árvore Enraizada



árvore enraizada: par (T, r)

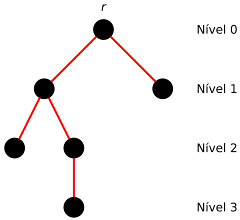
Árvore Enraizada



árvore enraizada: par (T, r)

T

Árvore Enraizada

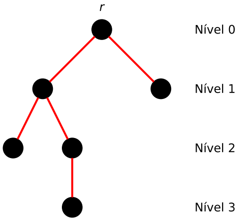


árvore enraizada: par (T, r)

T: árvore

r

Árvore Enraizada

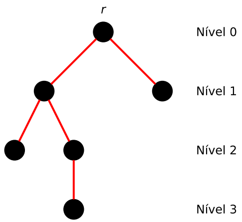


árvore enraizada: par (T, r)

T: árvore

r: vértice de T

Árvore Enraizada

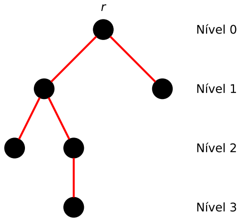


árvore enraizada: par (T, r)

T: árvore

r: vértice de T: **raíz**

Árvore Enraizada



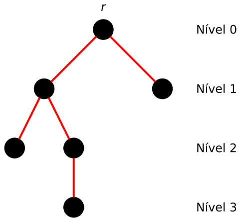
árvore enraizada: par (T, r)

T: árvore

r: vértice de T: **raíz**

nível de v **em** (T, r)

Árvore Enraizada



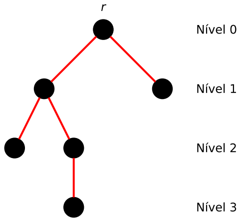
árvore enraizada: par (T, r)

T: árvore

r: vértice de T: **raíz**

nível de v **em** (T, r): distância de v a r em T

Árvore Enraizada



árvore enraizada: par (T, r)

T: árvore

r: vértice de T: **raíz**

nível de v **em** (T, r): distância de v a r em T

$L_{T,r}(v) := d_T(r, v)$