

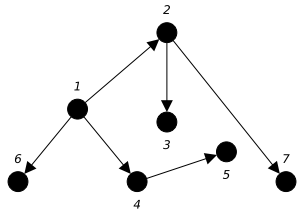
Algoritmos e Teoria dos Grafos

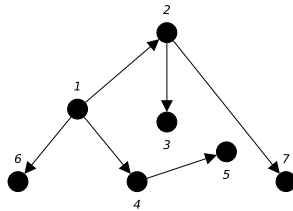
Tópico 16: Arborescências

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

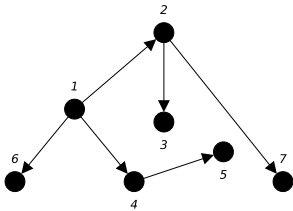
Departamento de Informática da UFPR

2023

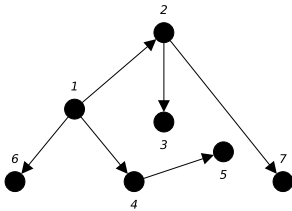




arborescência

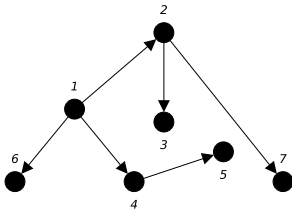


arborescência: grafo direcionado T



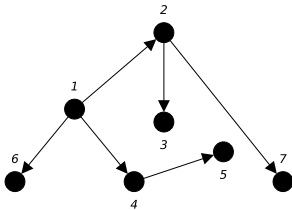
arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo



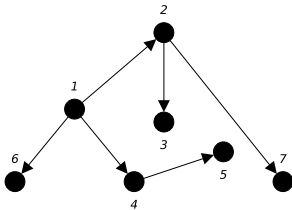
arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte



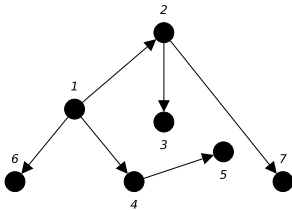
arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte: **raiz**



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte: **raiz:** $r(T)$



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte: **raiz:** $r(T)$
- grau de entrada 1 nos demais vértices

Teorema 48

Teorema 48

O grafo subjacente de uma árvore é uma árvore.

Teorema 48

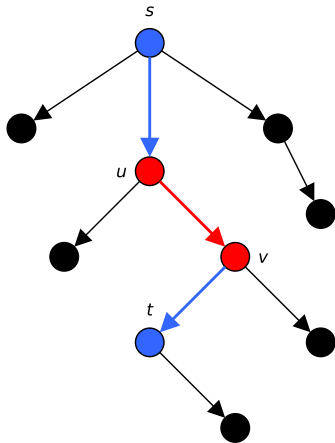
O grafo subjacente de uma árvore é uma árvore.

Demonstração.

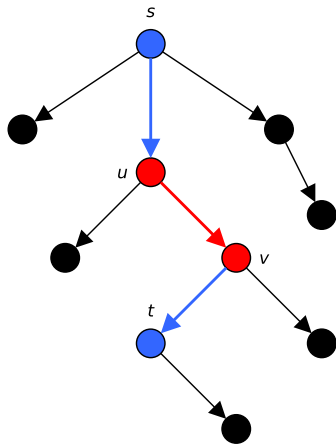
Exercício 83



pais, filhos, ancestrais e descendentes

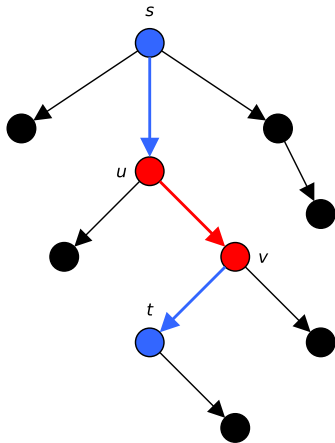


pais, filhos, ancestrais e descendentes



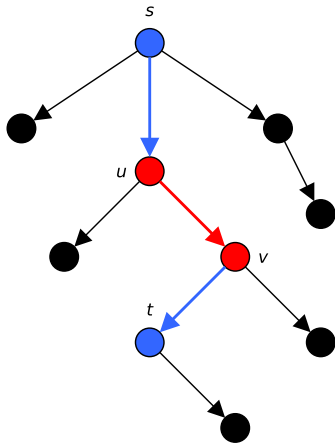
T

pais, filhos, ancestrais e descendentes



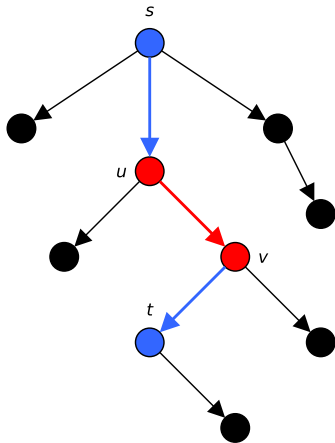
T : arborescência

pais, filhos, ancestrais e descendentes



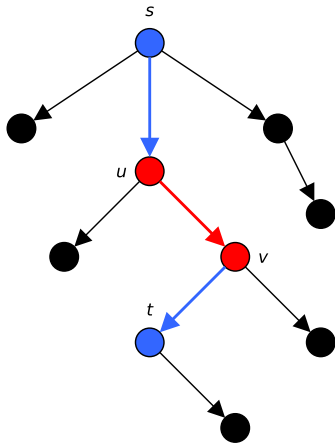
T : arborescência
 (u, v)

pais, filhos, ancestrais e descendentes



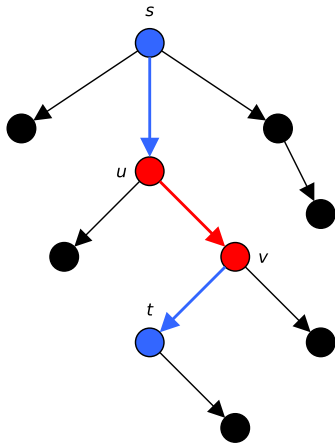
T : arborescência
 (u, v) : arco em T

pais, filhos, ancestrais e descendentes



T : arborescência
 (u, v) : arco em T
 $(s, \dots, t)$

pais, filhos, ancestrais e descendentes

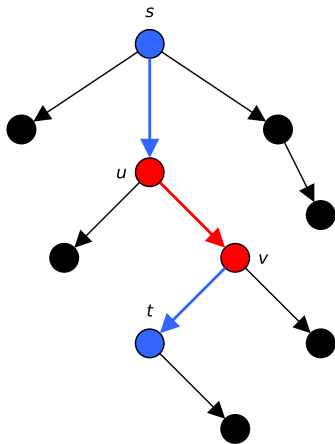


T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

pais, filhos, ancestrais e descendentes



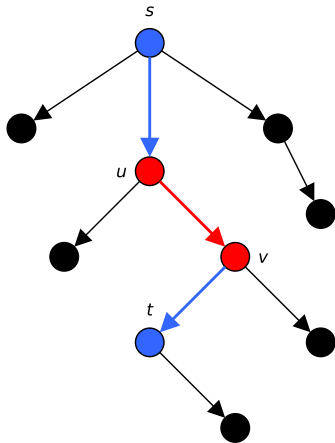
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

• u é **pai** de v

pais, filhos, ancestrais e descendentes



T : arborescência

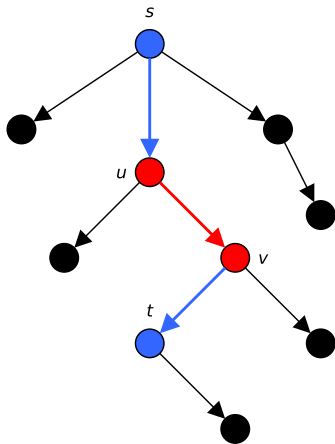
(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

• u é **pai** de v

• v é **filho** de u

pais, filhos, ancestrais e descendentes



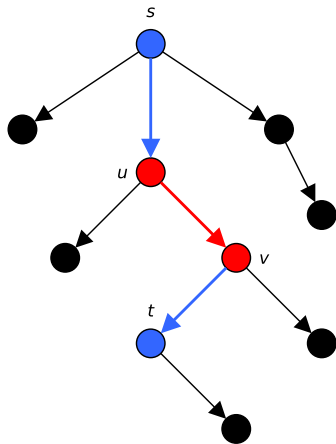
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t

pais, filhos, ancestrais e descendentes



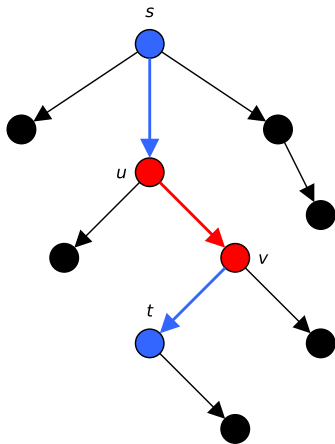
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$

pais, filhos, ancestrais e descendentes



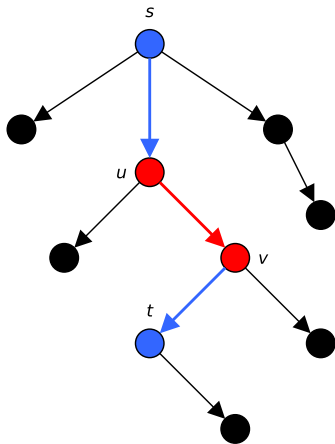
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s

pais, filhos, ancestrais e descendentes



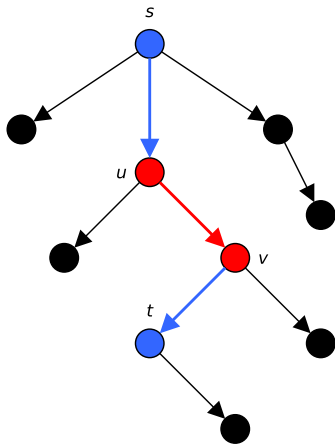
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t

pais, filhos, ancestrais e descendentes



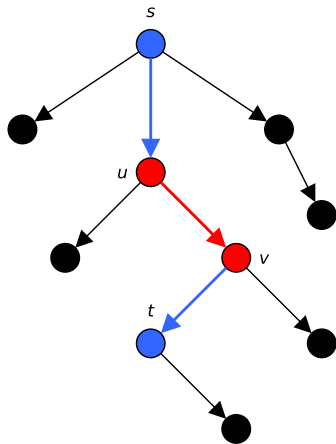
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$

pais, filhos, ancestrais e descendentes



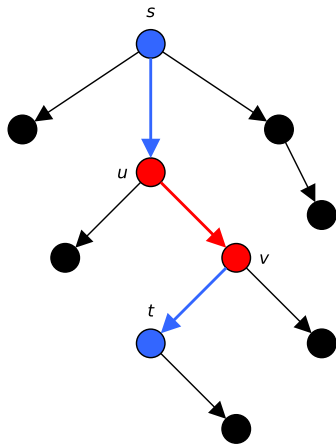
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$

pais, filhos, ancestrais e descendentes



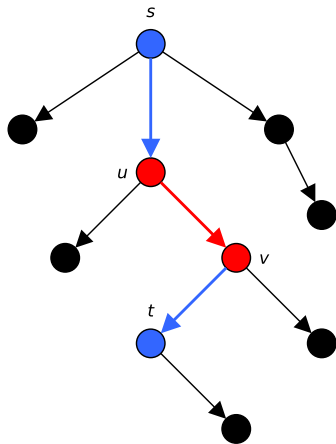
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$
- t **descendente próprio** de s

pais, filhos, ancestrais e descendentes



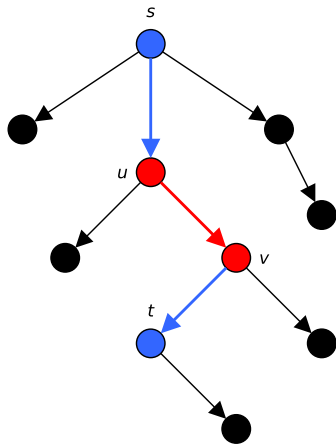
T : arborescência

(u, v) : arco em T

$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$
- t **descendente próprio** de s
- **folha**

pais, filhos, ancestrais e descendentes



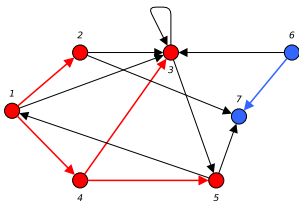
T : arborescência

(u, v) : arco em T

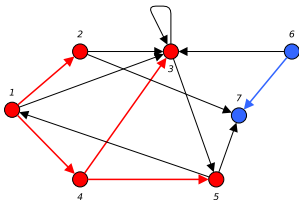
$(s, \dots, t)$: caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$
- t **descendente próprio** de s
- **folha**: vértice sem filhos

Floresta Direcionada

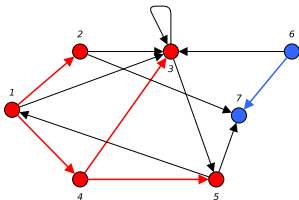


Floresta Direcionada



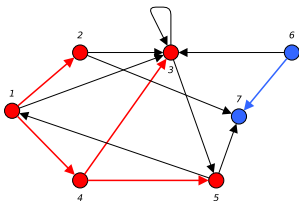
floresta direcionada

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

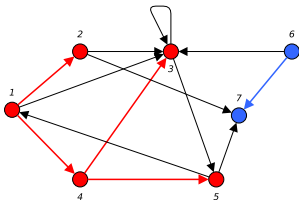
Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T

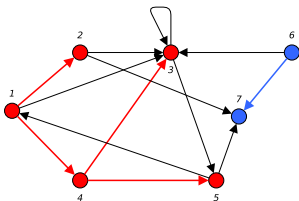
Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

Floresta Direcionada

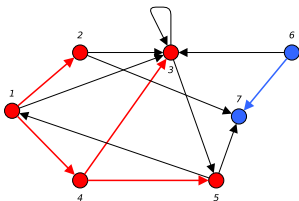


floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

(u, v)

Floresta Direcionada

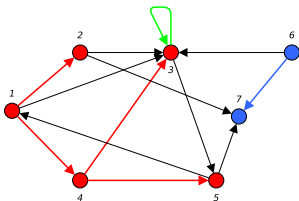


floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

(u, v) : arco fora de T

Floresta Direcionada



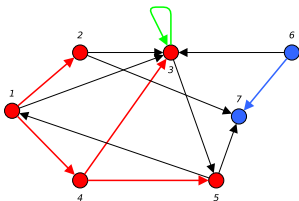
floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

(u, v) : arco fora de T

laço

Floresta Direcionada



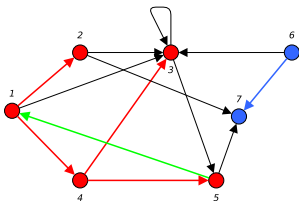
floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

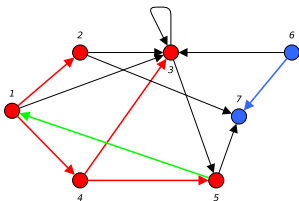
T : floresta direcionada geradora de G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

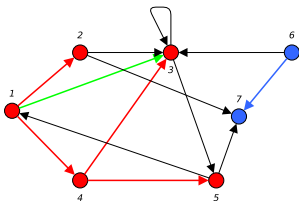
T : floresta direcionada geradora de G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

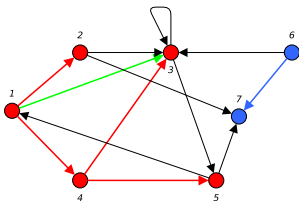
(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

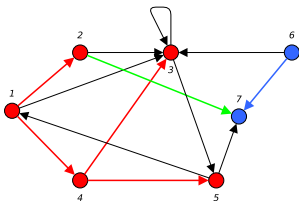
(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço: u é ancestral de v

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

(u, v) : arco fora de T

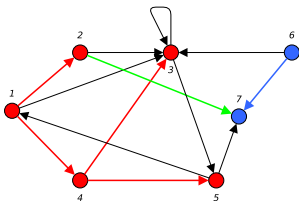
laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço: u é ancestral de v

arco cruzado

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de G

(u, v) : arco fora de T

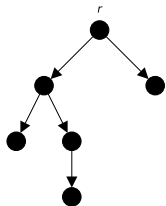
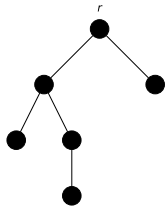
laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

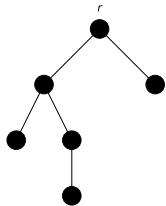
arco de avanço: u é ancestral de v

arco cruzado: $u \not\prec_T v$

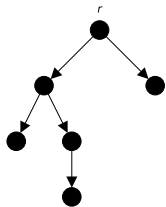
Relação com Árvores Enraizadas



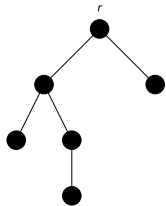
Relação com Árvores Enraizadas



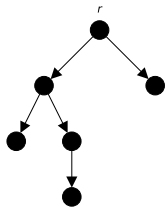
(T, r)



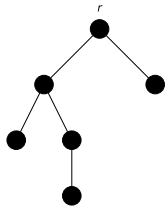
Relação com Árvores Enraizadas



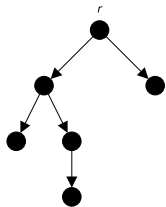
(T, r) : árvore enraizada



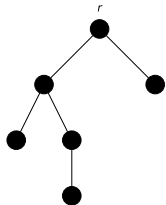
Relação com Árvore Enraizadas



(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

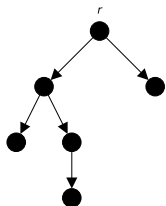


Relação com Árvore Enraizadas

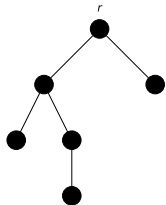


(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

• arborescência

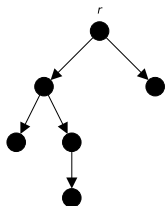


Relação com Árvore Enraizadas

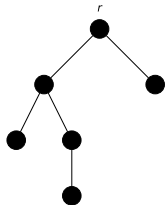


(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T

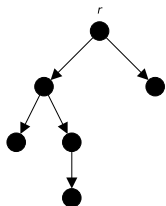


Relação com Árvore Enraizada

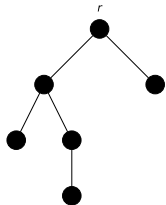


(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r

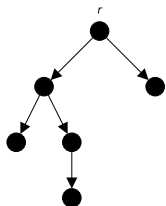


Relação com Árvore Enraizadas



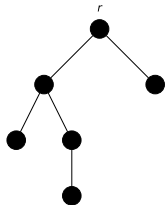
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



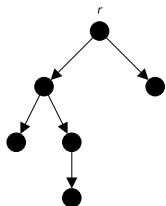
T

Relação com Árvore Enraizadas



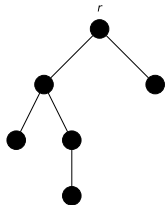
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



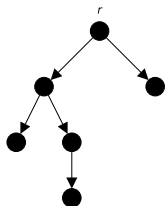
T : arborescência

Relação com Árvore Enraizadas



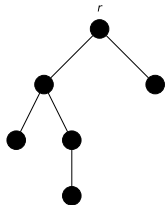
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



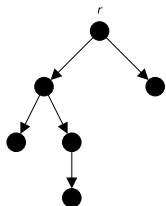
T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T

Relação com Árvore Enraizadas



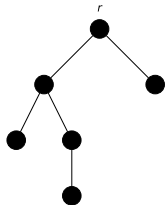
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



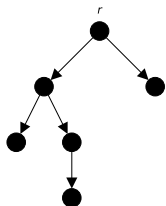
T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T : $(S(T), r(T))$

Relação com Árvores Enraizadas



(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

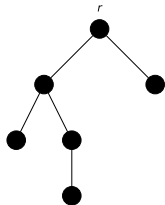
- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T : $(S(T), r(T))$

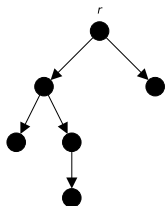
abuso

Relação com Árvore Enraizadas



(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



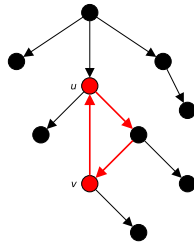
T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T : $(S(T), r(T))$

abuso: mesmas terminologia e notação para ambos

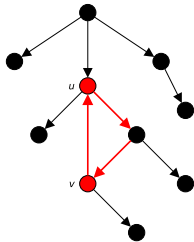
Corolário 49

Se T é uma arborescência e u é ancestral de v em T diferente do pai de v , então $T + (v, u)$ tem um único ciclo direcionado.

Ciclo Fundamental

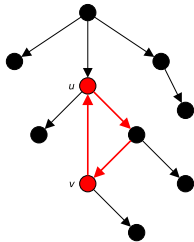


Ciclo Fundamental



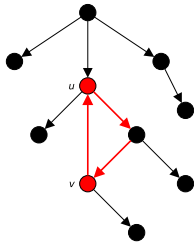
T

Ciclo Fundamental



T : arborescência

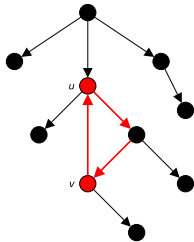
Ciclo Fundamental



T : arborescência

u ancestral de v

Ciclo Fundamental

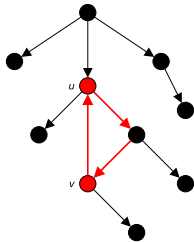


T : arborescência

u ancestral de v

ciclo fundamental de (u, v) com relação a T

Ciclo Fundamental



T : arborescência

u ancestral de v

ciclo fundamental de (u, v) com relação a T : único ciclo em $T + (v, u)$