Algoritmos e Teoria dos Grafos

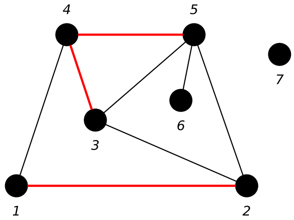
Tópico 17: Conectividade por Arestas

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

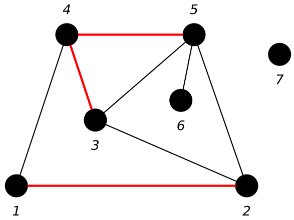
Departamento de Informática da UFPR

2023

Corte de Arestas

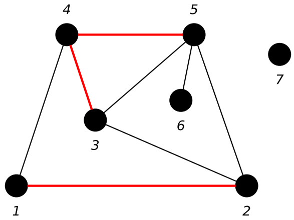


Corte de Arestas



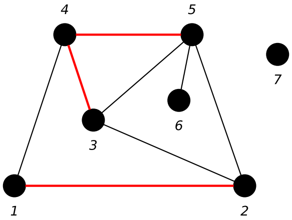
corte

Corte de Arestas



corte: conjunto de arestas K

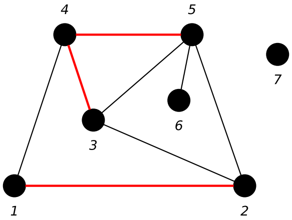
Corte de Arestas



corte: conjunto de arestas K

- remoção desconecta grafo

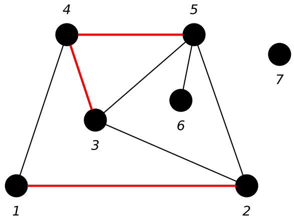
Corte de Arestas



corte: conjunto de arestas K

- remoção desconecta grafo
- remoção aumenta número de componentes

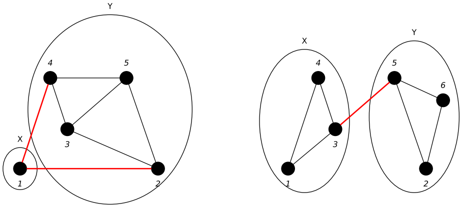
Corte de Arestas



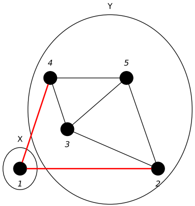
corte: conjunto de arestas K

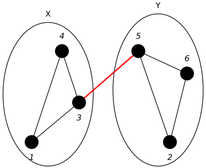
- remoção desconecta grafo
- remoção aumenta número de componentes
- $|\mathcal{C}(G - K)| > |\mathcal{C}(G)|$

Conexidade por Arestas



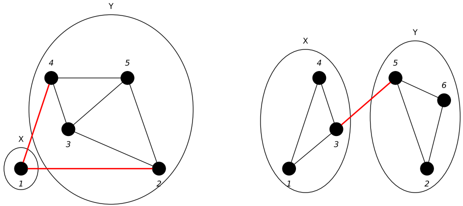
Conexidade por Arestas





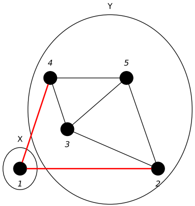
G

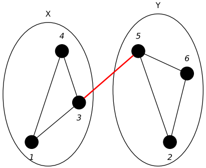
Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

Conexidade por Arestas

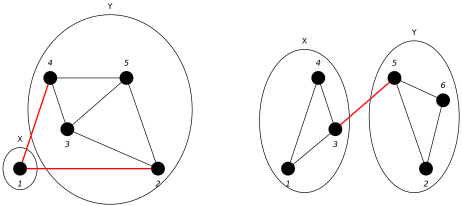




G: grafo conexo

a

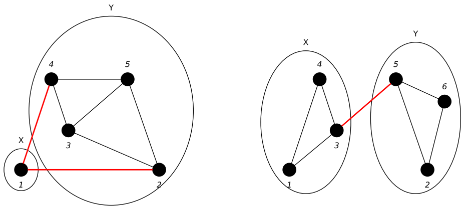
Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

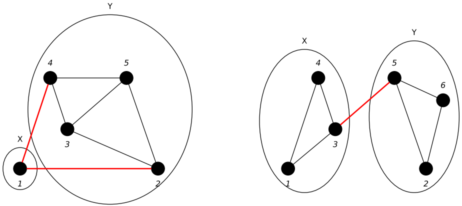
a: aresta em G

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo
a: aresta em G
X, Y

Conexidade por Arestas

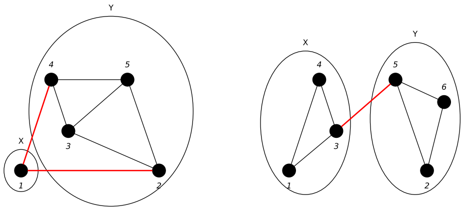


G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

Conexidade por Arestas



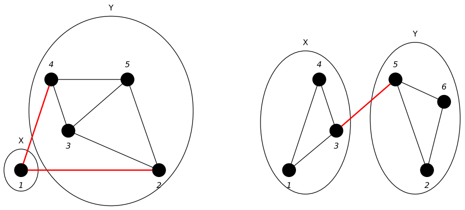
G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

G **é** k**–aresta conexo**

Conexidade por Arestas



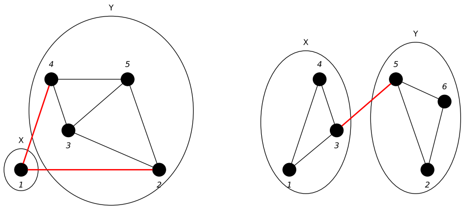
G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

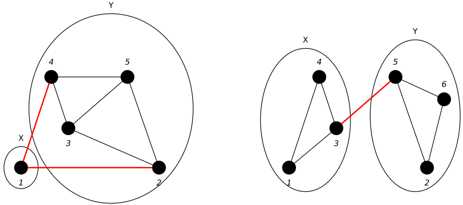
a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

aresta–conexidade de G

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

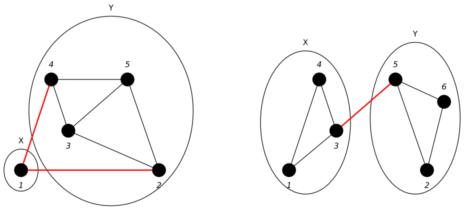
a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

aresta–conexidade de G: tamanho do menor corte de arestas de G

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

a: aresta em G

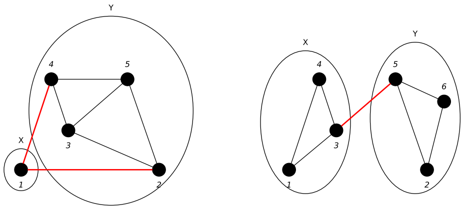
X, Y: conjuntos de vértices

G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

aresta–conexidade de G: tamanho do menor corte de arestas de G

$\lambda(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

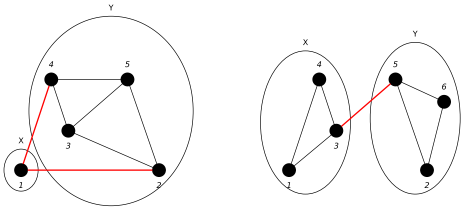
G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

aresta–conexidade de G: tamanho do menor corte de arestas de G

$\lambda(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

a **é aresta de corte**

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

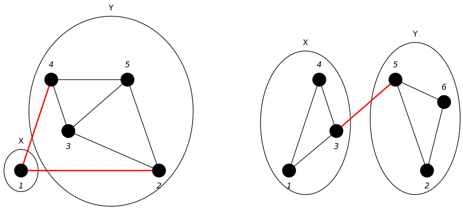
G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

aresta–conexidade de G: tamanho do menor corte de arestas de G

$\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

a **é aresta de corte**: $\{a\}$ é corte

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

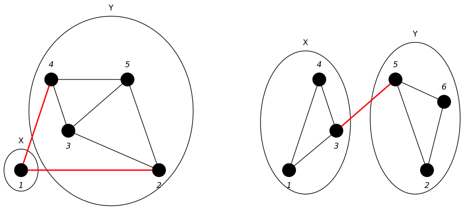
G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

aresta–conexidade de G: tamanho do menor corte de arestas de G

$\lambda(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

a **é aresta de corte**: $\{a\}$ é corte: **ponte**

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

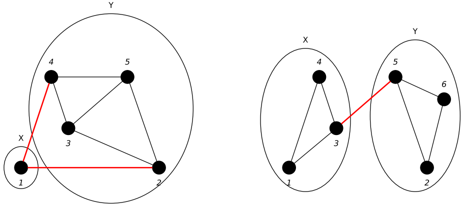
aresta–conexidade de G: tamanho do menor corte de arestas de G

$\lambda(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

a **é aresta de corte**: $\{a\}$ é corte: **ponte**

corte K **separa** X **e** Y

Conexidade por Arestas



G: grafo conexo

a: aresta em G

X, Y: conjuntos de vértices

G **é** k**–aresta conexo**: não tem corte de arestas de tamanho $< k$

aresta–conexidade de G: tamanho do menor corte de arestas de G

$\lambda(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G$ tem corte de arestas de tamanho $k\}$

a **é aresta de corte**: $\{a\}$ é corte: **ponte**

corte K **separa** X **e** Y: X e Y estão em componentes diferentes de $G - K$

Teorema 50

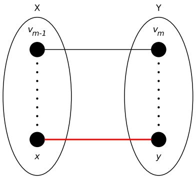
X

Teorema 50

X: conjunto de vértices

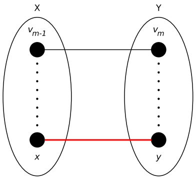
Teorema 50

X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte



Teorema 50

X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

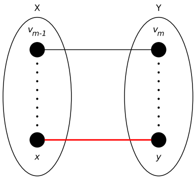


Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$

Teorema 50

X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

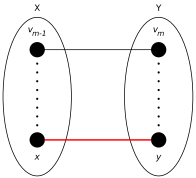


Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$

Teorema 50

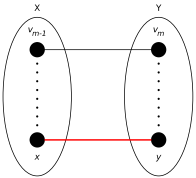
X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$

Teorema 50



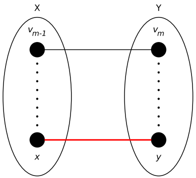
X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$

Teorema 50

X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

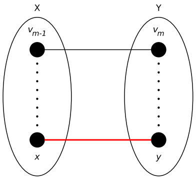


Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte

Teorema 50

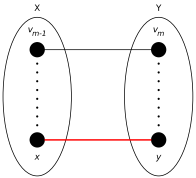
X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$

Teorema 50



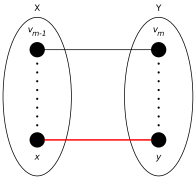
X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
   3.2 $P = (x = v_0, \ldots, v_n = y)$

Teorema 50

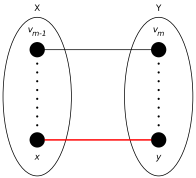
X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
   3.2 $P = (x = v_0, \ldots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$

Teorema 50



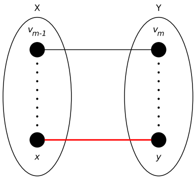
X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
   3.2 $P = (x = v_0, \ldots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
   3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X

Teorema 50

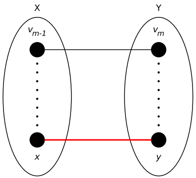
X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
   3.2 $P = (x = v_0, \ldots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
   3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X $\qquad m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$

Teorema 50

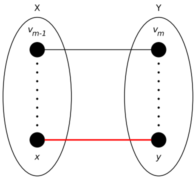


X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
   - 3.2 $P = (x = v_0, \ldots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
   - 3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X $\qquad m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$
   - 3.4 $\{v_{m-1,v_m}\} \in \partial_G(X)$

Teorema 50

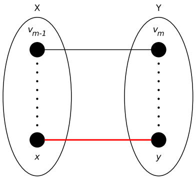


X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
   3.2 $P = (x = v_0, \ldots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
   3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X $\quad m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$
   3.4 $\{v_{m-1,v_m}\} \in \partial_G(X)$ $\quad (v_{m-1} \in X$ e $v_m \notin X)$

Teorema 50



X: conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
   3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
   3.2 $P = (x = v_0, \ldots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
   3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X — $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$
   3.4 $\{v_{m-1,v_m}\} \in \partial_G(X)$ — $(v_{m-1} \in X$ e $v_m \notin X)$
   3.5 contradiz P ser caminho em $G - \partial_G(X)$

$\square$

Corolário 51

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Corolário 51

Demonstração.

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

$(\Rightarrow)$ imediato da definição

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)

1. h

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)

1. h: vértice de H

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)
1. h: vértice de H
2. v

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)
1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)

1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H
3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)
1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H
3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
   3.1 existe caminho de h a v em G

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)

1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H
3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
   3.1 existe caminho de h a v em G
   3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)
1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H
3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
   - 3.1 existe caminho de h a v em G
   - 3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 50)

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)

1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H
3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
   3.1 existe caminho de h a v em G
   3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 50)
4. não existe $v \in V(G) - V(H)$ tal que $G[V(H) \cup \{v\}]$ seja conexo

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)
1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H
3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
   3.1 existe caminho de h a v em G
   3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 50)
4. não existe $v \in V(G) - V(H)$ tal que $G[V(H) \cup \{v\}]$ seja conexo
5. H é um subgrafo maximal conexo de G

Corolário 51

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G, e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)

1. h: vértice de H
2. v: vértice fora de H
3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
   - 3.1 existe caminho de h a v em G
   - 3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 50)
4. não existe $v \in V(G) - V(H)$ tal que $G[V(H) \cup \{v\}]$ seja conexo
5. H é um subgrafo maximal conexo de G
6. H é componente de G

□