Algoritmos e Teoria dos Grafos

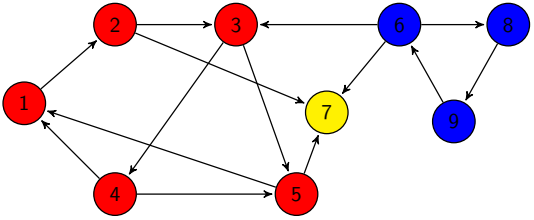
Tópico 19: Componentes Fortes

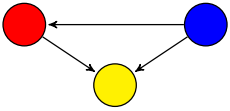
Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva
Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

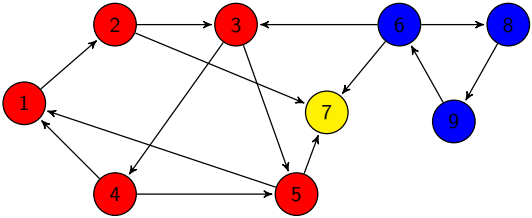
2026 - Segundo Semestre

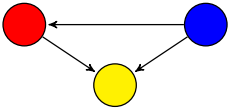
Relembrando: Grafo Condensado





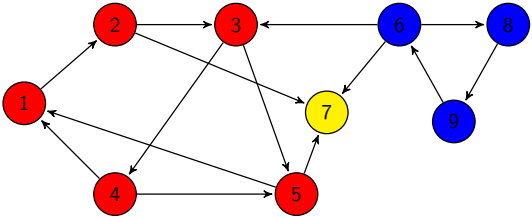
Relembrando: Grafo Condensado

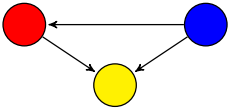




grafo condensado de G

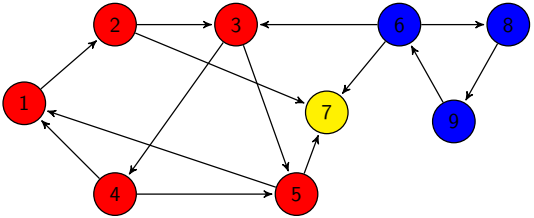
Relembrando: Grafo Condensado

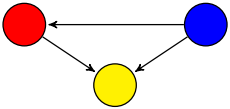




grafo condensado de G: $C(G)$

Relembrando: Grafo Condensado

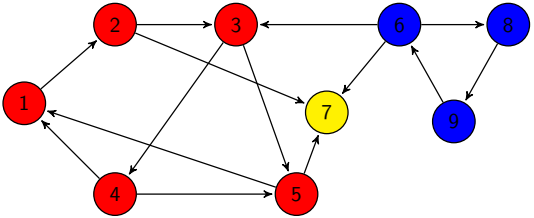


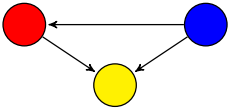


grafo condensado de G: $C(G)$

$V(C(G))$

Relembrando: Grafo Condensado

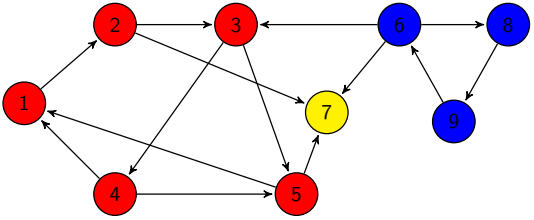


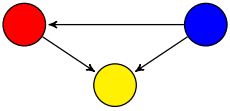


grafo condensado de G: $C(G)$

$V(C(G))$: componentes fortes de G ($\mathcal{C}(G)$)

Relembrando: Grafo Condensado

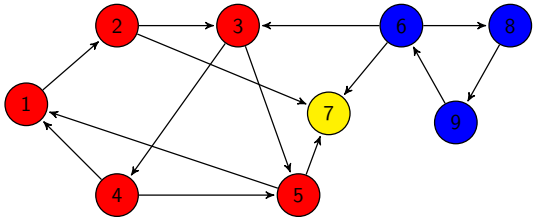


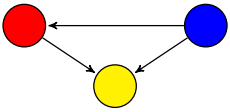


grafo condensado de G: $C(G)$

$V(C(G))$: componentes fortes de G ($\mathcal{C}(G)$)
$A(C(G))$

Relembrando: Grafo Condensado





grafo condensado de G: $C(G)$

$V(C(G))$: componentes fortes de G ($\mathcal{C}(G)$)

$A(C(G))$: $\{(X, Y) \mid$ existe arco de $V(X)$ para $V(Y)$ em $G\}$

Buscas em Componentes Fortes

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G então

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r
- Gostaríamos de escolher r tal que $V(T) = V(C)$, para algum componente forte C de G.

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r
- Gostaríamos de escolher r tal que $V(T) = V(C)$, para algum componente forte C de G.

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r
- Gostaríamos de escolher r tal que $V(T) = V(C)$, para algum componente forte C de G. Como devemos escolher r?

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r
- Gostaríamos de escolher r tal que $V(T) = V(C)$, para algum componente forte C de G. Como devemos escolher r?

Teorema 106: Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G.

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r
- Gostaríamos de escolher r tal que $V(T) = V(C)$, para algum componente forte C de G. Como devemos escolher r?

Teorema 106: Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G. Se r pertence a sumidouro S do grafo condensado $C(G)$,

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r
- Gostaríamos de escolher r tal que $V(T) = V(C)$, para algum componente forte C de G. Como devemos escolher r?

Teorema 106: Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G. Se r pertence a sumidouro S do grafo condensado $C(G)$, então $G[V(T)]$ é componente forte de G

Buscas em Componentes Fortes

Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G
então $V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de r

- Quais outros vértices estão em $V(T)$?
- Aqueles para os quais existe caminho direcionado a partir de r
- Gostaríamos de escolher r tal que $V(T) = V(C)$, para algum componente forte C de G. Como devemos escolher r?

Teorema 106: Seja (T, r) uma árvore enraizada resultante de busca em G. Se r pertence a sumidouro S do grafo condensado $C(G)$, então $G[V(T)]$ é componente forte de G (em particular, a componente é o sumidouro S de $C(G)$).

Algoritmo de Kosaraju - Alto Nível

Decompoe(G)

$c \leftarrow 0$
Enquanto $V(G) \neq \emptyset$
    $r \leftarrow$ vértice de um sumidouro do grafo condensado de G
    $++c$
    $V \leftarrow \emptyset$
    Para **cada** v **alcançado numa busca em** G **a partir de** r
        v.componente $\leftarrow c$
        acrescente v a V
    remova de G os vértices $v \in V$ tais que v.componente $= c$
Devolva $\mathcal{C}$

Algoritmo de Kosaraju - Alto Nível

Decompoe(G)

$c \leftarrow 0$
Enquanto $V(G) \neq \emptyset$
    $r \leftarrow$ vértice de um sumidouro do grafo condensado de G
    $++c$
    $V \leftarrow \emptyset$
    Para **cada** v **alcançado numa busca em** G **a partir de** r
        v.componente $\leftarrow c$
        acrescente v a V
    remova de G os vértices $v \in V$ tais que v.componente $= c$
Devolva $\mathcal{C}$

- Sempre há um sumidouro disponível no grafo condensado?

Encontrando Vértices de Sumidouros

- Como encontrar um vértice de um componente sumidouro?

Encontrando Vértices de Sumidouros

- Como encontrar um vértice de um componente sumidouro?
- Da aula passada:

Encontrando Vértices de Sumidouros

- Como encontrar um vértice de um componente sumidouro?
- Da aula passada: se G é acíclico, o vértice v com v.pos máximo é fonte de G

Encontrando Vértices de Sumidouros

- Como encontrar um vértice de um componente sumidouro?
- Da aula passada: se G é acíclico, o vértice v com $v.\text{pos}$ máximo é fonte de G
- E se fizermos a busca em G^t?

Encontrando Vértices de Sumidouros

- Como encontrar um vértice de um componente sumidouro?
- Da aula passada: se G é acíclico, o vértice v com v.pos máximo é fonte de G
- E se fizermos a busca em G^t? O vértice v com v.pos máximo em G^t é sumidouro em G

Encontrando Vértices de Sumidouros

- Como encontrar um vértice de um componente sumidouro?
- Da aula passada: se G é acíclico, o vértice v com v.pos máximo é fonte de G
- E se fizermos a busca em G^t? O vértice v com v.pos máximo em G^t é sumidouro em G (lembrando que isso vale para grafos acíclicos)

Encontrando Vértices de Sumidouros

- Como encontrar um vértice de um componente sumidouro?
- Da aula passada: se G é acíclico, o vértice v com v.pos máximo é fonte de G
- E se fizermos a busca em G^t? O vértice v com v.pos máximo em G^t é sumidouro em G (lembrando que isso vale para grafos acíclicos)

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova:

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n) =$ reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n) =$ reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n) =$ reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n) =$ reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v,

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n) =$ reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n) =$ reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n)$ = reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades:

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n)$ = reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades: (1) a busca alcança u antes

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n) =$ reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades: (1) a busca alcança u antes (2) a busca alcaça v antes

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n)$ = reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades: (1) a busca alcança u antes (2) a busca alcaça v antes
  - (1) Neste caso, v será descendente de u.

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n)$ = reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades: (1) a busca alcança u antes (2) a busca alcaça v antes
  - (1) Neste caso, v será descendente de u. Logo, $u.\text{pos} > v.\text{pos}$

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n)$ = reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades: (1) a busca alcança u antes (2) a busca alcaça v antes
  - (1) Neste caso, v será descendente de u. Logo, $u.\text{pos} > v.\text{pos}$
  - (2) Neste caso, u será alcançado só depois que a busca a partir de v terminar.

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n)$ = reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades: (1) a busca alcança u antes (2) a busca alcaça v antes
  - (1) Neste caso, v será descendente de u. Logo, $u.\text{pos} > v.\text{pos}$
  - (2) Neste caso, u será alcançado só depois que a busca a partir de v terminar. Logo, $u.\text{pos} > v.\text{pos}$

Encontrando Vértices de Sumidouros

Teorema 106

O primeiro vértice do reverso de uma pós-ordem do grafo transposto de um grafo direcionado G pertence a um sumidouro do grafo condensado de G.

Prova: Seja $(v = v_1, \ldots, v_n)$ = reverso de pós ordem obtido de uma busca em profundidade em G^t

- Seja S o componente forte de v em G
- Suponha que S não é sumidouro.
- Então existe um vértice u em outro componente forte de G para o qual existe um caminho direcionado de v, mas não existe caminho direcionado de u a v
- Logo, existe um caminho de u a v em G^t (porém não de v a u)
- Há duas possibilidades: (1) a busca alcança u antes (2) a busca alcaça v antes
  - (1) Neste caso, v será descendente de u. Logo, $u.\text{pos} > v.\text{pos}$
  - (2) Neste caso, u será alcançado só depois que a busca a partir de v terminar. Logo, $u.\text{pos} > v.\text{pos}$

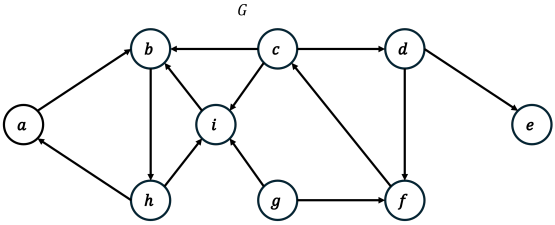
Portanto sempre será o caso que $u.\text{pos} > v.\text{pos}$, uma contradição. □

Algoritmo de Kosaraju - Duas Buscas em Profundidade

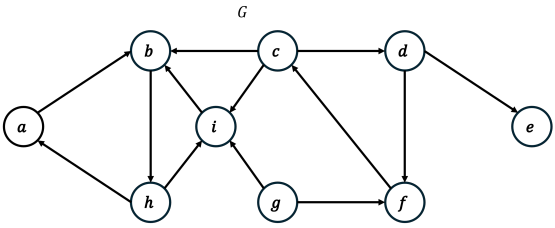
```
Decompoe(G)
ℓ ← reverso de uma pós-ordem de uma
  floresta de busca em profundidade em
  G^T
Para cada v ∈ V(G)
    v.estado ← 0
c ← 0
Enquanto ℓ não é vazia
    remova de ℓ seu primeiro vértice v
    Se v.estado = 0
        Decompoe(G, v, ++c)
```

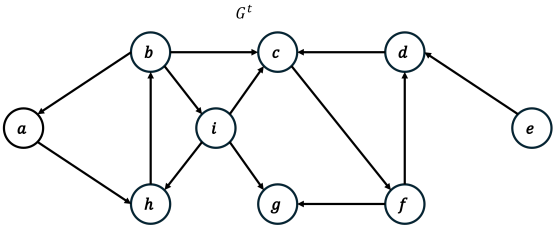
```
Decompoe(G, r, c)
r.estado ← 1
Para cada v ∈ Γ_G(r)
    Se v.estado = 0
        Decompoe(G, v, c)
r.componente ← c
r.estado ← 2
```

Primeira Busca

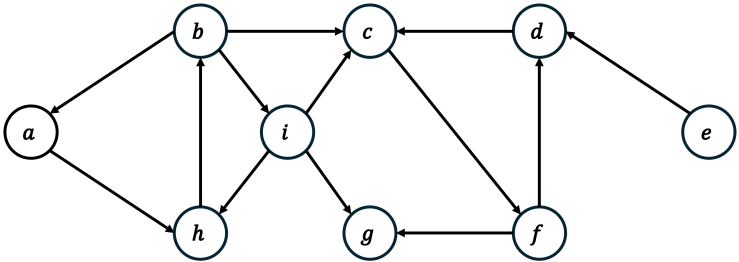


Primeira Busca

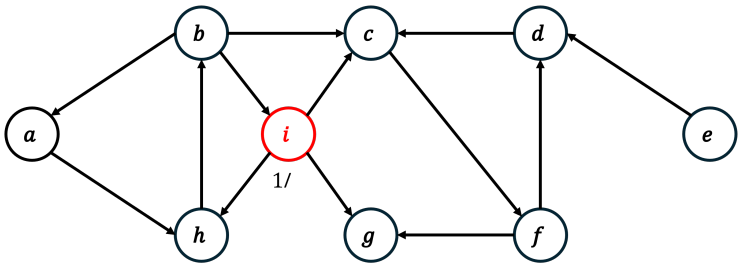




Primeira Busca

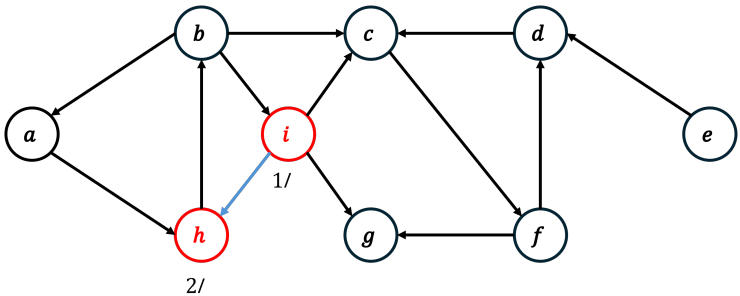


Primeira Busca



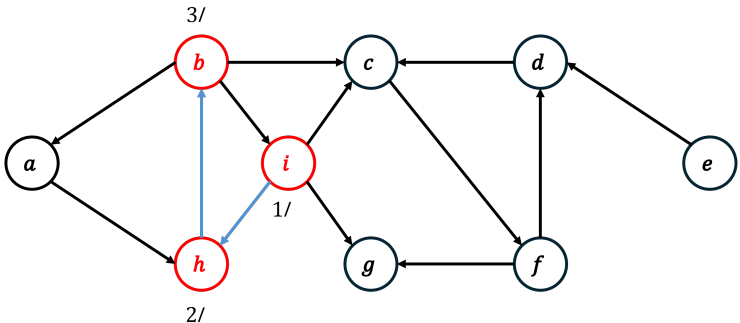
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



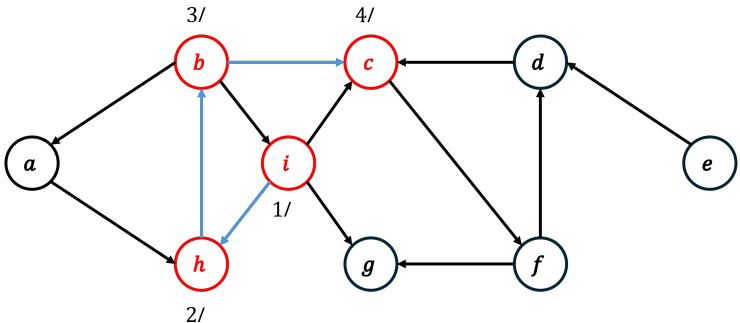
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



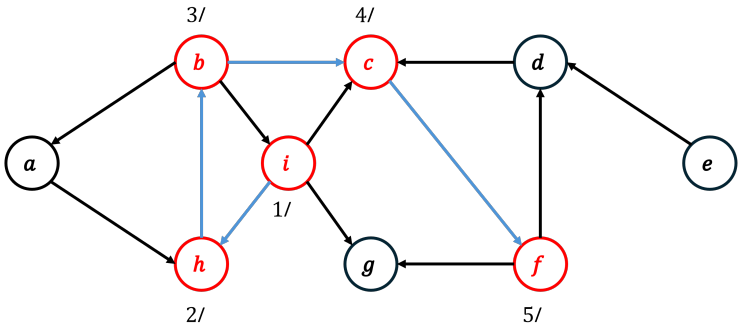
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



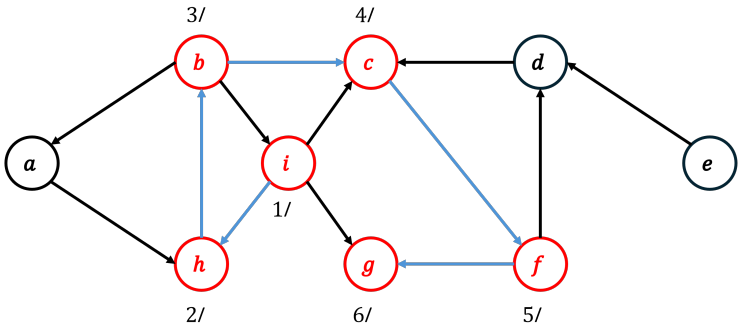
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



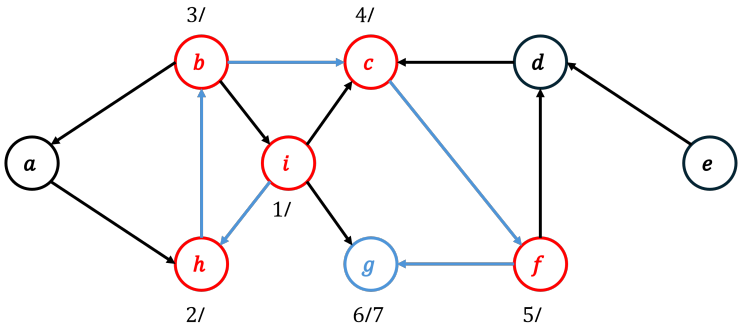
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



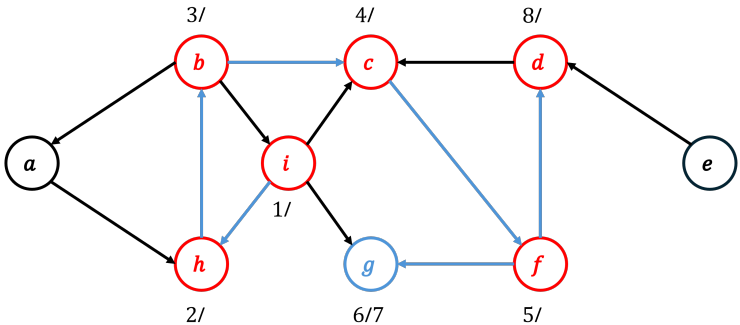
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



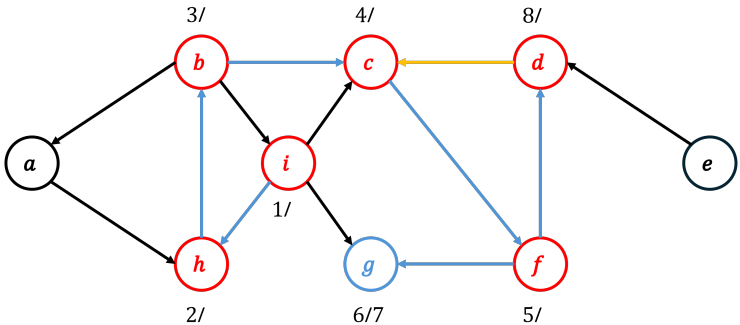
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



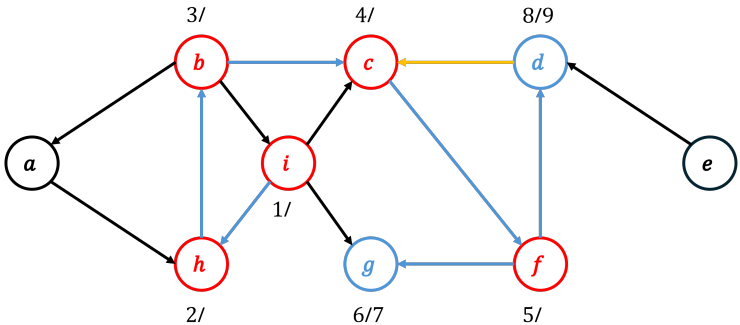
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



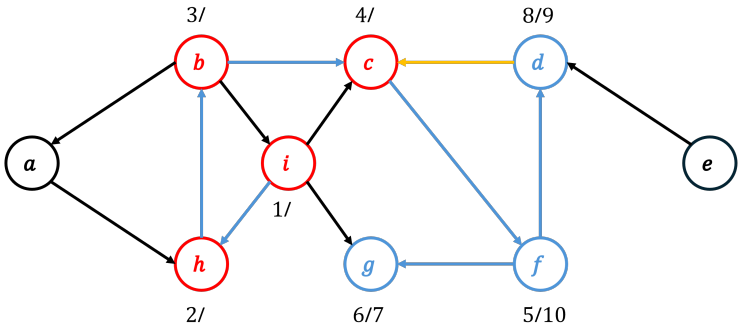
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



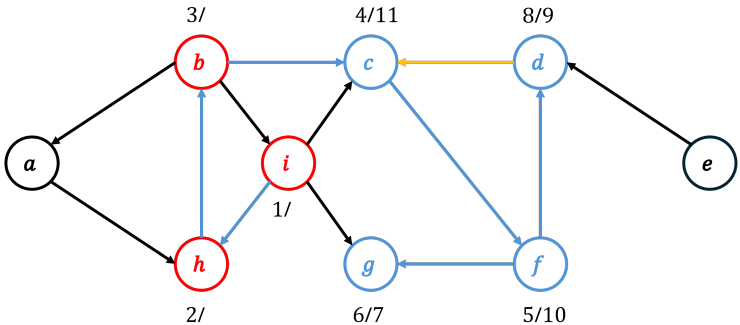
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



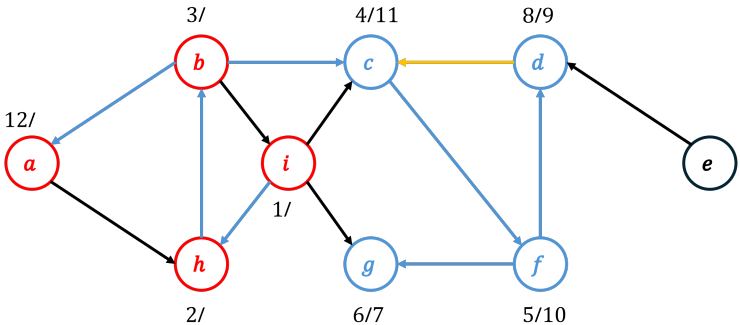
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



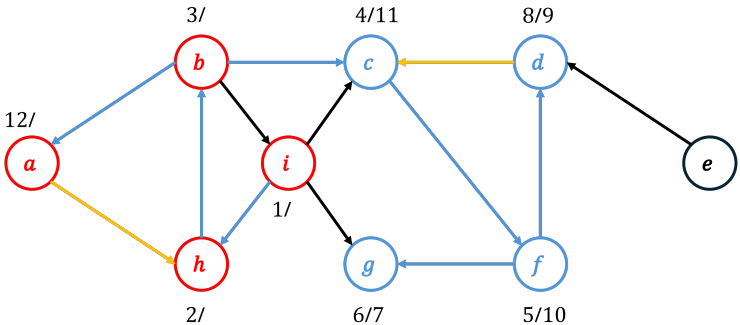
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



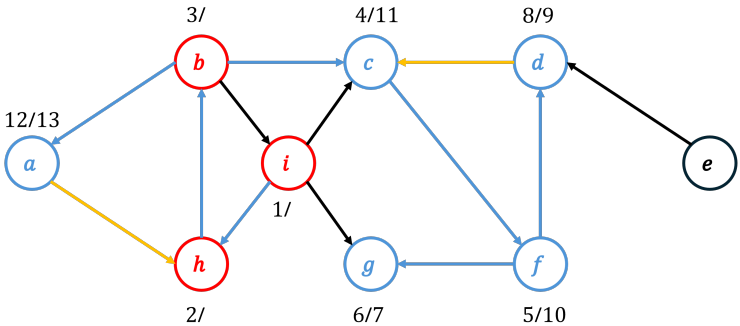
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



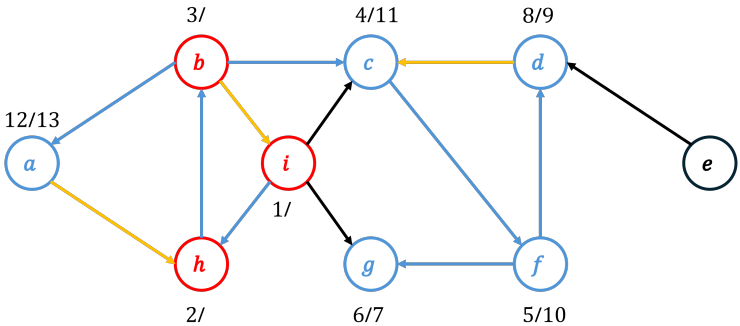
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



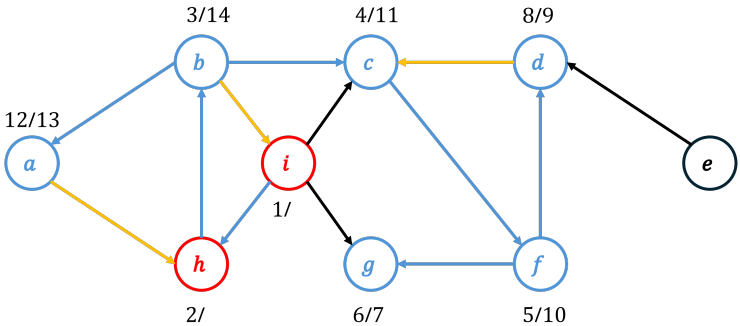
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



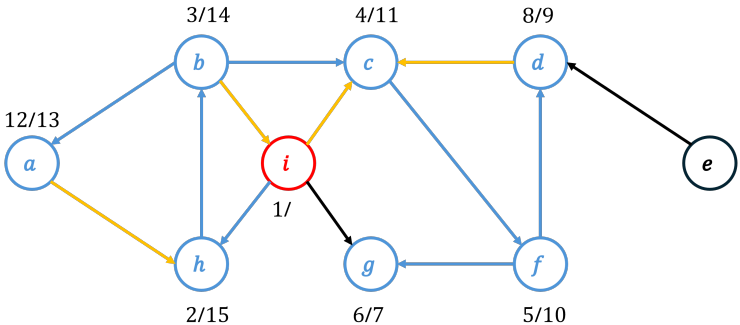
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



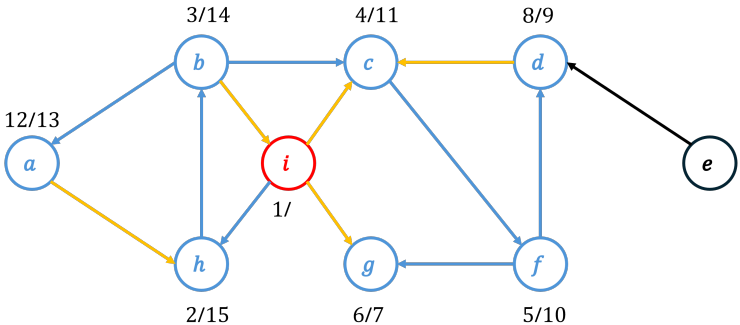
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



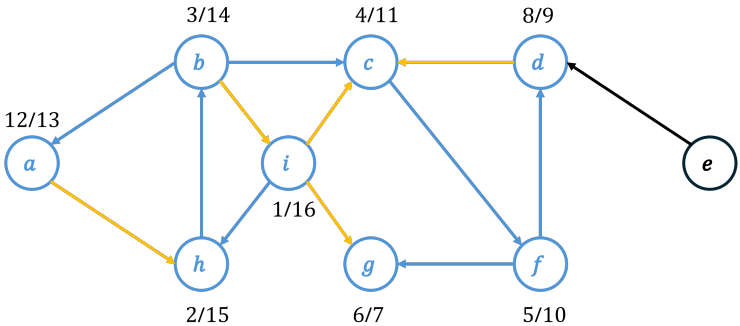
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



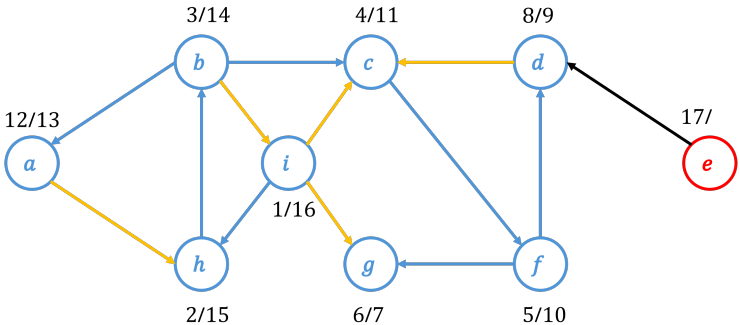
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



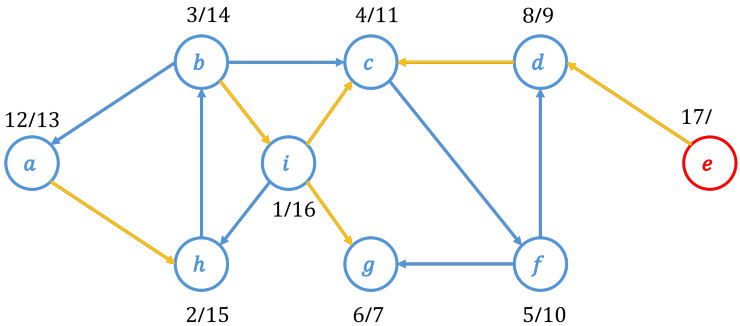
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



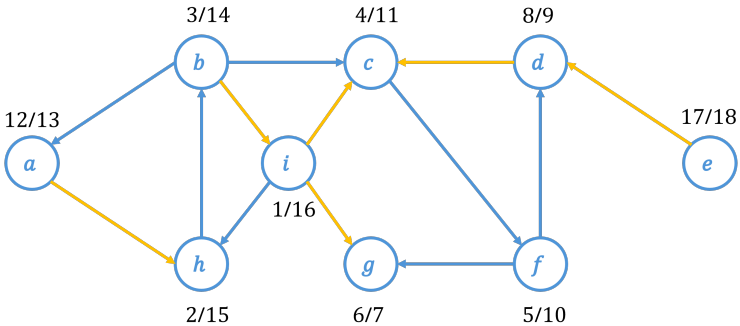
- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

Primeira Busca



- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

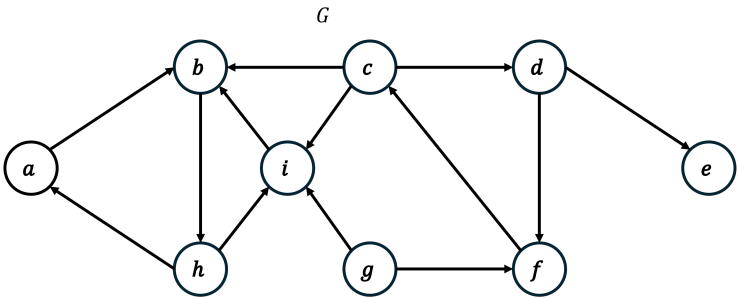
Primeira Busca



- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$

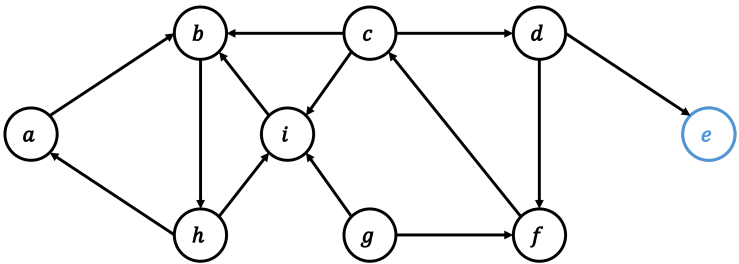
Segunda Busca

- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$



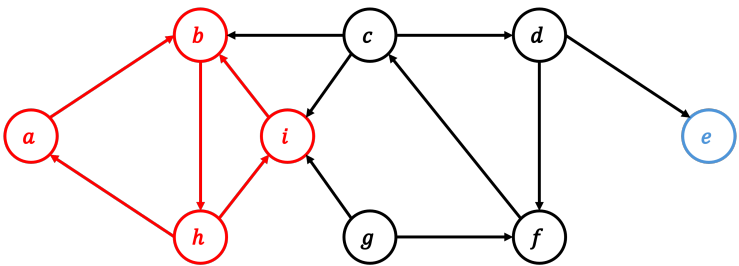
Segunda Busca

- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$



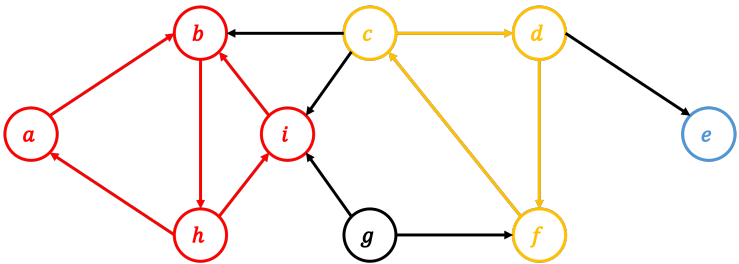
Segunda Busca

- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$



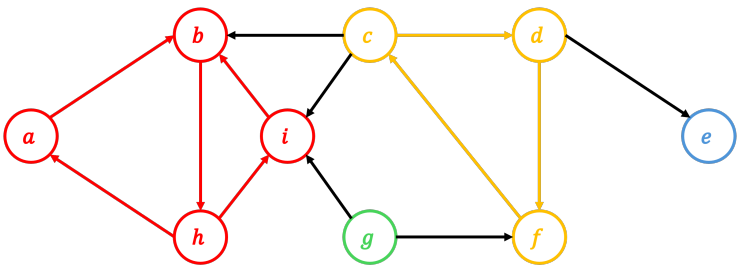
Segunda Busca

- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$



Segunda Busca

- Ordem: $(e, i, h, b, a, c, f, d, g)$



Complexidade

Complexidade

Teorema

É possível determinar os componentes fortes e o grafo condensado de um grafo direcionado com n vértices e m arcos em tempo $O(n + m)$.