Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 20: Emparelhamentos

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva
Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

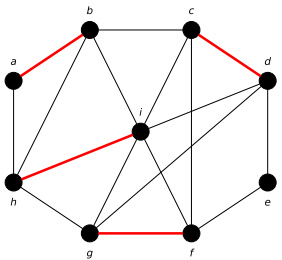
2026 - Segundo Semestre

Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.

Emparelhamentos

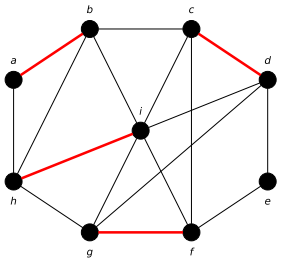
Um **emparelhamento** (“matching”) em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.



Emparelhamentos

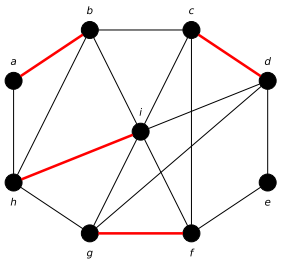
Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.

Assuntos relacionados:



Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.

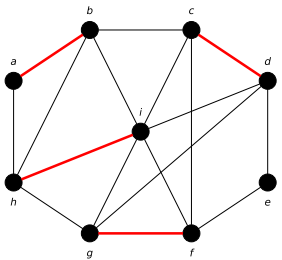


Assuntos relacionados:

- Emparelhamentos e bijeções

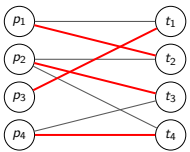
Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.



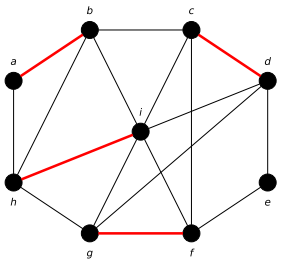
Assuntos relacionados:

- Emparelhamentos e bijeções



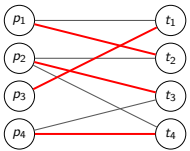
Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.



Assuntos relacionados:

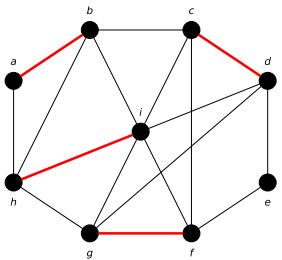
- Emparelhamentos e bijeções



- Problema da Designação ("assignment").

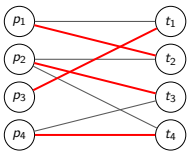
Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.



Assuntos relacionados:

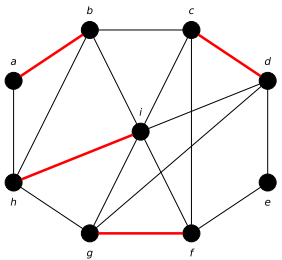
- Emparelhamentos e bijeções



- Problema da Designação ("assignment").
  e.g., pesssoa p_i à tarefa t_j no grafo acima.

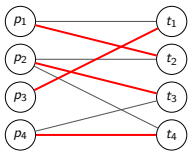
Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.



Assuntos relacionados:

- Emparelhamentos e bijeções

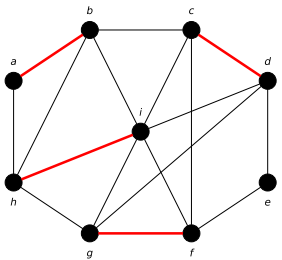


- Problema da Designação ("assignment").
  e.g., pesssoa p_i à tarefa t_j no grafo acima.

Assuntos importantes não abordados:

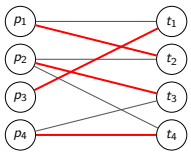
Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.



Assuntos relacionados:

- Emparelhamentos e bijeções



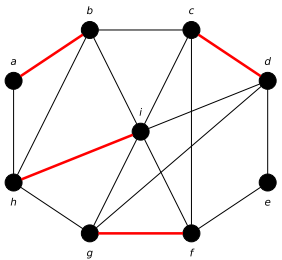
- Problema da Designação ("assignment").
  e.g., pesssoa p_i à tarefa t_j no grafo acima.

Assuntos importantes não abordados:

- Emparelhamentos em grafos com pesos.

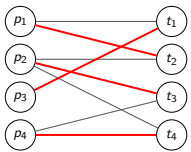
Emparelhamentos

Um **emparelhamento** ("matching") em um grafo G é um **conjunto de arestas de G sem vértices em comum**.



Assuntos relacionados:

- Emparelhamentos e bijeções

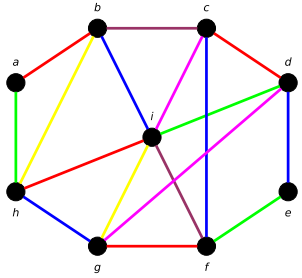


- Problema da Designação ("assignment").
  e.g., pesssoa p_i à tarefa t_j no grafo acima.

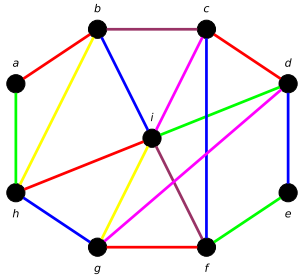
Assuntos importantes não abordados:

- Emparelhamentos em grafos com pesos.
- Emparelhamentos estáveis.

Coloração de Arestas

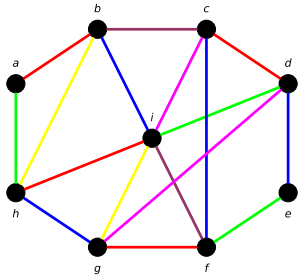


Coloração de Arestas



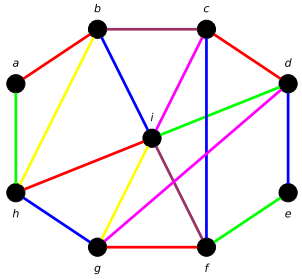
Coloração das arestas de um grafo G:

Coloração de Arestas



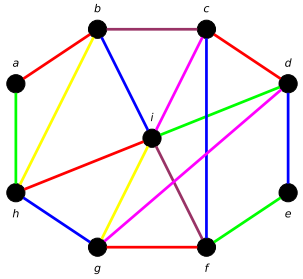
Coloração das arestas de um grafo G: partição de $E(G)$ em emparelhamentos.

Coloração de Arestas



Coloração das arestas de um grafo G: partição de $E(G)$ em emparelhamentos. Cada emparelhamento é uma **cor** da coloração.

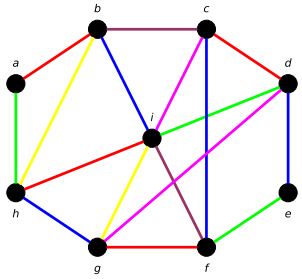
Coloração de Arestas



Coloração das arestas de um grafo G: partição de $E(G)$ em emparelhamentos. Cada emparelhamento é uma **cor** da coloração.

O **Índice cromático** de G,

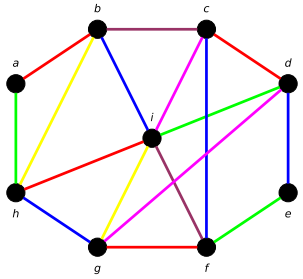
Coloração de Arestas



Coloração das arestas de um grafo G: partição de $E(G)$ em emparelhamentos. Cada emparelhamento é uma **cor** da coloração.

O **Índice cromático** de G, denotado $\chi'(G)$,

Coloração de Arestas



Coloração das arestas de um grafo G: partição de $E(G)$ em emparelhamentos. Cada emparelhamento é uma **cor** da coloração.

O **Índice cromático** de G, denotado $\chi'(G)$, é menor número de cores distintas necessário para colorir as arestas de um grafo.

Teoremas

Teorema (Vizing, 1964)

Todo grafo G admite uma coloração de suas arestas em $\Delta(G) + 1$ cores e essa coloração pode ser computada em tempo polinomial.

Teoremas

Teorema (Vizing, 1964)

Todo grafo G admite uma coloração de suas arestas em $\Delta(G) + 1$ cores e essa coloração pode ser computada em tempo polinomial.

Teorema (Holyer, 1981)

Decidir se as arestas de um grafo G podem ser coloridas com $\Delta(G)$ cores é um problema $\mathcal{NP}$-difícil.

Vértices cobertos e descobertos

Dado um emparelhamento M de um grafo G e $v \in V(G)$:

Vértices cobertos e descobertos

Dado um emparelhamento M de um grafo G e $v \in V(G)$:

- M **cobre** o v

Vértices cobertos e descobertos

Dado um emparelhamento M de um grafo G e $v \in V(G)$:

- M **cobre** o v (ou v é **coberto** por M)

Vértices cobertos e descobertos

Dado um emparelhamento M de um grafo G e $v \in V(G)$:

- M **cobre** o v (ou v é **coberto** por M) se v é ponta de alguma aresta de M.

Vértices cobertos e descobertos

Dado um emparelhamento M de um grafo G e $v \in V(G)$:

- M **cobre** o v (ou v é **coberto** por M) se v é ponta de alguma aresta de M. Caso contrário, v é **descoberto** por M.

Vértices cobertos e descobertos

Dado um emparelhamento M de um grafo G e $v \in V(G)$:

- M **cobre** o v (ou v é **coberto** por M) se v é ponta de alguma aresta de M. Caso contrário, v é **descoberto** por M.

- M **cobre** o conjunto $X \subseteq V(G)$ se todo vértice de X é coberto por M.

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é um **caminho M–alternante** em G se

Caminhos M–alternante e M–aumentante

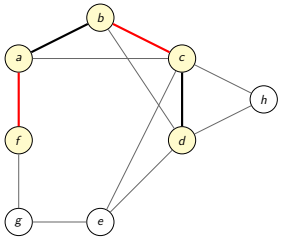
Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é um **caminho M–alternante** em G se $\{v_{i-1}, v_i\} \in M$ se e somente se $\{v_i, v_{i+1}\} \notin M$, para todo $1 \leq i < n$.

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é um **caminho M–alternante** em G se $\{v_{i-1}, v_i\} \in M$ se e somente se $\{v_i, v_{i+1}\} \notin M$, para todo $1 \leq i < n$.

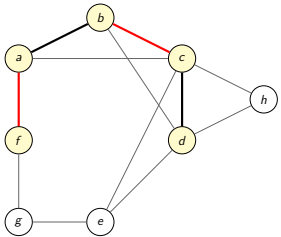


Se $M = \{\{a, f\}, \{b, c\}\}$, então o caminho $P = (f, a, b, c, d)$ é M-alternante.

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é um **caminho M–alternante** em G se $\{v_{i-1}, v_i\} \in M$ se e somente se $\{v_i, v_{i+1}\} \notin M$, para todo $1 \leq i < n$.



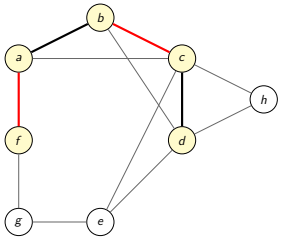
Se $M = \{\{a, f\}, \{b, c\}\}$, então o caminho $P = (f, a, b, c, d)$ é M-alternante.

- Caminho M–**aumentante**: é

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é um **caminho M–alternante** em G se $\{v_{i-1}, v_i\} \in M$ se e somente se $\{v_i, v_{i+1}\} \notin M$, para todo $1 \leq i < n$.



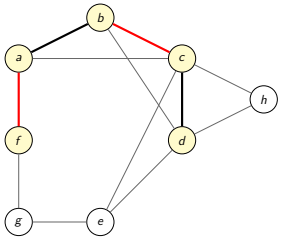
Se $M = \{\{a, f\}, \{b, c\}\}$, então o caminho $P = (f, a, b, c, d)$ é M-alternante.

- Caminho M–**aumentante**: é um caminho M–**alternante** cujas pontas são decobertas por M.

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é um **caminho M–alternante** em G se $\{v_{i-1}, v_i\} \in M$ se e somente se $\{v_i, v_{i+1}\} \notin M$, para todo $1 \leq i < n$.



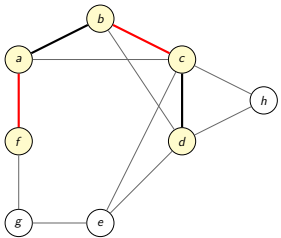
Se $M = \{\{a, f\}, \{b, c\}\}$, então o caminho $P = (f, a, b, c, d)$ é M-alternante.

- Caminho M–**aumentante**: é um caminho M–**alternante** cujas pontas são decobertas por M. **Exemplo**: O caminho $P' = (g, f, a, b, c, d)$

Caminhos M–alternante e M–aumentante

Dado um emparelhamento M de um grafo G:

- Um caminho $(v_0, \ldots, v_n)$ é um **caminho M–alternante** em G se $\{v_{i-1}, v_i\} \in M$ se e somente se $\{v_i, v_{i+1}\} \notin M$, para todo $1 \leq i < n$.



Se $M = \{\{a, f\}, \{b, c\}\}$, então o caminho $P = (f, a, b, c, d)$ é M-alternante.

- Caminho M–**aumentante**: é um caminho M–**alternante** cujas pontas são decobertas por M. **Exemplo**: O caminho $P' = (g, f, a, b, c, d)$
- Uma árvore T é M–**alternante** com relação a um vértice $r \in V(T)$ se o caminho de rTv é M–alternante para todo $v \in V(T)$.

Diferença simétrica

Dados dois conjuntos A e B, a **diferença simétrica** de A e B é

Diferença simétrica

Dados dois conjuntos A e B, a **diferença simétrica** de A e B é

$$A \oplus B := (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Diferença simétrica

Dados dois conjuntos A e B, a **diferença simétrica** de A e B é

$$A \oplus B := (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Alternativamente, temos que

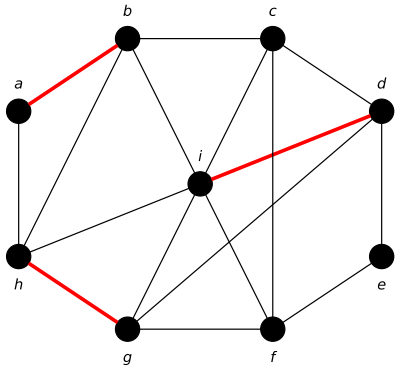
$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Teorema 111

Se M é um emparelhamento em um grafo G e C é um caminho M–aumentante em G, então o conjunto $M \oplus E(C)$ é um emparelhamento de tamanho $|M| + 1$ em G.

Teorema 111

Se M é um emparelhamento em um grafo G e C é um caminho M–aumentante em G, então o conjunto $M \oplus E(C)$ é um emparelhamento de tamanho $|M| + 1$ em G.

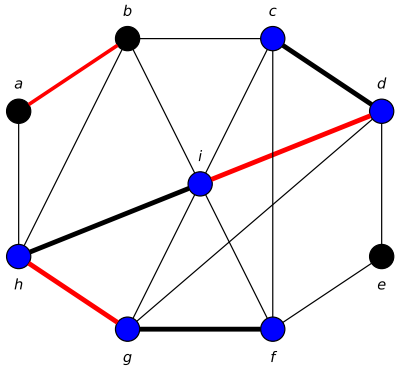


Demonstração.

Exercício 126 □

Teorema 111

Se M é um emparelhamento em um grafo G e C é um caminho M–aumentante em G, então o conjunto $M \oplus E(C)$ é um emparelhamento de tamanho $|M| + 1$ em G.

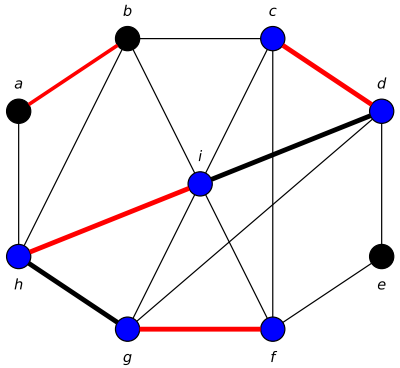


Demonstração.

Exercício 126 □

Teorema 111

Se M é um emparelhamento em um grafo G e C é um caminho M–aumentante em G, então o conjunto $M \oplus E(C)$ é um emparelhamento de tamanho $|M| + 1$ em G.

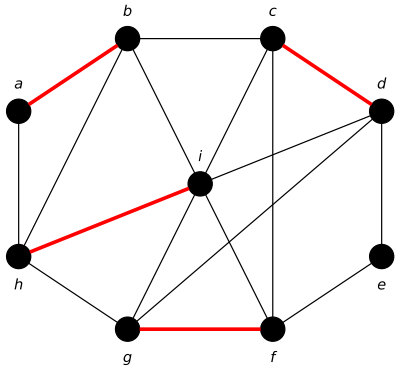


Demonstração.

Exercício 126 □

Teorema 111

Se M é um emparelhamento em um grafo G e C é um caminho M–aumentante em G, então o conjunto $M \oplus E(C)$ é um emparelhamento de tamanho $|M| + 1$ em G.



Demonstração.

Exercício 126 □

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova:

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$):

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante,

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$):

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$): Seja M^* um emparelhamento tal que $|M^*| > |M|$ e seja $H := G[M \oplus M^*]$.

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$): Seja M^* um emparelhamento tal que $|M^*| > |M|$ e seja $H := G[M \oplus M^*]$.

   2.1 $\Delta(H) \leq 2$ e daí

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$): Seja M^* um emparelhamento tal que $|M^*| > |M|$ e seja $H := G[M \oplus M^*]$.

   2.1 $\Delta(H) \leq 2$ e daí

   2.2 Cada componente de H é um ciclo ou um caminho

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$): Seja M^* um emparelhamento tal que $|M^*| > |M|$ e seja $H := G[M \oplus M^*]$.

   2.1 $\Delta(H) \leq 2$ e daí

   2.2 Cada componente de H é um ciclo ou um caminho (Ex. 54).

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$): Seja M^* um emparelhamento tal que $|M^*| > |M|$ e seja $H := G[M \oplus M^*]$.

   2.1 $\Delta(H) \leq 2$ e daí

   2.2 Cada componente de H é um ciclo ou um caminho (Ex. 54).

   2.3 Os ciclos tem que ser pares porque M e M^* são emparelhamentos.

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$): Seja M^* um emparelhamento tal que $|M^*| > |M|$ e seja $H := G[M \oplus M^*]$.

   2.1 $\Delta(H) \leq 2$ e daí

   2.2 Cada componente de H é um ciclo ou um caminho (Ex. 54).

   2.3 Os ciclos tem que ser pares porque M e M^* são emparelhamentos.

   2.4 Como $|M^*| > |M|$, então um componente de H tem que ser um caminho C com as pontas cobertas por M^*.

Teorema de Berge (1967)

O emparelhamento M é máximo no grafo G se e somente se não existe caminho M–aumentante em G.

Prova: Vamos demonstrar o enunciado equivalente:

O emparelhamento M **não** é máximo $\Leftrightarrow$ **existe** caminho M–aumentante em G.

1. ($\Leftarrow$): Se C é um caminho M–aumentante, então $|M \oplus E(C)| > |M|$ (T. 111).
2. ($\Rightarrow$): Seja M^* um emparelhamento tal que $|M^*| > |M|$ e seja $H := G[M \oplus M^*]$.

   2.1 $\Delta(H) \leq 2$ e daí

   2.2 Cada componente de H é um ciclo ou um caminho (Ex. 54).

   2.3 Os ciclos tem que ser pares porque M e M^* são emparelhamentos.

   2.4 Como $|M^*| > |M|$, então um componente de H tem que ser um caminho C com as pontas cobertas por M^*. $\therefore$ C é um caminho M–aumentante em G.

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida):

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida): G tem um emparelhamento que cobre $X \Rightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida): G tem um emparelhamento que cobre $X \Rightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

- Seja M um emparelhamento cobrindo X

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida): G tem um emparelhamento que cobre $X \Rightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

- Seja M um emparelhamento cobrindo X
- Seja $S \subseteq X$.

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida): G tem um emparelhamento que cobre $X \Rightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

- Seja M um emparelhamento cobrindo X
- Seja $S \subseteq X$. Como para cada $u \in S$, existe um vértice v distinto em $\Gamma_G(S)$

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida): G tem um emparelhamento que cobre $X \Rightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

- Seja M um emparelhamento cobrindo X
- Seja $S \subseteq X$. Como para cada $u \in S$, existe um vértice v distinto em $\Gamma_G(S)$ (onde $\{u, v\}$ é uma aresta de M),

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida): G tem um emparelhamento que cobre $X \Rightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

- Seja M um emparelhamento cobrindo X
- Seja $S \subseteq X$. Como para cada $u \in S$, existe um vértice v distinto em $\Gamma_G(S)$ (onde $\{u, v\}$ é uma aresta de M), então $|S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com as partes $\{A, B\}$ e seja $X \subseteq A$.
G tem um emparelhamento que cobre $X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

Prova (Ida): G tem um emparelhamento que cobre $X \Rightarrow \forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)|$.

- Seja M um emparelhamento cobrindo X
- Seja $S \subseteq X$. Como para cada $u \in S$, existe um vértice v distinto em $\Gamma_G(S)$ (onde $\{u, v\}$ é uma aresta de M), então $|S| \leq |\Gamma_G(S)|$.
- Como tomamos S arbitrariamente, isso vale para todo $S \subseteq X$.

Teorema de Hall (1935)

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta):

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo,

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

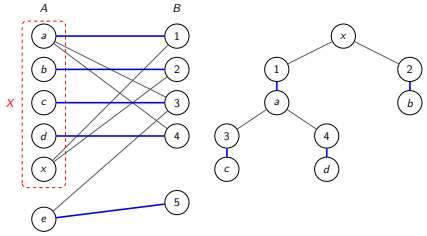
1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.

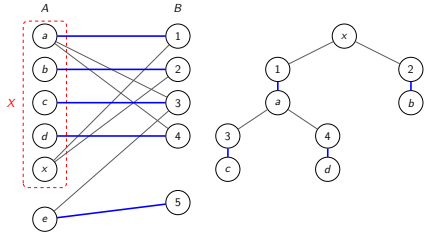


Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.



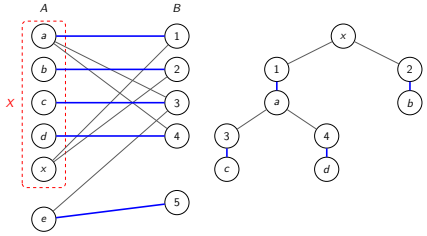
2. Seja $P := \{v \in V(T) \mid d_T(x, v)$ é par$\}$.

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.



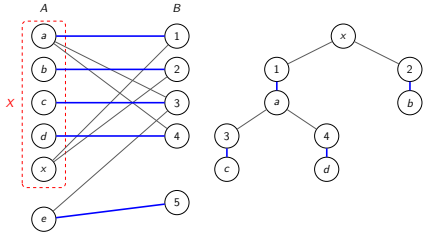
2. Seja $P := \{v \in V(T) \mid d_T(x, v)$ é par$\}$. Observe que x é o único vértice de T não coberto por M

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.



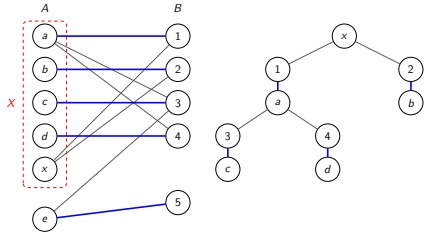
2. Seja $P := \{v \in V(T) \mid d_T(x, v)$ é par$\}$. Observe que x é o único vértice de T não coberto por M e que T tem um número ímpar de vértices.

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.



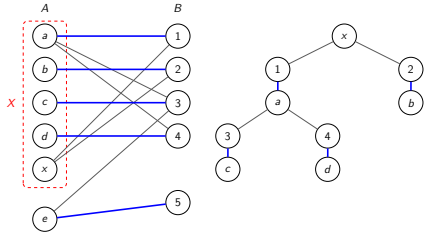
2. Seja $P := \{v \in V(T) \mid d_T(x, v)$ é par$\}$. Observe que x é o único vértice de T não coberto por M e que T tem um número ímpar de vértices.
3. Note que $\Gamma_T(P) = \{v \in V(T) \mid d_T(x, v)$ é ímpar$\}$.

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.



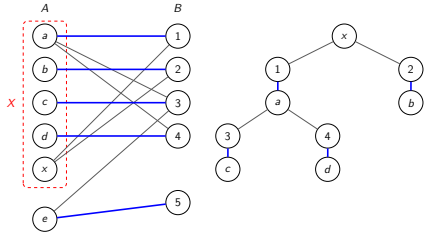
2. Seja $P := \{v \in V(T) \mid d_T(x, v) \text{ é par}\}$. Observe que x é o único vértice de T não coberto por M e que T tem um número ímpar de vértices.
3. Note que $\Gamma_T(P) = \{v \in V(T) \mid d_T(x, v) \text{ é ímpar}\}$. Como $x \in P$, $|P| > |\Gamma_T(P)|$.

Teorema de Hall (1935)

Prova (Volta): $\forall S \subseteq X,\ |S| \leq |\Gamma_G(S)| \Rightarrow G$ tem um emparelhamento que cobre X.

- Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado:
  $\nexists$ emparelhamento cobrindo $X \Rightarrow \exists\ S \subseteq X$ tal que $|S| > |\Gamma_G(S)|$.

1. Seja M emparelhamento máximo, $x \in X$ um vértice não coberto por M e T uma árvore M–alternante maximal com relação a x.



2. Seja $P := \{v \in V(T) \mid d_T(x, v)$ é par$\}$. Observe que x é o único vértice de T não coberto por M e que T tem um número ímpar de vértices.
3. Note que $\Gamma_T(P) = \{v \in V(T) \mid d_T(x, v)$ é ímpar$\}$. Como $x \in P$, $|P| > |\Gamma_T(P)|$. Como $\Gamma_T(P) = \Gamma_G(P)$, concluímos que $|P| > |\Gamma_G(P)|$.

Algoritmo de emparelhamento

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()

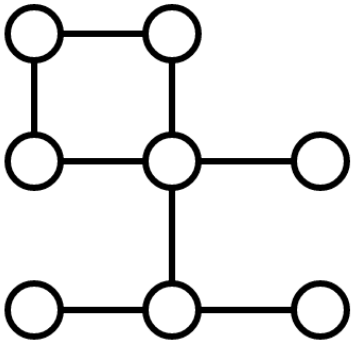
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



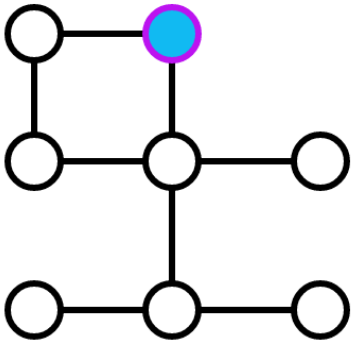
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



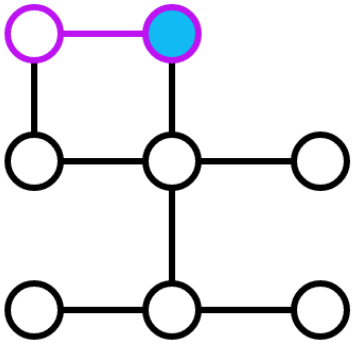
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



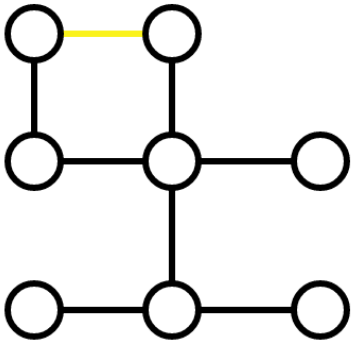
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



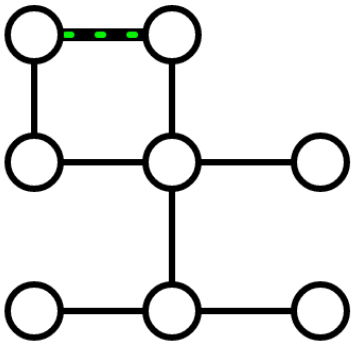
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



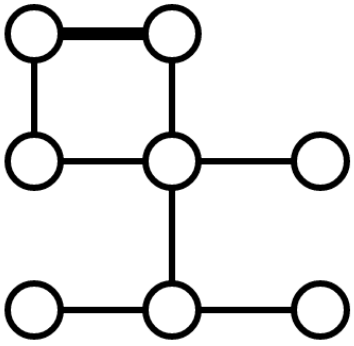
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



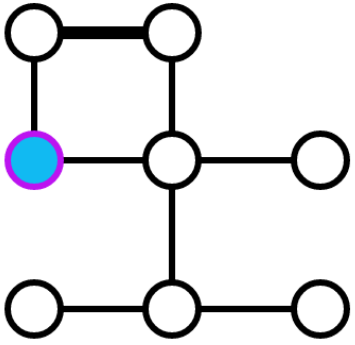
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



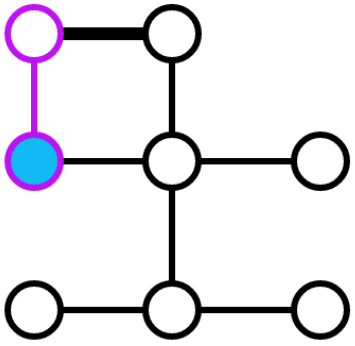
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



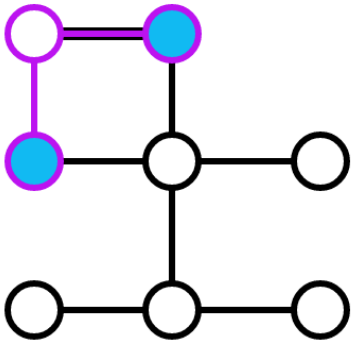
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



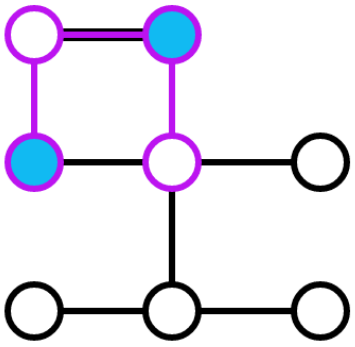
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



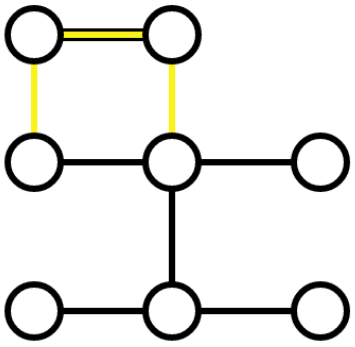
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



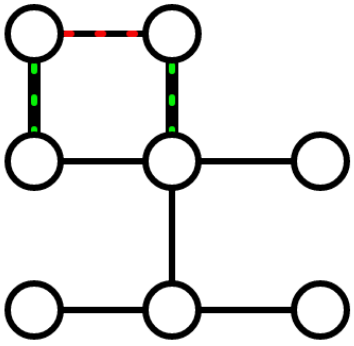
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



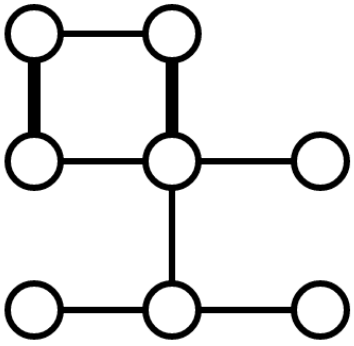
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



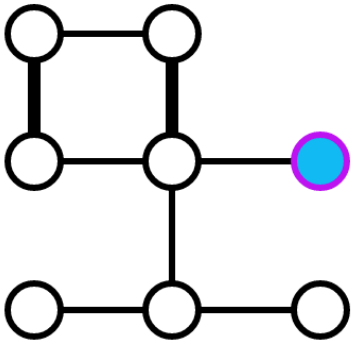
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



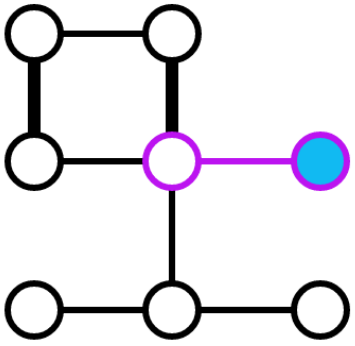
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



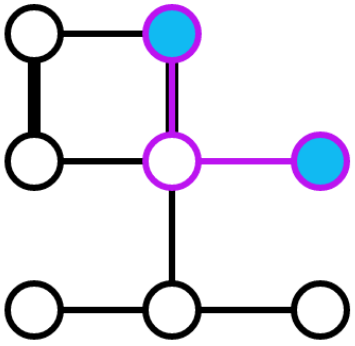
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



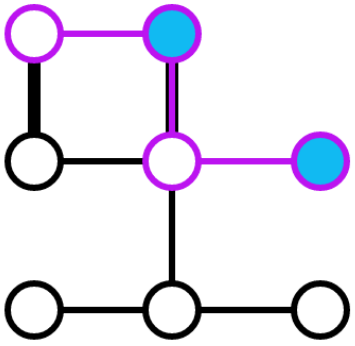
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



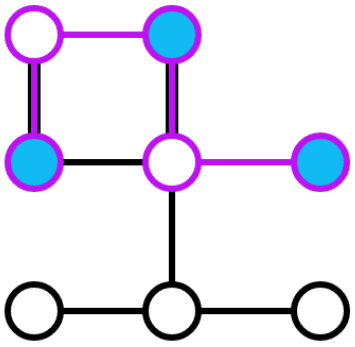
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



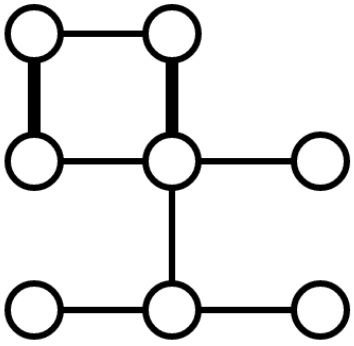
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



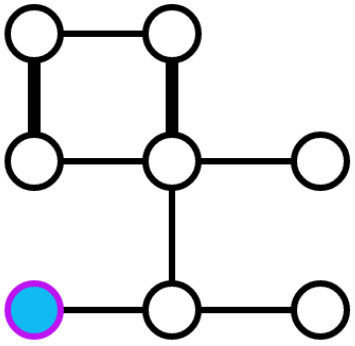
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



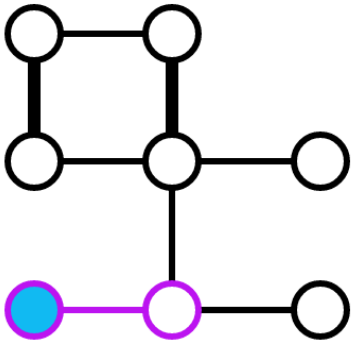
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



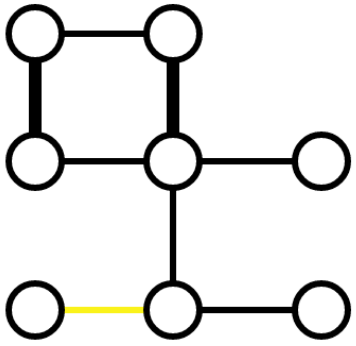
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



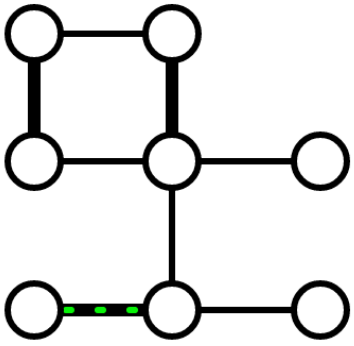
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



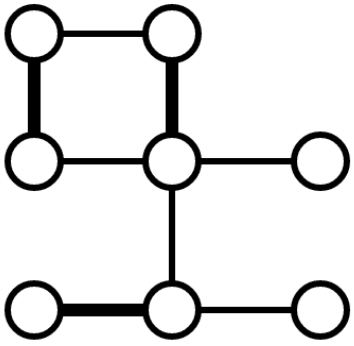
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



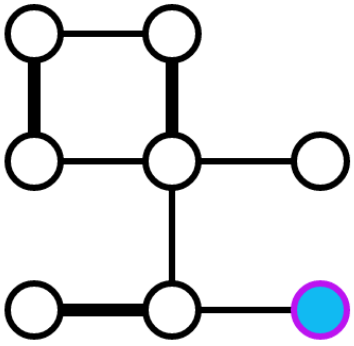
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



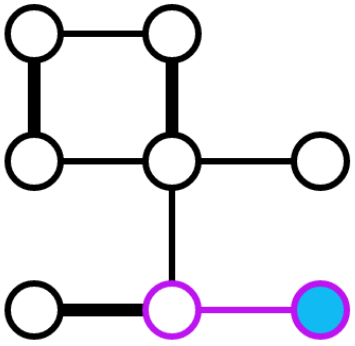
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



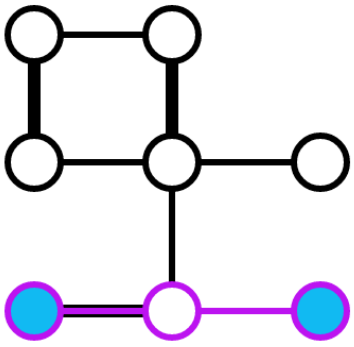
Algoritmo de emparelhamento - Execução

EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()



Algoritmo de emparelhamento - Execução

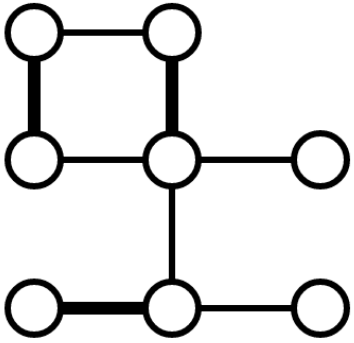
EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()

- Quando v é escolhido e coberto pela nova aresta, o vértice mantém-se coberto até fim da execução (mesmo que por arestas diferentes, quando emparelhamento muda)



Algoritmo de emparelhamento - Execução

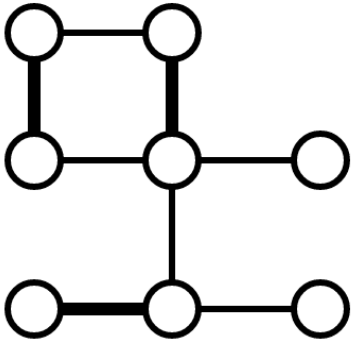
EmparelhamentoMaximo(G)

$M \leftarrow \emptyset$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v **não é coberto por** M
        $C \leftarrow$ CaminhoAumentante(G,M,v)
        Se C **não é vazio**
            $M \leftarrow M \oplus C$
Devolva M

CaminhoAumentante(G, M, v)

$T \leftarrow (\{v\}, \emptyset)$
$P \leftarrow \{v\}$
Enquanto $\Gamma_G(P) - V(T) \neq \emptyset$
    $w \leftarrow$ um vértice em $\Gamma_G(P) - V(T)$
    $u \leftarrow$ um vizinho de w em T
    acrescente a aresta $\{u, w\}$ a T
    Se w **não está coberto por** M
        Devolva vTw
    Senão
        acrescente a T a aresta $\{w, t\}$ de M que cobre w
        acrescente t a P
Devolva ()

- Quando v é escolhido e decide-se deixá-lo descoberto, os nós pares da árvore certificam que v faz parte de conjunto X que não pode ser completamente coberto



Teorema 114

É possível computar um emparelhamento máximo de um grafo bipartido com n vértices e m arestas em tempo $O(nm)$.

Teorema 114

É possível computar um emparelhamento máximo de um grafo bipartido com n vértices e m arestas em tempo $O(nm)$.

Demonstração.

1. CaminhoAumentante(G, M, v), pode ser implementado como uma busca em largura adaptada.

Teorema 114

É possível computar um emparelhamento máximo de um grafo bipartido com n vértices e m arestas em tempo $O(nm)$.

Demonstração.

1. CaminhoAumentante(G, M, v), pode ser implementado como uma busca em largura adaptada.
2. Todas as operações no seu laço podem ser executadas em tempo $O(1)$ e o algoritmo pode ser executado em tempo $O(m)$.

Teorema 114

É possível computar um emparelhamento máximo de um grafo bipartido com n vértices e m arestas em tempo $O(nm)$.

Demonstração.

1. CaminhoAumentante(G, M, v), pode ser implementado como uma busca em largura adaptada.
2. Todas as operações no seu laço podem ser executadas em tempo $O(1)$ e o algoritmo pode ser executado em tempo $O(m)$.
3. CaminhoAumentante(G, M, v) é invocado no máximo $\lceil n/2 \rceil$ vezes.

Teorema 114

É possível computar um emparelhamento máximo de um grafo bipartido com n vértices e m arestas em tempo $O(nm)$.

Demonstração.

1. CaminhoAumentante(G, M, v), pode ser implementado como uma busca em largura adaptada.
2. Todas as operações no seu laço podem ser executadas em tempo $O(1)$ e o algoritmo pode ser executado em tempo $O(m)$.
3. CaminhoAumentante(G, M, v) é invocado no máximo $\lceil n/2 \rceil$ vezes.
4. O valor de $M \oplus C$ no laço de EmparelhamentoMaximo(G) pode ser computado em tempo $O(m)$.

□