Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 26a: Componentes Fortes

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2023

Grafo Condensado

Grafo Condensado

G

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

C e C'

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

C e C': componentes fortes de G

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

C e C': componentes fortes de G

C' é **descendente** de C

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

C e C': componentes fortes de G

C' é **descendente** de C: existe caminho direcionado de C à C' no grafo condensado de G

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

C e C': componentes fortes de G

C' é **descendente** de C: existe caminho direcionado de C à C' no grafo condensado de G

Teorema

C' é descendente de C em G

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

C e C': componentes fortes de G

C' é **descendente** de C: existe caminho direcionado de C à C' no grafo condensado de G

Teorema

C' é descendente de C em G
se e somente se

Grafo Condensado

G: grafo direcionado

C e C': componentes fortes de G

C' é **descendente** de C: existe caminho direcionado de C à C' no grafo condensado de G

Teorema

C' é descendente de C em G
se e somente se
todos os vértices de C' são alcançáveis a partir de todos os vértices de C em G

Buscas em Componentes Fortes

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
$u \in V(T)$

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
$u \in V(T)$
então

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
$u \in V(T)$
então
componente forte de u é descendente do componente forte de $r(T)$

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
$u \in V(T)$
então
componente forte de u é descendente do componente forte de $r(T)$

Corolário

T é arborescência resultante de busca em G

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
$u \in V(T)$
então
componente forte de u é descendente do componente forte de $r(T)$

Corolário

T é arborescência resultante de busca em G
$r(T)$ pertence a sumidouro do grafo condensado de G

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
$u \in V(T)$
então
componente forte de u é descendente do componente forte de $r(T)$

Corolário

T é arborescência resultante de busca em G
$r(T)$ pertence a sumidouro do grafo condensado de G
então

Buscas em Componentes Fortes

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
então
$V(T)$ contém todos os vértices do componente forte de $r(T)$

Teorema

T: arborescência resultante de busca em G
$u \in V(T)$
então
componente forte de u é descendente do componente forte de $r(T)$

Corolário

T é arborescência resultante de busca em G
$r(T)$ pertence a sumidouro do grafo condensado de G
então
$G[V(T)]$ é componente forte de G

Corolário

F

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G

r, r'

Corolário

F: *floresta direcionada resultante de busca em profundidade em* G
r, r': *raízes de arborescências de* F

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
r, r': raízes de arborescências de F
componente forte de r' é descendente do componente forte de r

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
r, r': raízes de arborescências de F
componente forte de r' é descendente do componente forte de r
se e somente se

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
r, r': raízes de arborescências de F
componente forte de r' é descendente do componente forte de r
se e somente se

$$r.pos > r'.pos.$$

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
r, r': raízes de arborescências de F
componente forte de r' é descendente do componente forte de r se e somente se

$$r.pos > r'.pos.$$

Teorema

F floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
r, r': raízes de arborescências de F
componente forte de r' é descendente do componente forte de r
se e somente se

$$r.pos > r'.pos.$$

Teorema

F floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
$(v_1, \ldots, v_n)$ é pós-ordem de F

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
r, r': raízes de arborescências de F
componente forte de r' é descendente do componente forte de r
se e somente se

$$r.pos > r'.pos.$$

Teorema

F floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
$(v_1, \ldots, v_n)$ é pós-ordem de F
se e somente se

Corolário

F: floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
r, r': raízes de arborescências de F
componente forte de r' é descendente do componente forte de r
se e somente se

$$r.pos > r'.pos.$$

Teorema

F floresta direcionada resultante de busca em profundidade em G
$(v_1, \ldots, v_n)$ é pós-ordem de F
se e somente se
$(v_n, \ldots, v_1)$ é pós-ordem de floresta direcionada resultante de busca em profundidade sobre G^T

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G
Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G

Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G

$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G

Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G

$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T

$C \leftarrow \emptyset$

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G

Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G

$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T

$C \leftarrow \emptyset$

Enquanto ℓ **não é vazia**

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G

Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G

$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T

$C \leftarrow \emptyset$

Enquanto ℓ **não é vazia**

  $v \leftarrow$ primeiro vértice de ℓ

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G

Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G

$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T

$C \leftarrow \emptyset$

Enquanto ℓ **não é vazia**

    $v \leftarrow$ primeiro vértice de ℓ

    Se $v \in V(H)$ **para algum** $H \in C$

        remova v de ℓ

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G

Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G

$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T

$C \leftarrow \emptyset$

Enquanto ℓ **não é vazia**

    $v \leftarrow$ primeiro vértice de ℓ

    Se $v \in V(H)$ **para algum** $H \in C$

        remova v de ℓ

    Senão

        $T \leftarrow$ arborescência resultante de uma busca em G a partir de v

---

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G
Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G
$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T
$C \leftarrow \emptyset$
Enquanto ℓ **não é vazia**
    $v \leftarrow$ primeiro vértice de ℓ
    Se $v \in V(H)$ **para algum** $H \in C$
        remova v de ℓ
    Senão
        $T \leftarrow$ arborescência resultante de uma busca em G a partir de v
        acrescente $G[V(T)]$ a C

Algoritmo de Kosaraju

Decompoe(G)

Entrada: Grafo direcionado G
Saída : Conjunto dos Componentes Fortes de G
$\ell \leftarrow$ reverso da pós-ordem resultante de uma busca em profundidade em G^T
$C \leftarrow \emptyset$
Enquanto ℓ **não é vazia**
    $v \leftarrow$ primeiro vértice de ℓ
    Se $v \in V(H)$ **para algum** $H \in C$
        remova v de ℓ
    Senão
        $T \leftarrow$ arborescência resultante de uma busca em G a partir de v
        acrescente $G[V(T)]$ a C
Devolva C

Complexidade

Complexidade

Teorema

É possível determinar os componentes fortes e o grafo condensado de um grafo direcionado com n vértices e m arcos em tempo $O(n + m)$.