Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 30: Planaridade

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

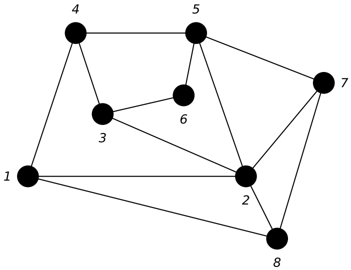
Departamento de Informática da UFPR

2023

Planaridade

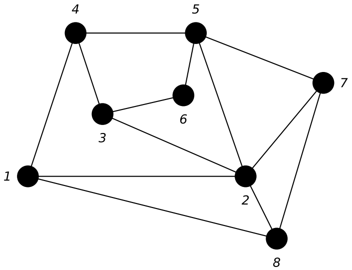
- **Desenho (ou imersão) de um grafo** G: grafo isomorfo a G onde:

Planaridade



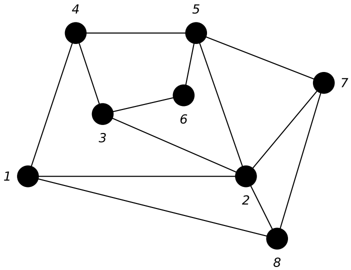
- **Desenho (ou imersão) de um grafo** G: grafo isomorfo a G onde:
  - vértices são pontos do $\mathbb{R}^2$,

Planaridade



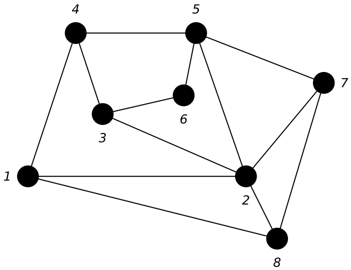
- **Desenho (ou imersão) de um grafo** G: grafo isomorfo a G onde:
  - vértices são pontos do $\mathbb{R}^2$,
  - arestas são curvas contínuas sem auto–interseções ligando suas pontas.

Planaridade



- **Desenho (ou imersão) de um grafo** G: grafo isomorfo a G onde:
  - vértices são pontos do $\mathbb{R}^2$,
  - arestas são curvas contínuas sem auto–interseções ligando suas pontas.
- O desenho é dito **planar** se suas arestas interseptam-se somente nos vértices que tem em comum.

Planaridade



- **Desenho (ou imersão) de um grafo** G: grafo isomorfo a G onde:
  - vértices são pontos do $\mathbb{R}^2$,
  - arestas são curvas contínuas sem auto–interseções ligando suas pontas.
- O desenho é dito **planar** se suas arestas interseptam-se somente nos vértices que tem em comum.
- Um grafo é **planar** se admite desenho planar.

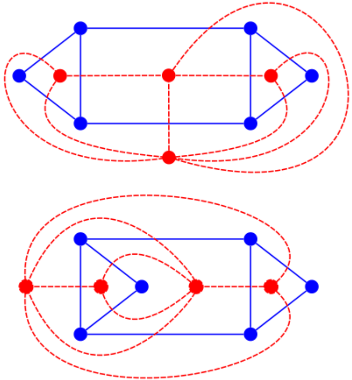
Dualidade

- **Face** de um desenho planar G de um grafo: região conexa do $\mathbb{R}^2$ delimitada por arestas de G.

Dualidade

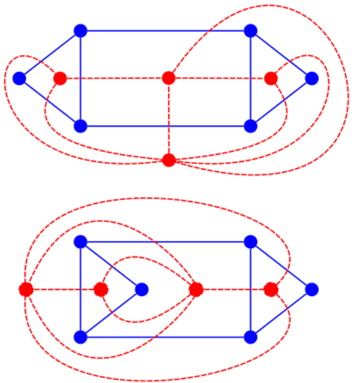
- **Face** de um desenho planar G de um grafo: região conexa do $\mathbb{R}^2$ delimitada por arestas de G.
- **Grafo dual** de um desenho planar G: grafo G^* onde:

Dualidade



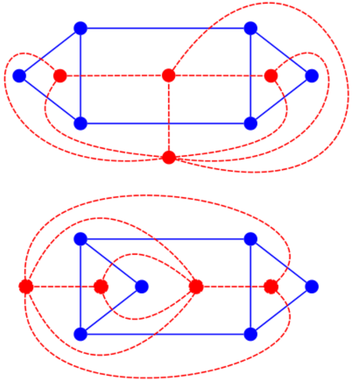
- **Face** de um desenho planar G de um grafo: região conexa do $\mathbb{R}^2$ delimitada por arestas de G.
- **Grafo dual** de um desenho planar G: grafo G^* onde:
  - vértices são as faces de G,

Dualidade



- **Face** de um desenho planar G de um grafo: região conexa do $\mathbb{R}^2$ delimitada por arestas de G.
- **Grafo dual** de um desenho planar G: grafo G^* onde:
  - vértices são as faces de G,
  - uma aresta e^* para cada aresta e de G, cujas pontas são as faces que e delimita em G.

Dualidade



- **Face** de um desenho planar G de um grafo: região conexa do $\mathbb{R}^2$ delimitada por arestas de G.
- **Grafo dual** de um desenho planar G: grafo G^* onde:
  - vértices são as faces de G,
  - uma aresta e^* para cada aresta e de G, cujas pontas são as faces que e delimita em G.
- Grafo dual de um desenho planar de um grafo G é dito um grafo dual de G.

Dualidade - teoremas

Dualidade - teoremas

- Um grafo dual de um grafo planar também é planar.

Dualidade - teoremas

- Um grafo dual de um grafo planar também é planar.

- Se G^* é um grafo dual de G, então G é isomorfo a um grafo dual de G^*.

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então,

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$.

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e,

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ok

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ok

H.I.: Seja $f \in \mathbb{N}$ tal que $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$, para $|F(G)| \leq f$.

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ok

H.I.: Seja $f \in \mathbb{N}$ tal que $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$, para $|F(G)| \leq f$.

Passo: $|F(G)| = f + 1$. G' o desenho ao remover aresta que separa duas faces distintas.

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ok

H.I.: Seja $f \in \mathbb{N}$ tal que $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$, para $|F(G)| \leq f$.

Passo: $|F(G)| = f + 1$. G' o desenho ao remover aresta que separa duas faces distintas.

1. $|V(G')| + |F(G')| = |E(G')| + 2$.

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ok

H.I.: Seja $f \in \mathbb{N}$ tal que $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$, para $|F(G)| \leq f$.

Passo: $|F(G)| = f + 1$. G' o desenho ao remover aresta que separa duas faces distintas.

1. $|V(G')| + |F(G')| = |E(G')| + 2$. (por HI)
2. $|V(G)| + |F(G)| = |V(G')| + |F(G')| + 1$

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ok

H.I.: Seja $f \in \mathbb{N}$ tal que $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$, para $|F(G)| \leq f$.

Passo: $|F(G)| = f + 1$. G' o desenho ao remover aresta que separa duas faces distintas.

1. $|V(G')| + |F(G')| = |E(G')| + 2$. (por HI)
2. $|V(G)| + |F(G)| = |V(G')| + |F(G')| + 1 = |E(G')| + 2 + 1$

Teorema 99

- G é um desenho planar de um grafo conexo
- $F(G)$ é o conjunto de faces de G
- então, $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$.

Demonstração.

Por indução em $|F(G)|$.

Base: $|F(G)| = 1$. G é árvore e, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ok

H.I.: Seja $f \in \mathbb{N}$ tal que $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$, para $|F(G)| \leq f$.

Passo: $|F(G)| = f + 1$. G' o desenho ao remover aresta que separa duas faces distintas.

1. $|V(G')| + |F(G')| = |E(G')| + 2$. (por HI)
2. $|V(G)| + |F(G)| = |V(G')| + |F(G')| + 1 = |E(G')| + 2 + 1$
   $= |E(G)| + 2$.

□

Corolario 102

Todo grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $3n - 6$ arestas.

Corolario 102

Todo grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $3n - 6$ arestas.

Demonstração.

Exercício 135. $\square$

Corolario 102

Todo grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $3n - 6$ arestas.

Demonstração.

Exercício 135. $\square$

Corolário

Um grafo completo de cinco vértices não é planar.

Corolario 104

Todo grafo bipartido planar simples com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $2n - 4$ arestas.

Corolario 104

Todo grafo bipartido planar simples com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $2n - 4$ arestas.

Demonstração.

Exercício 136. $\square$

Corolario 104

Todo grafo bipartido planar simples com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $2n - 4$ arestas.

Demonstração.

Exercício 136. $\square$

Corolário

Um grafo bipartido completo com três vértices em cada parte não é planar.

Corolario 106

Se G é um grafo planar simples, então $\delta(G) \leq 5$.

Corolario 106

Se G é um grafo planar simples, então $\delta(G) \leq 5$.

Demonstração.

Exercício 137. $\square$

Subdivisões

H é *subdivisão* de G quando

Subdivisões

H é *subdivisão* de G quando

- $V(G) \subseteq V(H)$

Subdivisões

H é *subdivisão* de G quando

- $V(G) \subseteq V(H)$
- cada aresta $\{u, v\}$ de G corresponde um caminho de u a v em H

Subdivisões

H é *subdivisão* de G quando

- $V(G) \subseteq V(H)$
- cada aresta $\{u, v\}$ de G corresponde um caminho de u a v em H
- os vértices internos destes caminhos tem grau 2 em H.

Subdivisões

H é *subdivisão* de G quando

- $V(G) \subseteq V(H)$
- cada aresta $\{u, v\}$ de G corresponde um caminho de u a v em H
- os vértices internos destes caminhos tem grau 2 em H.

Teorema

Um grafo G é planar se e somente se toda subdivisão de G é planar.

Teorema 108 (Kuratowski, 1930)

Um grafo G é planar se e somente se não tem subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo.

Teorema das Quatro Cores

Todo grafo planar é 4–colorível

Teorema das Quatro Cores

Todo grafo planar é 4–colorível

Demonstração.

Appel and Haken (1977) e Appel et al. (1977). $\square$