

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Exercícios

2 de maio de 2023

Sumário

1 Fundamentos	3
2 Representação Computacional	7
3 Subgrafos	8
4 Passeios, Caminhos e Ciclos	12
5 Árvores, Florestas e Arborescências	18
6 Cortes e Conectividade	19
7 Busca em Largura	21
8 Os Algoritmos de Prim e Dijkstra	22
9 Busca em Profundidade	24
10 Busca em Grafos Direcionados	25
11 Emparelhamentos	28
12 Distâncias entre Todos os Pares de Vértices	28

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

- : exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.
- @: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.
- ★: exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.
- #: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Fundamentos

- 1*. Exiba a fronteira do conjunto $\{d_0, d_1, d_3\}$ no grafo da direita do Exercício 8.
- 2*. Quantas arestas tem um grafo completo de n vértices? Justifique sua resposta.
- 3*. Se um vértice tem k vizinhos em G , quantos vizinhos ele tem em $\overline{G}$? Justifique sua resposta.
- 4*. Quantos grafos diferentes existem com o conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$? Justifique.
- 5#. Seja G um grafo. Dados $X \subseteq V(G)$ e $n \in \mathbb{N}$ vamos definir $\Gamma_G^n(X)$ como segue.

$$\Gamma_G^n(X) := \begin{cases} X, & \text{se } n = 0, \\ \Gamma_G(\Gamma_G^{n-1}(X)), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

- (a) Exiba os conjuntos $\Gamma_G^n(\{a_0, b_2\})$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, onde G é o grafo da esquerda no Exercício 8.
- (b) É verdade que para qualquer grafo G e qualquer conjunto X de seus vértices, existe um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_G^n(X) = V(G)$? Justifique.
- (c) É verdade que para qualquer grafo G e qualquer conjunto X de seus vértices, existe um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_G^n(X) = \Gamma_G^{n+1}(X)$? Justifique.
- 6*. Seja $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_n\}$ uma família de subconjuntos de um conjunto A . O *grafo de interseção de $\mathcal{F}$* é o grafo $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ dado por

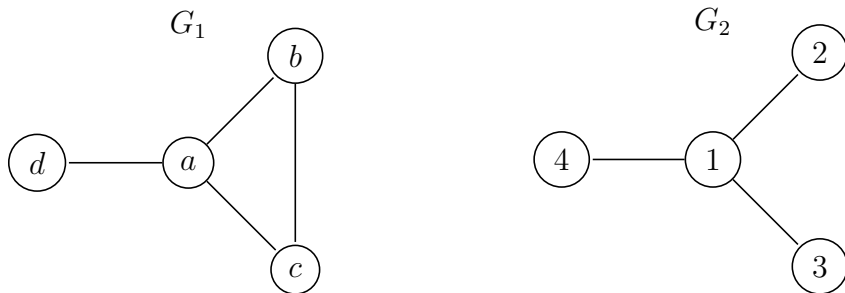
$$\begin{aligned} V(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) &:= \mathcal{F}, \\ E(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) &:= \{\{A_i, A_j\} \mid A_i \cap A_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

- (a) Seja G o grafo interseção de $\left(\begin{smallmatrix} 1, \dots, 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Desenhe G .
- (b) Desenhe $\overline{G}$.
- (c) Verifique que $\overline{G}$ é (isomorfo a) o Grafo de Petersen.

Dados inteiros n e k , o complemento do grafo interseção de $\binom{\{1, \dots, n\}}{k}$ é conhecido como *grafo de Kneser* com parâmetros n e k .

7*. Um grafo G é um *grafo de intervalo* se é o grafo de interseção¹ de um conjunto de intervalos fechados de $\mathbb{R}$.

(a) Os grafos G_1 e G_2 abaixo são grafos de intervalo? Justifique.



(b) Dê um exemplo de um grafo que **não é** grafo de intervalo e prove que seu exemplo está correto.

8*. Prove que os grafos abaixo são isomorfos.



9*. Um grafo é *auto-complementar* se é isomorfo ao seu complemento.

- Dê um exemplo de um grafo auto-complementar não trivial.
- Prove se G é auto-complementar, então $|V(G)|$ ou $|V(G)| - 1$ é múltiplo de 4.

¹Veja o Exercício 6

- 10*. (a) Se G é um grafo de 14 vértices e 25 arestas cujos vértices tem graus 3 ou 5, quantos vértices tem grau 3 e quantos tem grau 5?
 (b) Generalize o raciocínio para um grafo de n vértices e m arestas cujos vértices tem graus d_1 ou d_2 .

- 11*. Prove que se G é um grafo satisfazendo

$$\begin{aligned}\delta(G) &> 0, \\ |E(G)| &< |V(G)|,\end{aligned}$$

então G tem (pelo menos) dois vértices de grau 1.

- 12*. Existe algum grafo não trivial em que todos os vértices tem graus distintos? Justifique.

13. Assim como se define o grau mínimo e o grau máximo, é possível definir o *grau médio* de um grafo G .

- (a) Denotando por $\bar{\delta}(G)$ o grau médio de um grafo G , proponha uma expressão para $\bar{\delta}(G)$ em função de $|V(G)|$ e $|E(G)|$.
 (b) Prove que, para todo grafo G ,

$$\delta(G) \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G).$$

14. Proponha uma definição para o conceito de *densidade* de um grafo não trivial de tal maneira que se $\rho(G)$ é a densidade de um grafo não trivial G , então

- (a) $\rho(G) = 0$ se e somente se $E(G) = \emptyset$.
 (b) $\rho(G) = 1$ se e somente se G é completo.
 (c) $\rho(G) = 1 - \rho(\bar{G})$, para todo grafo G .
 (d) fixado o número de vértices de um grafo, $\rho(G)$ é estritamente crescente em função do número de arestas, isto é, se $|V(G)| = |V(G')|$, então $\rho(G) > \rho(G')$ se e somente se $|E(G)| > |E(G')|$.

Prove que sua definição satisfaz cada uma destas propriedades.

15. Prove que, para todo grafo G temos

$$M_G^2[v, v] = \delta_G(v), \text{ para todo } v \in V(G).$$

16*. Prove que, se G é um grafo direcionado, então

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v),$$

17*. Prove que

$$M_{G^T} = (M_G)^T,$$

para todo grafo direcionado G , onde M^T denota a matriz transposta da matriz M .

18. Prove que, para todo grafo direcionado G temos

$$M_G M_G^T[v, v] = \delta_G^+(v), \text{ para todo } v \in V(G).$$

2 Representação Computacional

- 19*. Descreva como computar eficientemente o grafo transposto de um grafo direcionado G , quando G é representado

- (a) por listas de adjacência, ou
- (b) pela matriz de adjacência.

Expresse a eficiência de ambas as soluções em termos assintóticos em função do tamanho do grafo G .

20. Considere a idéia de evitar o desperdício de espaço na representação da matriz de adjacência de um grafo G com $V(G) = \{1, \dots, n\}$ usando um vetor m contendo somente os elementos abaixo da diagonal principal de M_G , de tal maneira que

$$M_G[u, v] = \begin{cases} m[f(u, v)], & \text{se } u > v, \\ 0, & \text{se } u = v, \\ m[f(v, u)], & \text{se } u < v, \end{cases}$$

onde $f: \{(u, v) \in V(G) \times V(G) \mid u < v\} \rightarrow \{0, \dots, N(n) - 1\}$ é a função que faz a correspondência entre os elementos de M_G e m , e $N(n)$ é o tamanho do vetor m .

- (a) Dê uma expressão² para $N(n)$.
- (b) Dê uma expressão³ para $f(u, v)$.
- (c) Dê uma expressão⁴ para $f^{-1}(k): 0 \leq k < N(n)$.
- (d) Escreva a função

```
unsigned int vizinho(unsigned int *m, unsigned int u, unsigned int v);
```

que devolve o valor de $M_G[u, v]$, onde M_G é representado pelo vetor m tal como descrito acima.

- 21*. Suponha que a representação de um número inteiro consome i bytes e a representação de um apontador consome a bytes e considere o problema de representar um grafo ponderado de n vértices e m arestas nesta linguagem.

²**Sugestão:** Descreva $N(n)$ por meio de uma recorrência e daí resolva esta recorrência.

³**Sugestão:** Observe que $f(u, 1) = N(u - 1)$ e que $f(u, v) = f(u, 1) + v - 1$.

⁴**Sugestão:** Observe que $f(u, 1) \leq f(u, v) \leq f(u, u - 1)$.

- (a) Expresse o total de memória consumido na representação do grafo em função de i , a , n e m ao usar
 - i. matriz de adjacência
 - ii. listas de adjacência
- (b) Indique como decidir, em função de i , a , n e m , qual das duas representações ocupa menos memória.

3 Subgrafos

- 22*. Dê um exemplo de um grafo G com subgrafos H_1 , H_2 e H_3 tais que
- (a) o grafo H_1 é um subgrafo induzido por vértices;
 - (b) o grafo H_2 é um subgrafo induzido por arestas mas não é um subgrafo induzido por vértices;
 - (c) o grafo H_3 não é um subgrafo induzido por arestas nem por vértices.
23. Seja G um grafo e seja X um conjunto de vértices de G . É verdade que todo subgrafo de G induzido por vértices pode ser obtido a partir de G pela remoção de um conjunto de vértices?

24. Se G é um grafo e α e β são arestas de G , é verdade que

$$(G - \alpha) - \beta = (G - \beta) - \alpha?$$

Justifique.

- 25*. Seja G um grafo e seja X um conjunto de arestas de G . É verdade que

$$G - X = G[E(G) - X]?$$

Justifique.

É verdade que todo subgrafo de G induzido por arestas pode ser obtido a partir de G por uma sequência de remoções de arestas?

26*. Seja G um grafo e seja v um vértice de G . Prove que

$$|E(G - v)| = |E(G)| - \delta_G(v).$$

27. Seja G um grafo e sejam $A \subseteq E(G)$ e $V = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$.

É verdade que $G[A] = G[V]$? Justifique.

28*. Prove que se G é um grafo, então,

- (a) Um conjunto X é independente em G se e somente se X é clique em $\overline{G}$.
- (b) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

29#. Considere o seguinte algoritmo guloso para computar um conjunto independente de um grafo G .

Independente(G)
$I \leftarrow \emptyset$
Enquanto $V(G) \neq \emptyset$
$v \leftarrow$ vértice de grau mínimo em G
acrescente v a I
remova v e $\Gamma_G(v)$ de G
Devolva I

- (a) Sejam n e Δ , respectivamente, o número de vértices no grafo G e seu grau máximo ao início do algoritmo. Prove que, ao início do laço, sempre é verdade que⁵ $n \leq |V(G)| + |I|(\Delta + 1)$.
- (b) Conclua daí que $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$, para todo grafo G ,
- (c) Conclua também que $\omega(G) \geq \frac{|V(G)|}{|V(G)| - \delta(G) + 1}$, para todo grafo G ,

⁵**Sugestão:** Para facilitar a expressão do seu raciocínio, defina G_i e I_i como os valores das variáveis G e I no algoritmo ao início da i -ésima iteração

30[#]. Prove que todo grafo com pelo menos 6 vértices tem uma clique ou um conjunto independente com 3 vertices.

6

31^{*}. Prove que para todo grafo G , $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

32^{*}. Seja H um subgrafo de um grafo G . Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não, justificando sua resposta em cada caso.

(a) $\alpha(H) \leq \alpha(G)$?

(b) $\alpha(G) \leq \alpha(H)$?

(c) $\omega(G) \leq \omega(H)$?

(d) $\omega(H) \leq \omega(G)$?

33[@]. Prove que o problema de determinar o tamanho máximo de um conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil⁷.

34[@]. Prove que o problema de determinar se um grafo dado é subgrafo induzido de outro grafo também dado é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil⁸.

35^{*}. Prove que um grafo G é bipartido se e somente se $E(G) = \partial_G(X)$ para algum $X \subseteq V(G)$ e que, neste caso, $\{X, V(G) - X\}$ é uma bipartição de G .

36^{*}. Prove que um grafo bipartido de n vértices tem no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas.

⁶**Sugestão:**

Pense na seguinte formulação, equivalente à do enunciado: qualquer coloração das arestas de um grafo completo de 6 vértices com 2 cores vai ter um triângulo monocromático como subgrafo.

⁷**Sugestão:** Pense em como resolver o Problema do Conjunto Independente a partir de um algoritmo para este problema

⁸**Sugestão:** Pense em como resolver o Problema do Conjunto Independente a partir de um algoritmo para este problema

37. Prove que o complemento de um grafo bipartido G é conexo se e somente se G não é (bipartido) completo.
- 38[@]. Prove que o problema de determinar o número cromático de um grafo é $\mathcal{NP}$ -Difícil.
- 39*. Prove que o algoritmo abaixo nem sempre devolve uma coloração mínima do grafo G .

Colore(G)

$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$
 Enquanto *existe vértice de G que não pertence a nenhum conjunto em $\mathcal{C}$*
 $v \leftarrow$ vértice de G que não pertence a nenhum conjunto em $\mathcal{C}$
 Se v não tem vizinho em algum conjunto $K \in \mathcal{C}$
 acrescente v ao conjunto K
 Senão
 acrescente o conjunto $\{v\}$ a $\mathcal{C}$
 Devolva $\mathcal{C}$

4 Passeios, Caminhos e Ciclos

40*. Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência, considerada como uma matriz booleana.

(a) Prove⁹ que, para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

$$M_G^k[u, v] = 1 \text{ se e somente se existe passeio de tamanho } k \text{ de } u \text{ a } v \text{ em } G$$

(b) Conclua que

$$M_G^*[u, v] = 1 \text{ se e somente se existe passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

41*. Baseado no enunciado do Exercício 40, proponha um algoritmo que recebe como entrada um grafo G e dois de seus vértices, u e v e devolve a distância de u a v em G .

42*. Baseado no enunciado dos Exercícios 40 e 40, proponha um algoritmo que computa o diâmetro de um grafo dado.

43*. Seja M uma matriz quadrada booleana e seja

$$M^* := \sum_{k \in \mathbb{N}} M^k.$$

Prove que

$$M^* = \sum_{k=0}^n M^k, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

44*. Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência, considerada como uma matriz de inteiros. Prove¹⁰ que, para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$, $M_G^k[u, v]$ é o número de passeios de tamanho k de u a v em G .

⁹Sugestão: Indução em k .

¹⁰Sugestão: Indução em k .

- 45[#]. Um estudante propôs o seguinte algoritmo para contar o número de triângulos de um grafo G dado.

NumeroTriangulos(G)
$M \leftarrow$ matriz de adjacência de G $T \leftarrow M^3$ Devolva $\frac{1}{6} \sum_{v \in V(G)} T[v, v]$

- (a) Prove que o algoritmo está correto¹¹.
- (b) Proponha uma modificação do algoritmo para contar o número de ciclos direcionados de tamanho 3 num grafo direcionado.
- 46^{*}. Um grafo e seu complemento podem ser
- (a) ambos conexos?
- (b) ambos desconexos?
- Justifique.
47. Descreva em palavras os grafos k -regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.
- 48[@]. Prove que um grafo é bipartido se e somente se não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas.
49. Formule e prove uma versão para grafos direcionados do enunciado do Exercício 40.
50. Formule e prove uma versão para grafos direcionados do enunciado do Exercício 44.
- 51[@]. Prove que todo segmento de caminho mínimo em um grafo G é caminho mínimo em G .
- 52[#]. Prove que se P e Q são dois caminhos de tamanho máximo em um grafo conexo G , então P e Q tem um vértice em comum.

¹¹**Sugestão:** Use o resultado enunciado no Exercício 44.

53. Seja G um grafo conexo e seja P um caminho de tamanho máximo em G . Prove¹² que o tamanho de um caminho de tamanho máximo em $G - V(P)$ é menor que $|P|$.
- 54[@]. Prove que se P é um caminho direcionado maximal em um grafo direcionado G , então
- todos os vizinhos de entrada de seu vértice inicial estão em P , e
 - todos os vizinhos de saída seu vértice final estão em P .
55. Seja G um grafo direcionado sem laços e seja $m := \min \{\delta^-(G), \delta^+(G)\}$. Prove que
- (a) o grafo G tem caminho direcionado de tamanho m .
 - (b) se $m > 0$, então G tem ciclo direcionado de tamanho pelo menos $m + 1$.
- 56*. Prove que todo passeio direcionado de tamanho mínimo entre dois vértices de um grafo direcionado é um caminho direcionado.
- 57*. Prove que o grafo condensado de um grafo direcionado é um grafo direcionado acíclico.
- 58*. É verdade que existe ciclo em um grafo G se e somente se existem passeios distintos com as mesmas pontas em G ? Justifique.
- 59*. É verdade que existe ciclo num grafo se e somente se existe um passeio fechado nesse grafo? Justifique.
- 60*. Prove que $\gamma(G) > 3$ se e somente se as vizinhanças de u e v são disjuntas para toda aresta $\{u, v\} \in E(G)$.
- 61*. Prove que os componentes de um grafo G são todos caminhos ou ciclos se e somente se $\Delta(G) \leq 2$.

¹²**Sugestão:** use o Exercício 52

62*. Prove que todo grafo G tem

- (a) caminho de tamanho (pelo menos) $\delta(G)$ e,
- (b) ciclo de tamanho pelo menos $\delta(G) + 1$, se $\delta(G) \geq 2$.

63*. Prove que¹³, se $k > 1$, então todo grafo k -regular tem

- (a) um caminho de tamanho k ;
- (b) um ciclo de tamanho pelo menos $k + 1$.

64*. Prove que se um grafo G não é acíclico, então

$$\text{diam}(G) \geq \left\lfloor \frac{\gamma(G)}{2} \right\rfloor.$$

65*. Prove que todo grafo direcionado acíclico tem fonte.

66[®]. Prove que determinar o tamanho do maior ciclo de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -difícil.

67*. Seja G um grafo não vazio e seja $v \in V(G)$. Seja G_v o grafo obtido ao acrescentar-se a G três novos vértices, v' , u e w e as arestas $\{u, v\}$, $\{w, v'\}$ e $\{\{v', r\} \mid r \in \Gamma_G(v)\}$. Prove que G é hamiltoniano se e somente se G_v tem caminho hamiltoniano.

68*. Prove que decidir se um grafo tem caminho hamiltoniano é um problema $\mathcal{NP}$ -difícil¹⁴.

69*. Prove que o problema de decidir se um grafo direcionado tem caminho hamiltoniano é $\mathcal{NP}$ -difícil.

70*. Um *grafo direcionado hamiltoniano* é um grafo direcionado que tem ciclo hamiltoniano direcionado.

¹³**Sugestão:** Use o Exercício 62.

¹⁴**Sugestão:** Use o Exercício 67

Seja G um grafo e seja $D(G)$ o grafo direcionado dado por

$$\begin{aligned} V(D(G)) &= V(G), \\ A(D(G)) &= \bigcup_{\{u,v\} \in E(G)} \{(u,v), (v,u)\}. \end{aligned}$$

- (a) Prove que G é hamiltoniano se e somente se $D(G)$ é hamiltoniano e conclua, a partir daí, que o problema de decidir se um grafo direcionado é hamiltoniano é $\mathcal{NP}$ -Difícil.
- (b) Conclua que o problema de decidir se um grafo direcionado é hamiltoniano é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

71*. Seja G um grafo e seja G' o grafo que se obtém ao acrescentar a G um novo vértice v e uma aresta ligando v a cada vértice de G .

Prove que G' é hamiltoniano se e somente se G tem caminho hamiltoniano.

72*. Seja G um grafo direcionado e seja (G', w) um grafo direcionado com pesos nas arestas completo com o mesmo conjunto de vértices de G onde w é dada por

$$w(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{se } (u, v) \in A(G), \\ 1, & \text{se } (u, v) \notin A(G) \end{cases}$$

Prove que G é hamiltoniano se e somente se a resposta da instância (G', w) do problema do **Caixeiro Viajante** tem peso 0. Conclua daí que o problema do **Caixeiro Viajante** é $\mathcal{NP}$ -difícil.

73*. Considere o seguinte algoritmo para o Problema do Caixeiro Viajante

$CV(G, w)$

$(i, f) \leftarrow$ arco de peso mínimo em G
 $P \leftarrow (i, f)$
Enquanto $V(P) \neq V(G)$
 $u \leftarrow$ origem de um arco de peso mínimo em $\partial^-(i)$ fora de $V(P)$
 $v \leftarrow$ destino de um arco de peso mínimo em $\partial^+(f)$ fora de $V(P)$
 Se $w(u, i) \leq w(f, v)$
 $i \leftarrow u$
 acrescente i ao início de P
 Senão
 $f \leftarrow v$
 acrescente f ao final de P
 acrescente i ao final de P
 Devolva P

- (a) Mostre que o algoritmo está **errado**, exibindo uma instância do Problema do Caixeiro Viajante para a qual o algoritmo não computa uma resposta correta.
- (b) Mostre que o algoritmo está **muito errado**, provando que sua resposta pode ficar arbitrariamente longe da resposta correta, isto é, prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma instância (G, w) do Problema do Caixeiro Viajante tal que

$$\text{OPT}(G, w) < w(\text{CV}(G, w)) - n,$$

onde $\text{OPT}(G, w)$ denota o peso de uma solução da instância (G, w) .

5 Árvores, Florestas e Arborescências

74[@]. Prove que todo grafo conexo com n vértices e $n - 1$ arestas é árvore¹⁵.

75^{*}. Prove que o grafo G é uma floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|.$$

76^{*}. Prove que toda árvore T tem (pelo menos) $\Delta(T)$ folhas.

77^{*}. Prove que se T é uma árvore então

$$|\mathcal{C}(T - v)| = \delta_T(v),$$

para todo $v \in V(T)$.

78^{*}. É verdade que todo grafo de n vértices com n (ou mais) arestas tem ciclo? Justifique.

79[#]. Um vértice v é *central* em um grafo G se a maior distância de v a qualquer outro vértice de G é a menor possível, isto é, se

$$\max \{d_G(v, u) \mid u \in V(G)\}$$

é mínimo.

(a) Seja T uma árvore com pelo menos 3 vértices e seja $T' = T - F$, onde F é o conjunto das folhas de T . Prove que T e T' tem os mesmos centros,

(b) Conclua daí que toda a árvore tem um único centro ou tem dois centros vizinhos.

80. Prove que um grafo direcionado G tem arborescência geradora se e somente se G tem um vértice r a partir do qual todo vértice de G é alcançável.

81^{*}. Prove que o grafo subjacente de uma arborescência é uma árvore.

¹⁵**Sugestão:** Use o Exercício 11.

6 Cortes e Conectividade

82*. É possível que toda aresta de um grafo não trivial seja de corte? Justifique sua resposta e, em caso positivo, caracterize tais grafos.

83*. Prove que um grafo G é conexo se e somente se

$$\partial_G(X) \neq \emptyset, \text{ para todo } \emptyset \subset X \subset V(G).$$

84. Prove que um grafo direcionado G é fortemente conexo se e somente se

$$\partial_G^+(X) \neq \emptyset, \text{ para todo } \emptyset \subset X \subset V(G).$$

85*. É possível que todo vértice de um grafo não trivial seja de corte? Justifique sua resposta e, em caso positivo, caracterize tais grafos.

86*. Dê um exemplo de um grafo conexo G para o qual

$$\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G).$$

87*. É verdade que

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

para todo grafo conexo G ?

Justifique.

88. Seja G um grafo, T uma árvore geradora de G e $v \in V(G)$.

(a) É verdade que se v tem grau maior que 1 em T , então v é vértice de corte em G ? Justifique.

(b) É verdade que se v é vértice de corte em G então v tem grau maior que 1 em T ? Justifique.

89. Prove que todo vértice de corte em um grafo é vértice de corte em qualquer árvore geradora deste grafo.

- 90*. Considere o jogo em que o jogador recebe um grafo conexo. O objetivo é remover os vértices deste grafo, um a um, sem desconectar o grafo em nenhum momento. O jogador vence se conseguir remover todos os vértices.
- (a) Sempre é possível vencer o jogo¹⁶? Justifique.
 - (b) Descreva um algoritmo para vencer o jogo nos casos em que é possível vencer.
- 91#. Prove que um vértice de um grafo G faz parte de dois blocos distintos de G se e somente é vértice de corte.
- 92*. É verdade que se u e v são vértices de corte vizinhos em um grafo então a aresta $\{u, v\}$ é de corte neste grafo? Justifique.
- 93*. Um vértice de corte em um grafo conexo pode ser folha de uma árvore geradora deste grafo? Justifique.

¹⁶**Sugestão:** Use o ex. 85

7 Busca em Largura

94*. Sejam

$$\begin{aligned}A_1 &= \{1, 4, 8\}, \\A_2 &= \{1, 5, 9\}, \\A_3 &= \{2, 4, 6\}, \\A_4 &= \{2, 5, 7\}, \\A_5 &= \{3, 6, 10\} \text{ e} \\A_6 &= \{3, 7, 8\}\end{aligned}$$

e seja G o grafo de interseção¹⁷ de $\{A_1, \dots, A_6\}$.

- (a) Faça um desenho deste grafo.
- (b) Faça uma busca em largura em G a partir do vértice A_1 e apresente
 - i. os níveis de cada vértice, e
 - ii. as arestas que não estão na árvore enraizada resultante desta busca.
- (c) Baseado nesta busca, diga se G é conexo. Justifique sua resposta.
- (d) Baseado nesta busca, diga se G é bipartido. Justifique sua resposta.

95*. Seja T uma árvore de distâncias mínimas de raiz r de um grafo G . Prove que

$$\text{diam}(T) \leq 2\text{diam}(G).$$

96*. Prove que se (T, r) é a árvore enraizada resultante de uma busca em largura em um grafo conexo G , então rTv é um caminho mínimo em G para todo $v \in V(G)$.

97*. Prove que se (T, r) é árvore enraizada resultante de uma busca em largura sobre um grafo conexo G , então

$$|d_G(r, u) - d_G(r, v)| \leq 1, \text{ para todo } \{u, v\} \in E(G - T).$$

¹⁷Veja o Exercício 6.

- 98*. Seja (T, r) a árvore enraizada resultante de uma busca em largura sobre um grafo conexo G . Prove que G é bipartido se e somente se $d(r, u)$ e $d(r, v)$ tem paridades diferentes para toda aresta $\{u, v\} \in G - E(T)$.¹⁸
- 99*. Proponha um algoritmo que recebe um grafo de n vértices e m arestas e responde se este grafo é bipartido em tempo $O(n + m)$.
- 100*. Seja (T, r) a árvore enraizada resultante de uma busca em largura sobre um grafo conexo G . Prove que G é bipartido se e somente se $d(r, u) \neq d(r, v)$ para toda aresta $\{u, v\} \in G - E(T)$.
- 101*. Proponha um algoritmo baseado no algoritmo de busca em largura para detectar um ciclo de tamanho ímpar em um grafo, caso exista.
- 102*. Prove que se F é a floresta direcionada resultante de uma busca em largura então toda aresta em $G - S(F)$ é cruzada com relação a F .
- 103*. Prove que se T é a árvore enraizada de raiz r resultante de uma busca em largura em um grafo conexo G , então
- $$d_T(r, v) = d_G(r, v), \text{ para todo } v \in V(G).$$
- 104*. Caracterize as árvores enraizadas resultantes de uma busca em largura em um grafo bipartido completo.

8 Os Algoritmos de Prim e Dijkstra

- 105*. É verdade que se um grafo com pesos (G, w) é tal que os pesos das arestas são todos distintos entre si então o grafo tem uma única árvore geradora mínima? Justifique.
- 106*. Prove que se (G, w) é um grafo conexo com pesos não negativos então existe uma árvore de caminhos mínimos geradora de G enraizada em v para todo $v \in V(G)$.

¹⁸**Sugestão:** Use os resultados dos Exercícios 96 e 97

- 107*. Seja T uma árvore de distâncias mínimas de raiz r de um grafo com pesos (G, w) . Prove que

$$\text{diam}(T) \leq 2\text{diam}(G).$$

- 108*. O seguinte algoritmo foi proposto para determinar um caminho de comprimento máximo em um grafo conexo com pesos positivos. O algoritmo está correto? Justifique.

CaminhoMaisComprido (G, w)

$P \leftarrow$ caminho vazio

Para *cada* $r \in V(G)$

$(T, r) \leftarrow$

árvore enraizada obtida pelo Algoritmo de Dijkstra a partir do vértice r

$u \leftarrow$ vértice mais distante de r em T

$v \leftarrow$ vértice de $V(T) - V(rTu)$ mais distante de r em T

Se $|uTv| > |P|$

$P \leftarrow uTv$

Devolva P

9 Busca em Profundidade

109*. Characterize

- (a) as árvores enraizadas produzidas por busca em largura em um grafo completo, e
- (b) as árvores enraizadas produzidas por busca em profundidade em um grafo completo.

110*. Characterize as árvores enraizadas resultantes de uma busca em profundidade de um grafo bipartido completo.

111*. Um estudante propõe o seguinte algoritmo para encontrar um caminho de comprimento máximo em um grafo.

$\text{CaminhoMaisLongo}(G)$
encontre um vértice r de G que não é de corte $(T, r) \leftarrow$ árvore enraizada de busca em profundidade em G a partir de r Devolva <i>caminho de distância máxima de r a uma folha de T</i>

O algoritmo está correto? Justifique.

112*. Considere a seguinte ideia para determinar se um grafo de n vértices tem ciclo hamiltoniano.

Se o grafo tem ciclo hamiltoniano, então uma busca em profundidade “iniciada pelo vértice certo” vai encontrá-lo, pois haverá um vértice v a distância $n - 1$ do vértice inicial r e v será vizinho de r .

Para garantir que o ciclo hamiltoniano seja encontrado, será suficiente executar n buscas em profundidade, cada uma iniciando por um dos vértices do grafo. Se nenhuma delas localizar um ciclo hamiltoniano é porque o grafo não tem ciclo hamiltoniano.

A ideia está correta? Justifique sua resposta.

10 Busca em Grafos Direcionados

- 113*. Explique como decidir em tempo $O(n + m)$ se um grafo direcionado com n vértices e m arcos é acíclico e, em caso negativo, encontrar um ciclo direcionado.
- 114*. Apresente um algoritmo que recebe um grafo direcionado G e devolve a arborescência resultante de uma busca em largura em G^T . Para cada $v \in V(G)$, as vizinhanças de entrada e saída de v estão disponíveis.
- 115*. Apresente um algoritmo que recebe um grafo direcionado G e devolve a arborescência resultante de uma busca em profundidade em G^T . Para cada $v \in V(G)$, as vizinhanças de entrada e saída de v estão disponíveis.
- 116*. Seja G um grafo direcionado e considere uma execução do algoritmo `BuscaProfundidade( $G$ )`. Seja F a floresta direcionada induzida pelos valores de $v.\text{pai} \mid v \in V(G)$ e, para cada $v \in V(G)$ sejam $v.\text{pre}$ e $v.\text{pos}$ os índices de pré-ordem e pós-ordem computados.

Prove que

- (a) o arco (u, v) é arco de F ou arco de avanço com relação a F , se e somente se $u.\text{pre} < v.\text{pre} < v.\text{pos} < u.\text{pos}$.
- (b) o arco (u, v) é arco cruzado com relação a F , se e somente se $v.\text{pre} < v.\text{pos} < u.\text{pre} < u.\text{pos}$.
- (c) o arco (u, v) é arco de retorno com relação a F , se e somente se $v.\text{pre} < u.\text{pre} < u.\text{pos} < v.\text{pos}$.
- (d) A ordem $<$ induzida sobre $V(G)$ dada por

$$u < v := u.\text{pre} < v.\text{pre}, \text{ para todo } u, v \in V(G),$$

é uma pré-ordem de F .

- (e) A ordem $<$ induzida sobre $V(G)$ dada por

$$u < v := u.\text{pos} < v.\text{pos}, \text{ para todo } u, v \in V(G),$$

é uma pós-ordem de F .

- 117*. Prove que um grafo direcionado G é acíclico se e somente se qualquer floresta direcionada resultante de uma busca em profundidade sobre G não tem arcos de retorno.
- 118*. Prove que um grafo direcionado G admite ordenação topológica se e somente se é acíclico.
- 119*. Modifique o algoritmo de **Ordenação Topológica** discutido em aula de maneira que ele receba como entrada um grafo direcionado G e devolva,
- (a) uma ordenação topológica de G , se G é acíclico, ou
 - (b) um ciclo direcionado de G , caso contrário.
- 120*. O seguinte algoritmo, conhecido como *Algoritmo de Kahn*, que recebe um grafo direcionado G e devolve (uma lista com) a ordenação topológica de G ou um subgrafo de G sem fontes, caso G seja cíclico.
- Qual o seu tempo de execução no pior caso (em termos assintóticos) em função de $|V(G)|$ e $|E(G)|$?
- Com relação ao desempenho de pior caso (em termos assintóticos) como

ele se compara ao algoritmo discutido em aula?

OrdenaTopologica(G)
Se $V(G) = \emptyset$ Devolva $()$ Se G não tem fonte Devolva G $v \leftarrow$ fonte de G $R \leftarrow$ Ordena($G - v$) Se R é uma lista acrescente v ao início de R Devolva R
Ordena(G)
$Q \leftarrow$ lista vazia Enquanto $V(G) \neq \emptyset$ Se G não tem fonte Devolva G $v \leftarrow$ fonte de G remova v de G e enfile em Q Devolva Q

- 121*. Um estudante argumenta que um algoritmo mais simples do que o estudado para ordenar topologicamente um grafo direcionado seria o que devolve a pré-ordem induzida por uma busca em profundidade sobre o grafo a partir de suas fontes. O estudante está correto? Justifique.
- 122*. Prove que $(v_1, \dots, v_n)$ é uma ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico G se e somente se $(v_n, \dots, v_1)$ é uma ordenação topológica de G^T .
- 123*. Seja G um grafo direcionado e seja $r \in V(G)$. Sejam ainda T e T' , respectivamente, arborescências maximais de G e G^T com raiz r . Prove que $G[V(T) \cap V(T')]$ é componente forte conexo de G .

11 Emparelhamentos

124*. Seja M um emparelhamento em um grafo G e seja P um caminho M -aumentante. Prove que

(a) O conjunto $M \oplus E(P)$ é um emparelhamento em G .

(b) $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

125*. Seja G um grafo bipartido e seja $X \subseteq V(G)$. O Teorema de Hall afirma que, se não é possível cobrir o conjunto X por um emparelhamento, então $|\Gamma_G(S)| < |S|$ para algum $S \subseteq X$.

Explique como modificar o algoritmo que computa um emparelhamento máximo num grafo bipartido discutido em aula de maneira que, se o emparelhamento devolvido não cobre todos os vértices de G , então o algoritmo devolve também um conjunto $S \subseteq V(G)$ satisfazendo $|\Gamma_G(S)| < |S|$.

126*. Prove, usando o Teorema de Hall, que o grafo abaixo não tem emparelhamento que cobre todos os vértices.

127*. Seja G um grafo e sejam M_1 e M_2 dois emparelhamentos em G . É verdade que o grafo $G[M_1 \cup M_2]$ é bipartido? Justifique.

12 Distâncias entre Todos os Pares de Vértices

128*. Seja (G, w) um grafo com pesos nas arestas, sendo $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Prove que

$$d_{G,w}(i, j, k) = \begin{cases} \infty, & \text{se } k = 0 \text{ e } (v_i, v_j) \notin G, \\ w(v_i, v_j), & \text{se } k = 0 \text{ e } (v_i, v_j) \in G, \\ \min\{d_{G,w}(v_i, v_j, k-1), \\ d_{G,w}(v_i, v_k, k-1) + d_{G,w}(v_k, v_j, k-1)\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$, onde $d_{G,w}(i, j, k)$ denota o peso de um caminho mínimo de v_i a v_j em (G, w) cujos vértices internos estão em $\{v_1, \dots, v_k\}$.

- 129*. Seja G um grafo direcionado com pesos nas arestas, sendo $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, e seja M a matriz indexada por $[1..n] \times [1..n] \times [0..n]$ dada por

$$M[i, j, k] = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \text{ e } (v_i, v_j) \notin G, \\ 1, & \text{se } k = 0 \text{ e } (v_i, v_j) \in G, \\ M[i, j, k-1] \vee (M[i, k, k-1] \wedge M[k, j, k-1]), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove que $M[i, j, k] = 1$ se e somente se existe caminho direcionado de v_i a v_j em G cujos vértices internos estão em $\{1, \dots, k\}$, para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$.

- 130*. Uma certa biblioteca de rotinas para grafos implementa os algoritmos de Dijkstra e de Floyd–Warshall. Após alguma experimentação um programador concluiu que

$$\begin{aligned} dm \lg n &\leq T_D(n, m), \\ T_F(n) &\leq fn^3, \end{aligned}$$

onde d e f são constantes e $T_D(n, m)$ e $T_F(n)$ são os tempos de execução das implementações dos algoritmos de Dijkstra e de Floyd–Warshall, respectivamente, para um grafo com n vértices e m arestas.

O programador deseja implementar uma nova rotina para computar as distâncias entre todos os pares de vértices de um grafo que escolhe, em função do número de arestas e vértices do grafo, qual dos algoritmos usar.

Como deve ser feito o teste para tomar esta decisão? Justifique sua resposta.

- 131*. Seja G um grafo direcionado com pesos e seja $(v_1, \dots, v_n)$ uma ordenação de $V(G)$.

Dados $i, j \in [1..n]$ e $k \in [0..n]$, definimos o grafo

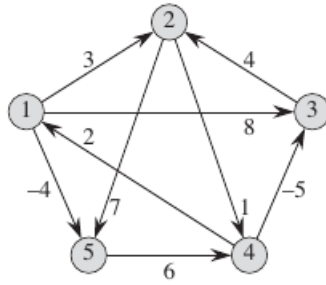
$$G(i, j, k) := G[\{v_i, v_j\} \cup \{v_1, \dots, v_k\}]$$

- (a) É verdade que os grafos $G(i, j, k)$ são conexos para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$? Justifique.
- (b) É verdade que P é (i, j, k) -caminho em G se e somente se é caminho em $G(i, j, k)$ para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$? Justifique.

132*. Seja G um grafo direcionado conexo com pesos e seja $(v_1, \dots, v_n)$ uma ordenação de $V(G)$. Dados $i, j \in [1..n]$ e $k \in [0..n]$, definimos o grafo

$$G(i, j, k) := G[\{v_i, v_j\} \cup \{v_1, \dots, v_k\}]$$

- (a) Desenhe os grafos $G(v_1, v_5, k)$ para $0 \leq k \leq 5$, onde G é o grafo abaixo.



- (b) É verdade que os grafos $G(i, j, k)$ são conexos para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$? Justifique.

Referências