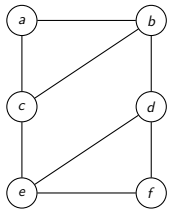
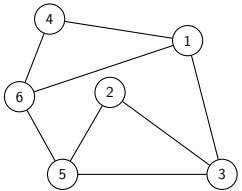
Questão 1 – Isomorfismo de grafos

[15 pontos] Mostre que os grafos G e H são isomorfos, fornecendo explicitamente um isomorfismo $f : V(G) \to V(H)$.



G



H

Solução. Uma bijeção que preserva as arestas é

$$f(a) = 4, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 6, \quad f(d) = 3, \quad f(e) = 5, \quad f(f) = 2.$$

Questão 2 – Coloração gulosa

(a) [15 pontos] Escolher sempre um vértice não colorido de maior grau garante coloração mínima?
(b) [20 pontos] Existe uma escolha que leva à coloração mínima? Encontrá-la é polinomial $\Leftrightarrow P = NP$?

(a) Não. Considere o ciclo C_6, com vértices a, b, c, d, e, f e arestas $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}$,{d,e}, {e,f}, $\{f, a\}$. Todos vértices têm grau 2 e $\chi(C_6) = 2$. A ordem a, d, b, e, c, f respeita as condições do algoritmo e gera os conjuntos $K_1 = \{a, d\}$, $K_2 = \{b, e\}$, $K_3 = \{c, f\}$, que utiliza três cores. Portanto, a estratégia não garante o ótimo.

(b) Sim. Considere uma coloração ótima que particiona os vértices em conjuntos independentes $S_1, \ldots, S_k$, onde $k = \chi(G)$. A sequência de vértices do grafo em que todos os vértices de S_i vem antes de todos de S_{i+1}, para $i = 1, \ldots, k-1$ faz com que o algoritmo use apenas k cores.

Complexidade: Provando que encontrar uma *sequência de vértices descrita acima* em tempo polinomial é possível se, e somente se, $P = NP$: computar tal sequência permite calcular $\chi(G)$ em tempo polinomial, resolvendo o problema NP-completo da k-coloração, o que implica que $P = NP$. Por outro lado, se $P = NP$, é possível calcular-se uma coloração ótima e obter a sequência descrita acima.

Observação: a afirmação sobre escolher apenas *um* vértice no início do laço não é equivalente à existência de uma sequência completa. Alguns alunos entenderam que se a afiramação trata-se de apenas um vértice. Quando bem justificado, o aluno pode argumentar que a estratégia não funciona no caso de ser apenas um vértice.

Questão 3 – Folhas de uma árvore

[25 pontos] Prove que toda árvore T tem pelo menos $\Delta(T)$ folhas.

Solução. Seja v um vértice de grau máximo, isto é, $d_T(v) = \Delta(T)$.

Ao remover v, a árvore se divide em exatamente $\Delta(T)$ componentes conexas: cada vizinho de v pertence a uma componente distinta, pois um caminho entre dois desses vizinhos que não passe por v produziria um ciclo em T.

Cada componente é uma árvore e tem pelo menos uma folha; Como as componentes são disjuntas, obtemos pelo menos uma folha distinta em cada uma delas. Logo,

$$\boxed{\text{número de folhas de } T \;\geq\; \Delta(T).}$$

Para a árvore com um único vértice, $\Delta(T) = 0$, e a desigualdade é imediata.

Questão 4 – NP-dificuldade do maior ciclo

[25 pontos] Prove que o problema de encontrar o tamanho do maior ciclo de um grafo é NP-difícil.

Solução. Reduzimos o problema CICLO HAMILTONIANO, que é NP-completo, ao problema de determinar o tamanho do maior ciclo.

Dada uma instância $G = (V(G), E(G))$ de CICLO HAMILTONIANO, seja $n = |V(G)|$. Suponha disponível um algoritmo A que devolve o tamanho ℓ do maior ciclo de G (adotando $\ell = 0$ se não existir ciclo).

Execute $A(G)$ e responda **SIM** se, e somente se, $\ell = n$.

$$\boxed{G \text{ possui ciclo hamiltoniano} \iff \ell = n.}$$

A equivalência vale porque um ciclo de comprimento n passa por todos os n vértices de G, e vice-versa. A transformação da instância é a identidade; a comparação com n tem custo polinomial.

Portanto, um algoritmo polinomial para o maior ciclo resolveria CICLO HAMILTONIANO em tempo polinomial. Assim, determinar o tamanho do maior ciclo é **NP-difícil**.

Rubrica para correção

Questão	Critério	Pontos
1	Apresenta bijeção correta entre os vértices	15
2(a).1	Responde corretamente	2
2(a).2	Contraexemplo compatível com a estratégia de grau máximo	8
2(a).3	Mostra que a coloração obtida não é mínima	5
2(b).1	Reconhece e justifica a falha da estratégia do item (a)	5
2(b).2	Justifica existência de execução ótima	10
2(b).3	Justifica $P = NP$ caso algoritmo funcione	5
(*)	Quando bem argumentado, o aluno pode ganhar os pontos de 2(b).2 e 2(b).3 respondendo falso usando a seguinte interpretação do enunciado: a existência de um vértice para a escolha apenas do primeiro vértice já garante coloração ótima (isto é falso).	
3.1	Remoção de vértice de grau máximo produz $\Delta(T)$ componentes	15
3.2	Prova que cada componente contém folha da árvore original	10
(*)	Outra alternativa: existe caminho saindo de vértice de grau máximo terminando em folha + argumento que cada folha é distinta (15+10=25pts).	
4.1	Identifica Ciclo Hamiltoniano como NP-completo	15
4.2	Descreve a redução usando o algoritmo hipotético	8
4.3	Justifica custo polinomial e conclui NP-dificuldade	2
	Total	**100**