CI1238 - Otimização

Aula 02 - Problemas Computacionais e Algoritmos

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

21/03/2023

Problemas Computacionais e Algoritmos

Problema computacional: pode ser formulado como uma **relação**:

- entre um conjunto de entradas
- entre e um conjunto de saídas.

Nesta relação cada entrada (instância) do problema tem um conjunto de possíveis saídas (respostas) associadas.

Exemplo: Considere o problema de encontrar o local onde está o elemento mínimo de um vetor:

- para cada vetor dado como entrada,
- as saídas válidas são os índices para elementos que são mínimos.

Notação útil

Intervalo inteiro:
Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, o *intervalo inteiro* de a a b é o conjunto $[a..b]$ dos inteiros entre a e b, isto é,

$$[a..b] = \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}$$

Mínimo de Vetor (minv)

Instância: (v, a, b), onde v é um vetor indexado por $[a..b]$, com $a \leq b$.
Resposta: um índice $m \in [a..b]$ tal que $v[m] \leq v[i]$ para todo $i \in [a..b]$.

Se v é dado por

i	1	2	3	4	5	6	7
$v[i]$	16	23	4	42	15	8	4,

então

- $(v, 1, 7)$ é uma instância do problema Mínimo de Vetor. 3 e 7 são respostas para a instância $(v, 1, 7)$ do problema Mínimo de Vetor.
- $(v, 4, 6)$ é uma instância do problema Mínimo de Vetor e 6 é uma resposta para a instância $(v, 4, 6)$ do problema Mínimo de Vetor.

Problemas computacionais e Algoritmos

Uma *solução de um problema computacional* é:

- um algoritmo que recebe uma instância do problema
- devolve uma sua resposta para a instância.

Um problema computacional pode ter diversas soluções.

Tipos de Problemas Computacionais

Problemas computacionais: normalmente são classificados de acordo com o tipo resposta associada às suas instâncias.

- *problema de decisão*: Resposta é do tipo **SIM** ou **NÃO**
- *problema de busca*: A resposta é um **objeto** que satifaça uma dada propriedade (um predicado).
- *problema de otimização*: resposta é um **objeto** que satisfaça uma dada propriedade e, além disso,

  maximize/minimize uma certa função objetivo.

Pergunta: O Problema MÍNIMO DE VETOR é de qual tipo?
Resposta: Problema de busca.

Exemplos de problemas

Primalidade (primo)

Instância: um inteiro positivo N.
Resposta: SIM se N é um número primo ou NÃO caso contrário.

Que tipo de problema é este? R: Problema de decisão.

Mochila (mochila)

Instância: (v, w, n, C), onde v é um vetor de n valores reais, w é um vetor de n pesos reais e C um número real (capacidade da mochila).

Resposta: n-tupla $(x_0, ..., x_{n-1})$ tal que $x_i \in \{0, 1\}$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$ e $\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$ seja máximo.

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

Definição envolvendo grafos

Grafo

Um *grafo* é um par $(V(G), E(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto finito de vértices e $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ um conjunto de arestas.

Convenção: $V(G) = [1..n]$.

Grafo ponderado

Um *grafo ponderado* G é um par (G, w) onde G é um grafo e w é uma função que atribui a cada aresta (arco) a de G um *peso* $w(a)$.

Grafos não ponderados: quando conveniente, assumimos que $\forall a \in E(G)$, $w(a) = 1$.

Definições auxiliares: grafos

Matriz de Adjacência de um Grafo Ponderado G:

A *matriz de adjacência* de G é a matriz M_G indexada por $V(G) \times V(G)$ dada por

$$\mathrm{M}_G[u, v] = \begin{cases} w(u, v), & \{u, v\} \in E(G), \\ 0, & \{u, v\} \notin E(G). \end{cases}$$

Definições auxiliares: grafos

Seja G um grafo (ponderado) com n vértices
Seja $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ uma permutação de $V(G)$.

Notação: quando escrevemos π_{n+1}, nos referimos à π_1.

Definição de Circuito: A permutação π é um **circuito** de G se

$$\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \in E(G),\ i = 1, ..., n.$$

Exemplos de problemas

CAIXEIRO VIAJANTE (CAIXEIRO)

Instância: matriz M dimensão n, onde cada $M[i,j]$ é um inteiro positivo.

Resposta: uma permutação $\pi = (\pi_1, ...\pi_n)$ de $[1..n]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} M[\pi_i, \pi_{i+1}] \text{ é mínimo.}$$

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

Note: Dado um grafo ponderado completo G com n vértices, a resposta para uma instância M_G do problema caixeiro é um **circuito de custo mínimo em** G.

Exemplos de problemas

Mínimo de Função Quadrática (minquad)

Instância: uma tripla (c_1, c_2, c_3) de coeficientes reais.

Resposta: valor $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c$ seja mínimo.

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

Formalizando Decisão, Busca e Otimização

Problemas de decisão:

Dado : *entrada* x
Responda: $\exists y$ *tal que certo predicado* $P_x(y)$ *é verdadeiro?*

Problemas de busca:

Dado : *entrada* x
Encontre: y *tal que certo predicado* $P_x(y)$ *é verdadeiro*

Problemas de otimização:

Dado : *entrada* x
Encontre: y *tal que certo predicado* $P_x(y)$ *é verdadeiro e* $f_x(y)$ *é máximo entre todos elementos que fazem* P_x *é verdadeiro*

Mais exemplos de problemas

Existe Primo (primo-d)

Instância: um par de inteiros positivos (N_1, N_2), tal que $N_1 \leq N_2$.

Resposta: SIM, se existe um número primo P, tal que $N_1 \leq P \leq N_2$.
NÃO, caso contrário.

Busca Primo (primo-b)

Instância: um par de inteiros positivos (N_1, N_2), tal que $N_1 \leq N_2$.

Resposta: um número primo P, tal que $N_1 \leq P \leq N_2$, caso exista.

Busca Primo Maximizando 1's (primo-o)

Instância: um par de inteiros positivos (N_1, N_2), tal que $N_1 \leq N_2$.

Resposta: um número primo P, tal que $N_1 \leq P \leq N_2$, caso exista, e o número de bits 1 na representação binária de P seja máximo.

Considere $I = (N_1, N_2)$, Seja $x \in [N_1..N_2]$,

Predicado: $P_I(x)$ é "x é primo".

Função objetivo : $f_I(N)\colon [N_1..N_2] \to \mathbb{Z}$, que é a função que toma um inteiro N e retorna o número de bits 1 na representação binária de N.

Relembrando o problema Mochila

Instância: (v, w, n, C), onde v é um vetor de n valores reais, w é um vetor de n pesos reais e C um número real.

Resposta: n-tupla $(x_0, ..., x_{n-1})$ tal que $x_i \in \{0, 1\}$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$ e $\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$ seja máximo.

Dado $I = (v, w, n, C)$, Para uma n-tupla $(x_0, ..., x_{n-1})$ tal que $x_i \in \{0, 1\}$

- $P_I(x)$ é "$\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$"
- A função objetivo a ser maximizada neste problema é $f(x_0, ..., x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$

Relembrando o problema MinQuad

Instância: uma tripla (c_1, c_2, c_3) de coeficientes reais.

Resposta: valor $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c$ seja mínimo.

Dado $I = (c_1, c_2, c_3)$,   para $x \in \mathbb{R}$,

- $P_I(x)$ é "$x \in \mathbb{R}$"   (predicado sempre verdadeiro)
- função objetivo a ser minimizada é $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$.

Espaço de Soluções

Seja Π um problema de busca ou otimização:

- A resposta para uma instância de Π é tipicamente uma n-tupla $(r_1, r_2, ..., r_n)$

Espaço de Soluções de de Π: Conjunto de todas as n-tuplas.

Também é chamado de um Espaço de Busca.

Espaço de Soluções: Exemplos

- Dada uma instância (v, w, n, C), um espaço de busca do problema MOCHILA é o conjunto de tuplas

$$[x_0, \ldots, x_{n-1}], \text{ onde } x_i \in \{0, 1\}.$$

- Dada uma instância (N_1, N_2), um espaço de busca do problema PRIMOS-O é o conjunto de números

$$\{N \in \mathbb{Z} \mid N_1 \leq N \leq N_2\}.$$

Espaço de Soluções: exemplos

- Dada uma instância (v, a, b), um espaço de busca do problema MINV é

  o conjunto de índices $[a..b]$ para o vetor v.

- Dada uma instância M, um espaço de busca do problema CAIXEIRO é

  o conjunto de permutações sobre $[1..n]$.

- Dada uma instância (c_1, c_2, c_3), um espaço de busca do problema MINQUAD é

  o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$.

Espaço de Soluções: Soluções viáveis

Seja Π um problema otimização associado ao predicado P e a função f.

Seja U um espaço de busca de Π.

- Soluções viáveis: elementos $x \in U$ tal que $P(x)$ *é verdadeiro*
- Função objetivo: $f : U \to \mathbb{R}$.

Ideia: função objetivo atribui um "valor" à cada n-tupla

- com isso a resposta para uma instância de um problema de otimização é uma a solução viável que maximize (ou minimize) este valor.

Problema de minimização: Problemas de otimização cujas respostas tenham valor mínimo na função objetivo.
Problema de maximização: definido de maneira análoga.

Conjunto das soluções viáveis para problemas de busca: definido de maneira análoga.

Exemplo: Seja M uma matriz de dimensão n, instância do problema CAIXEIRO. Seja P^n o conjunto de todas as permutações sobre $[1..n]$.

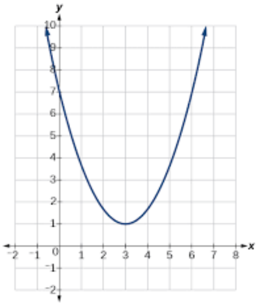
- O conjunto de permutações sobre $[1..n]$ que são circuitos no grafo de matriz M são as soluções viáveis do problema.
- A função $f\colon P^n \to \mathbb{R}$, definida por $f(\pi_1, ..., \pi_n) = \sum_{i=1}^{n} M[\pi_i, \pi_{i+1}]$ é a função objetivo a ser minimizada.

Modelagem de problemas

MÍNIMO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA' (MINQUAD')

Instância: uma tripla (c_1, c_2, c_3) de coeficentes reais.

Resposta: ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $y = c_1x^2 + c_2x + c$ seja mínimo.



Assim, para este problema temos:

Espaço de busca: pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Soluções viáveis: (x, y) tal que
$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$

Note: a rigor, a função objetivo seria $f(x, y) = c_1x^2 + c_2x + c_3$.

- Note que a função só depende de x. Para simplificar: $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$.