CI1238 - Otimização

Aula 04 - Programação Linear: Modelagem

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

21/03/2023

Programação Linear

Programação Linear (PL):

- Instância: Uma tripla (A, b, c) onde A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, b é um vetor sobre $\mathbb{R}^m$ e c é um vetor sobre $\mathbb{R}^n$.
- Resposta: Um vetor $x^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo
  - $Ax^* \leq b$,
  - $cx^* \geq cx, \ \forall x \mid Ax \leq b$

Em alguns contextos diremos que neste problema queremos

"maximizar $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$, sujeito a $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$".

Programação Linear: Exemplos

Encontre um vetor $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2)$ tal que $x_1 + x_2$ seja **máximo**, satisfazendo

- $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$
- $x_2 - x_1 \leq 1$
- $x_1 + 6x_2 \leq 15$
- $4x_1 - x_2 \leq 10$

Isto é uma instância de PL, pois podemos reescrever

$$\begin{array}{rrl} -x_1 & & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ -x_1 & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & 6x_2 & \leq 15 \\ 4x_1 & -x_2 & \leq 10 \end{array}$$

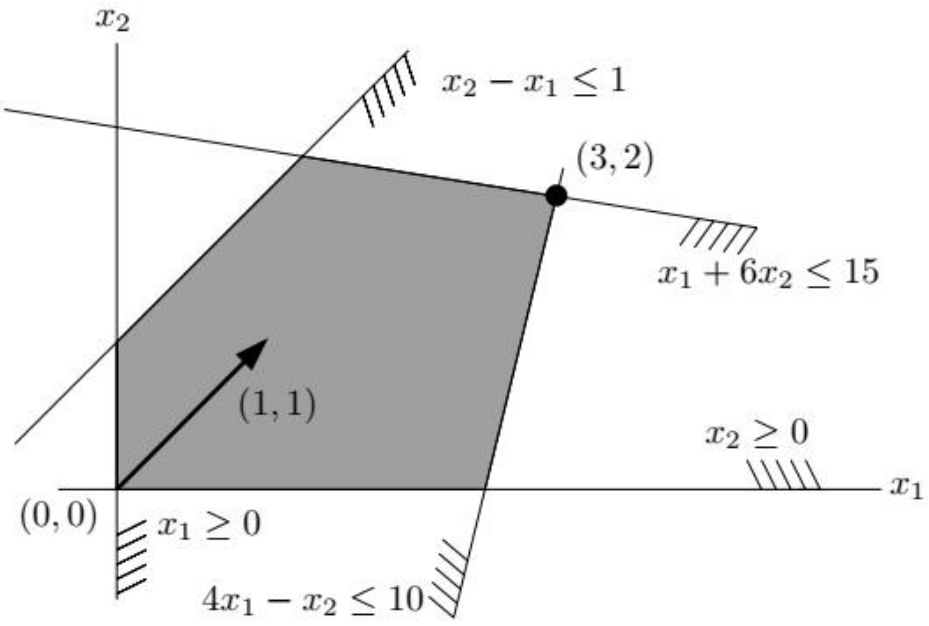
E portanto podemos fazer (A, b, c):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \; b = (0, 0, 1, 15, 10) \text{ e } c = (1, 1).$$

Programação Linear: Interpretação geométrica

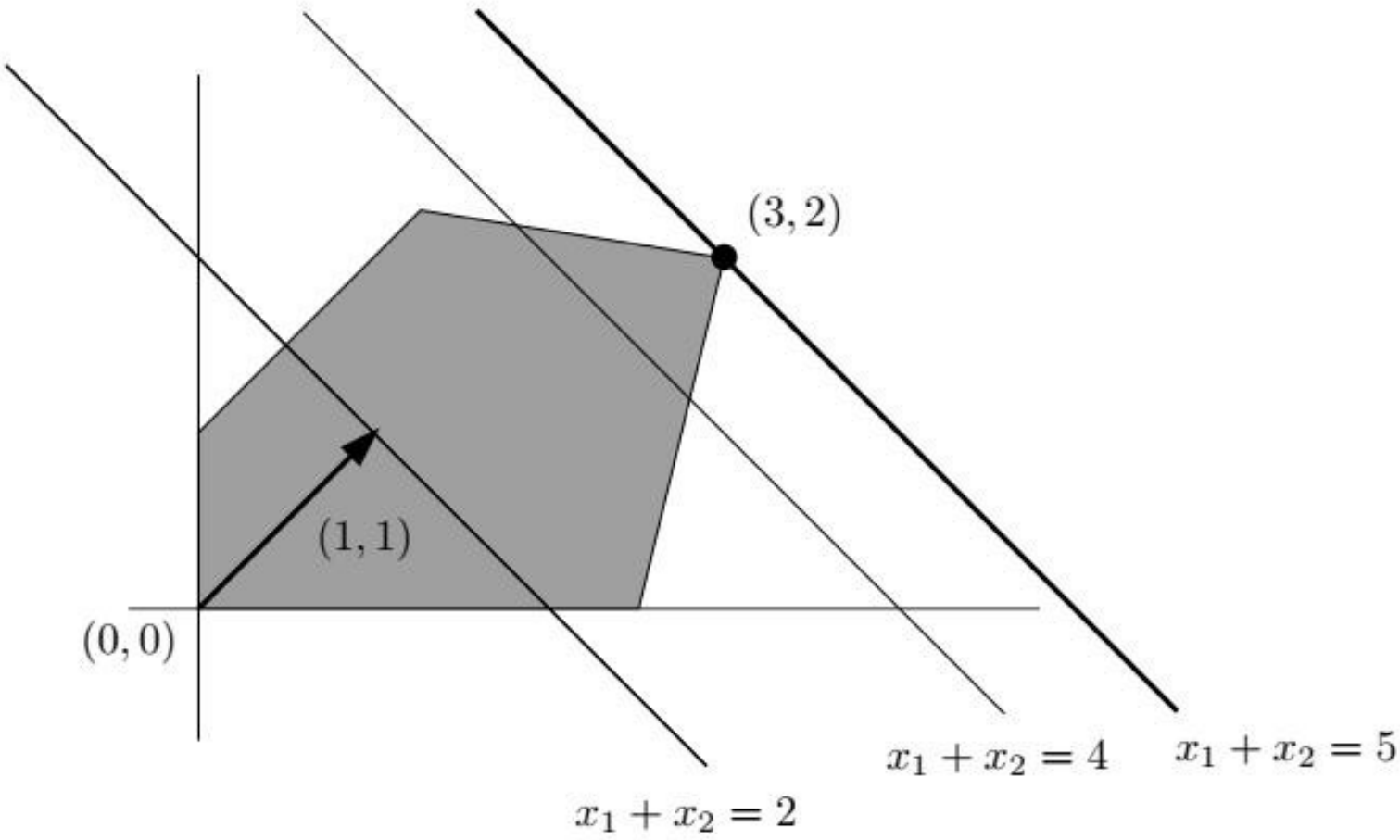
Maximizar: $x_1 + x_2$ Sujeito a:

$$
\begin{array}{rrl}
-x_1 & & \leq 0 \\
 & -x_2 & \leq 0 \\
-x_1 & x_2 & \leq 1 \\
x_1 & 6x_2 & \leq 15 \\
4x_1 & -x_2 & \leq 10
\end{array}
$$



Programação Linear

Maximizando a função objetivo $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$



Pergunta: Se tivéssemos n variáveis? Qual seria a interpretação geométrica?

Programação Linear

Relembrando:

Programação Linear (PL):

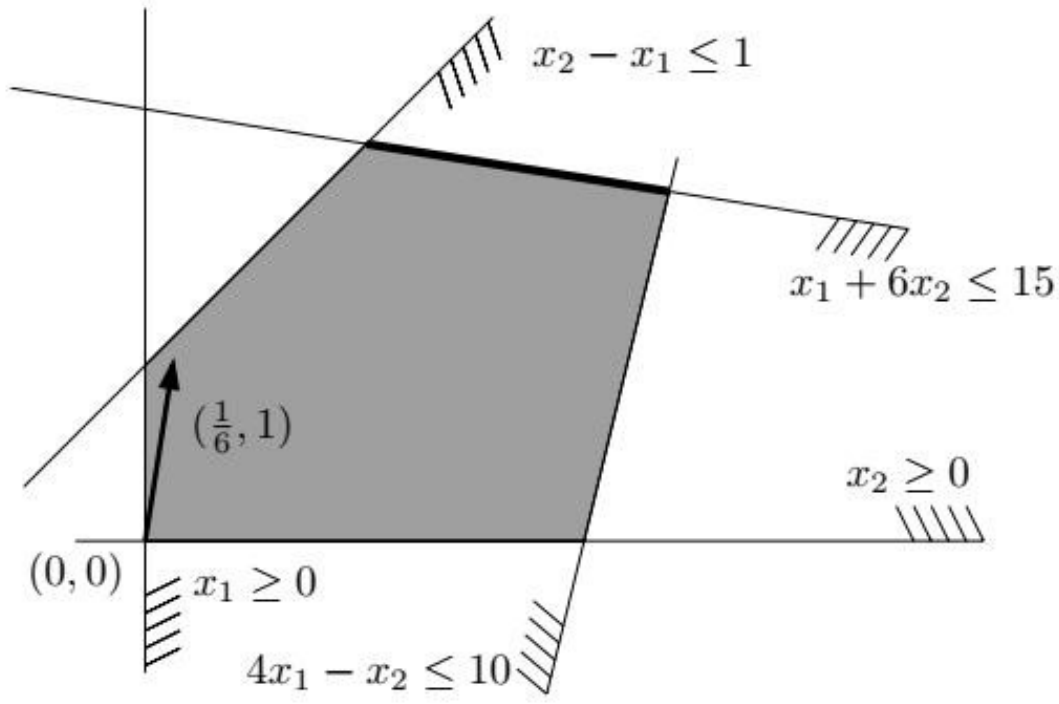
- Instância: Uma tripla (A, b, c) onde A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, b é um vetor sobre $\mathbb{R}^m$ e c é um vetor sobre $\mathbb{R}^n$.
- Resposta: Um vetor $x^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo
  - $Ax^* \leq b$,
  - $cx^* \geq cx, \ \forall x \mid Ax \leq b$

A matriz A junto com o vetor b define as restições;
O vetor c define função objetivo.

- E se tivéssemos, por exemplo, a restrição $2x_1 + x_2 \geq 5$?
  - Multiplique a equação por (-1)
- E se tivéssemos uma restrição do tipo $2x_1 + x_2 = 5$?
  - Crie duas restrições: $2x_1 + x_2 \leq 5$ e $2x_1 + x_2 \geq 5$.
- E se quisermos minimizar?

Programação Linear

Considere a função objetivo dada por $(\frac{1}{6}, 1)$

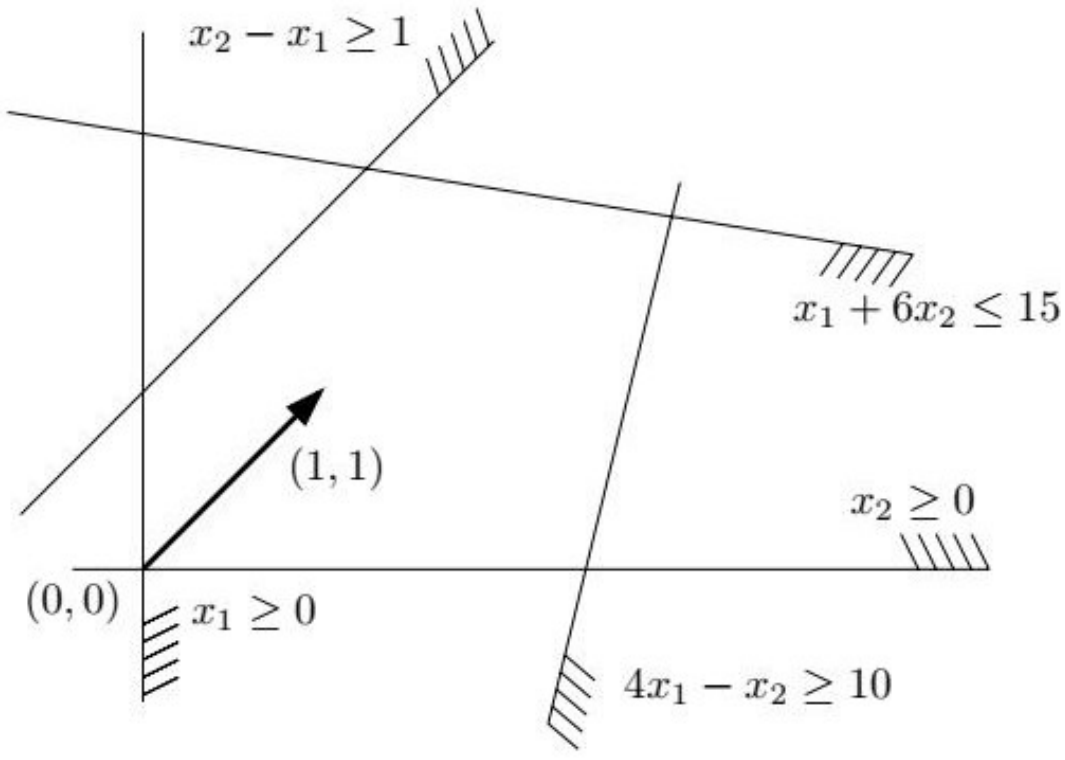


Quantas soluções temos?

- Infinitas (todos pontos da reta destacada)

Programação Linear

Invertendo restrições no exemplo original

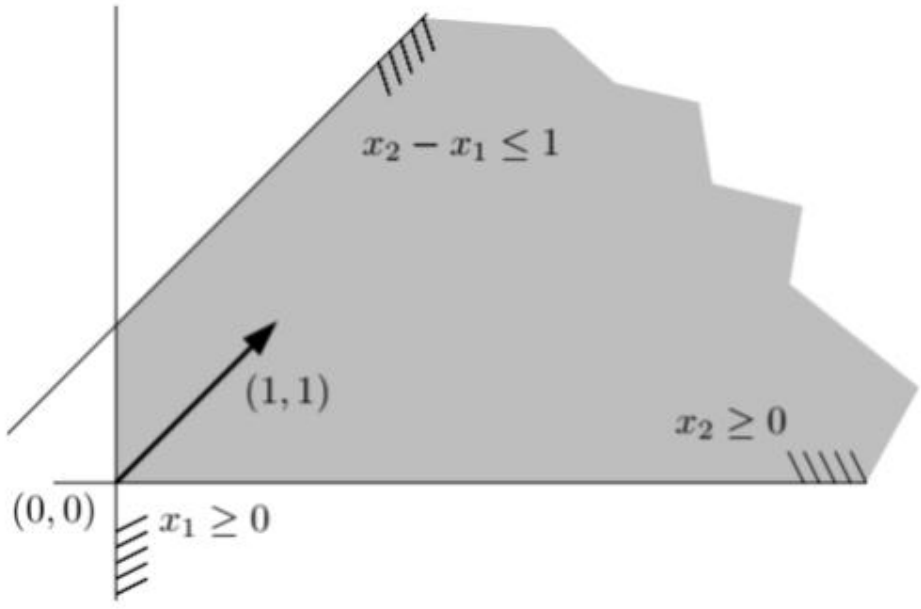


Quantas soluções temos?

- Nenhuma solução

Programação Linear

Removendo restrições no problema original



Quantas soluções temos?

- Nenhuma solução

Programação Linear: Mais exemplos

Minimizar custos com dieta equilibrada:

Food	Carrot, Raw	White Cabbage, Raw	Cucumber, Pickled	Required per dish
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Dietary Fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [€/kg]	0.75	0.5	0.15*	—

*Residual accounting price of the inventory, most likely unsaleable.

Queremos a quantidade x_1 de cenoura, x_2 de repolho e x_3 de pepino (em kg)

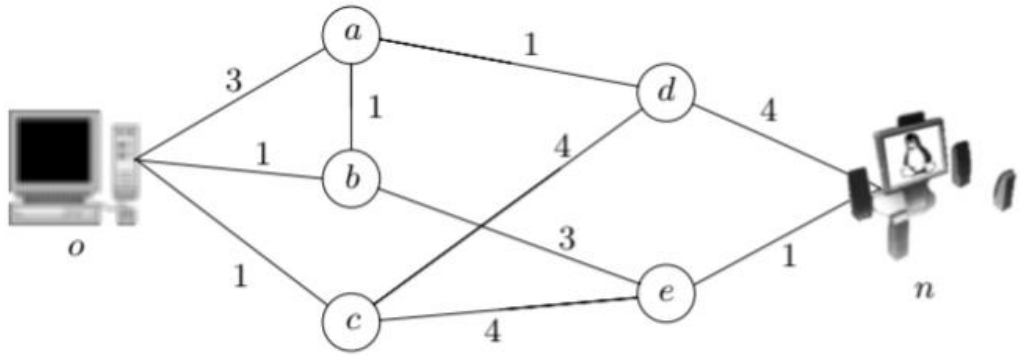
Minimizar: $0.75x_1 + 0.5x_2 + 0.15x_3$

Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0 \\
35x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 &\geq 0.5 \\
60x_1 + 300x_2 + 10x_3 &\geq 15 \\
30x_1 + 20x_2 + 10x_3 &\geq 4.
\end{aligned}
$$

Programação Linear: Mais exemplos

Maximizar fluxo em uma redes:



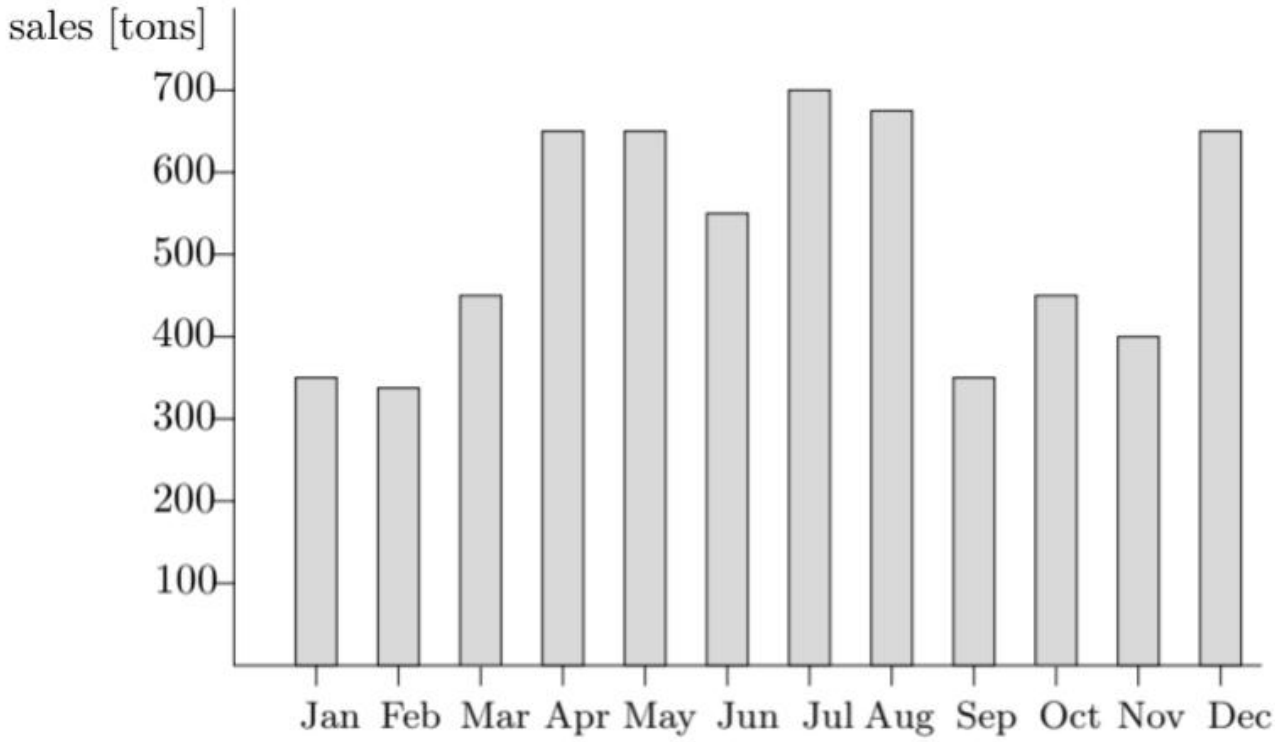
Variáveis: Para cada aresta $\{u, v\}$, uma variável x_{uv}
Maximizar o quê? Quais restrições?

Maximizar: $x_{oa} + x_{ob} + x_{oc}$
Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
-3 \le x_{oa} \le 3, \quad -1 \le x_{ob} \le 1, \quad -1 \le x_{oc} \le 1 \\
-1 \le x_{ab} \le 1, \quad -1 \le x_{ad} \le 1, \quad -3 \le x_{be} \le 3 \\
-4 \le x_{cd} \le 4, \quad -4 \le x_{ce} \le 4, \quad -4 \le x_{dn} \le 4 \\
-1 \le x_{en} \le 1 \\
x_{oa} = x_{ab} + x_{ad} \\
x_{ob} + x_{ab} = x_{be} \\
x_{oc} = x_{cd} + x_{ce} \\
x_{ad} + x_{cd} = x_{dn} \\
x_{be} + x_{ce} = x_{en}.
\end{aligned}
$$

Programação Linear: Mais exemplos

minimizar custos em fábrica de sorvetes:



- Produção "uniforme" tem custos (estoque)
- Produção "variável" tem custos também

PL - Modelagem: Fábrica de sorvetes

Variáves e desigualdades:

- Produção no mês i: $x_i, \quad i = 1, ..., 12$
- Demanda e estoque no mês i: d_i e s_i
  - Produzindo o suficiente:
    $x_i + s_i \geq d_i$
  - Estoque para mês seguinte: $x_i + s_{i-1} - d_i = s_i$. Portanto:
    $x_i + s_{i-1} - s_i = d_i$
  - Estoque no começo e fim do ano:
    $s_0 = 0$ e $s_{12} = 0$
- Custos para ter produção variável:
  - Mudar produção do mês $i - 1$ para mês i: \$50 (por tonelada)
  - Custo de armazenamento no mês i: \$20 (por tonelada)
  - Portanto, custo total:
    - $50 \sum_{i=1}^{12} |x_i - x_{i-1}| + 20 \sum_{i=1}^{12} s_i$ (função objetivo)
    - Para o casa $i = 0$, $x_0 = 0$.
    - Há algo errado com a função objetivo? **NÃO É LINEAR!**

PL - Modelagem: Fábrica de sorvetes

- Função objetivo: $50 \sum_{i=1}^{12} |x_i - x_{i-1}| + 20 \sum_{i=1}^{12} s_i$
- Observe: $|x_i - x_{i-1}| \geq 0$ ou ≤ 0. i.e., mudança na produção:
  - aumenta em y_i, ou diminui em z_i (ambos valores ≥ 0)
  - na função objetivo, trocamos $|x_i - x_{i-1}|$ por $y_i + z_i$.

    e criamos uma nova equação: $x_i - x_{i-1} = y_i - z_i$

Com isso, o programa linear é:

- Minimizar: $50 \sum_{i=1}^{12} y_i + 50 \sum_{i=1}^{12} z_i + 20 \sum_{i=1}^{12} s_i$
- Sujeito a:

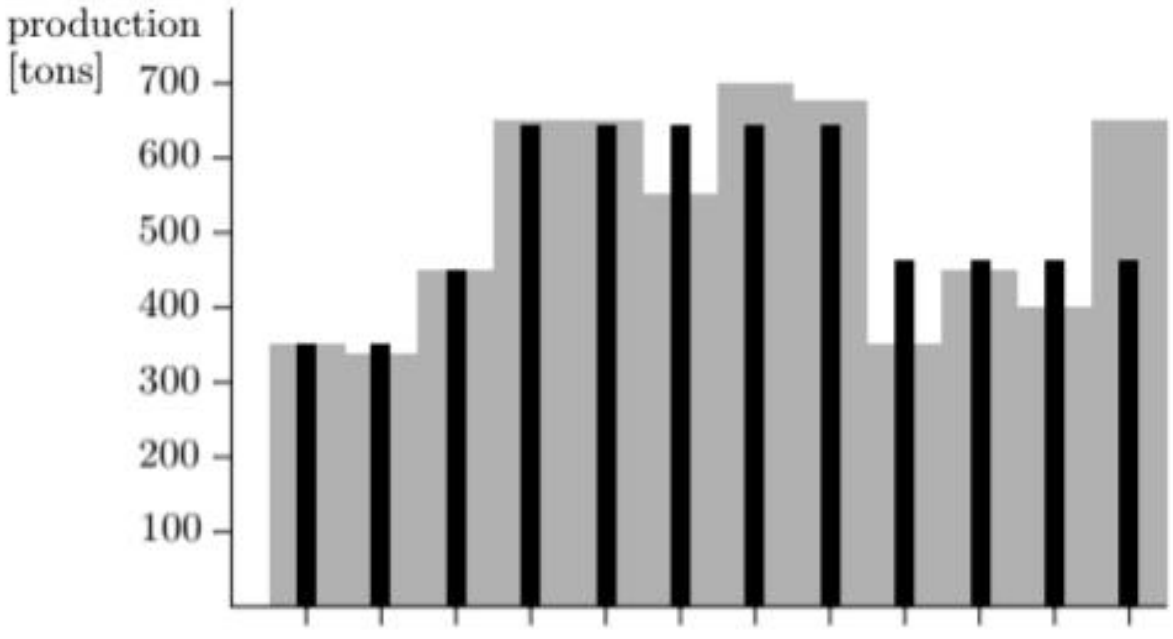
$$
\begin{aligned}
& x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12 \\
& x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12 \\
& x_0 = 0 \\
& s_0 = 0 \\
& s_{12} = 0 \\
& x_i, s_i, y_i, z_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, 12.
\end{aligned}
$$

A resposta para uma dada instância é um vetor (x^*, y^*, z^*, s^*)
Para $i = 1, ..., 12$, observe que y_i^* ou z_i^* é zero (caso contrário, solução não é ótima)

- Lembrando que $x_i^* = y_i^* + z_i^*$

PL - Modelagem: fábrica de sorvetes

Demanda *vs* Produção:



PL - Modelagem: fábrica de papel

Fábrica produz rolos de papel com 3 metros de largura.

- Compradores querem larguras diversas.

  Por exemplo, 3m pode ser cortado em:

  - dois rolos de 93cm
  - um de 108
  - sobra: 6cm

PL - Modelagem: fábrica de papel

Considere o pedido:

- 97 de 135cm 610 de 108cm
- 395 de 93cm 211 de 42cm

Quantos rolos de 3 metros devem ser produzidos? Possibilidades de cortes:

P1:	2×135	P7:	$108 + 93 + 2 \times 42$
P2:	$135 + 108 + 42$	P8:	$108 + 4 \times 42$
P3:	$135 + 93 + 42$	P9:	3×93
P4:	$135 + 3 \times 42$	P10:	$2 \times 93 + 2 \times 42$
P5:	$2 \times 108 + 2 \times 42$	P11:	$93 + 4 \times 42$
P6:	$108 + 2 \times 93$	P12:	7×42

- x_i: quantidade de rolos cortados de acordo com P_i
- Por exemplo, para restrição "395 de 93cm", temos
  - $x_3 + 2x_6 + x_7 + 3x_9 + 2x_{10} + x_{11} \geq 395$
- Para as demais restrições, análogo
- Objetivo: $\sum_{j=1}^{12} x_j$

Solução: $x_1 = 48.5$, $x_5 = 206.25$, $x_6 = 197.5$ (demais $x_i = 0$)
Pergunta: soluções fracionárias são aceitas?