CI1238 - Otimização

Aula 05 - PLI, formas equacionais e soluções básicas

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

21/03/2023

Soluções inteiras

Para algumas aplicações de PL queremos soluções inteiras.

- Para o problema da fábrica de papel, poderíamos arredondar?

- Relembrando a solução: $x_1 = 48.5$, $x_5 = 206.25$, $x_6 = 197.5$
- Se arredondarmos, temos $x_1 = 49$, $x_5 = 207$, $x_6 = 198$
- Com isso, precisamos fabricar 454 rolos de papel (lembrando que a função objetivo é $\sum_{j=1}^{12} x_j$)

Entretando, considere a seguinte solução **viável inteira**:

- $x_1 = 49$, $x_5 = 207$, $x_6 = 196, x_9 = 1$
- Neste caso, precisaríamos fabricar 453 rolos

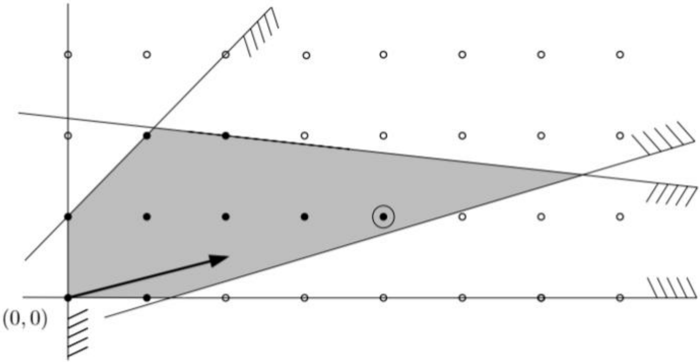
Programação Linear Inteira

Programação Linear (PLI):

- Instância: Uma tripla (A, b, c) onde A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, b é um vetor sobre $\mathbb{R}^m$ e c é um vetor sobre $\mathbb{R}^n$.
- Resposta: Um vetor $x^* \in \mathbb{Z}^n$ satisfazendo
  - $Ax^* \leq b$,
  - $cx^* \geq cx, \ \forall x \mid Ax \leq b$

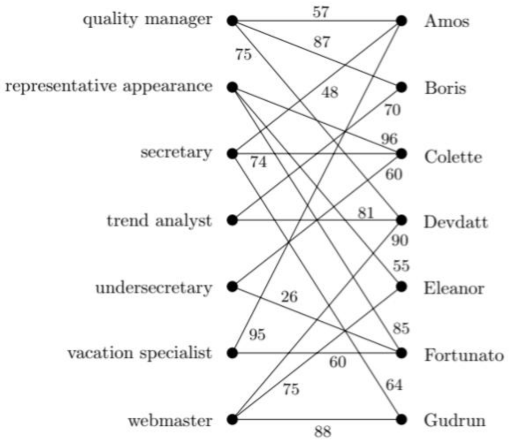
Programação Linear Inteira (PLI)

Exemplo para PLI com duas variáveis



- Espaço de busca: pontos de $\mathbb{Z}^2$
- Soluções viáveis e ótimas: subconjunto destes pontos

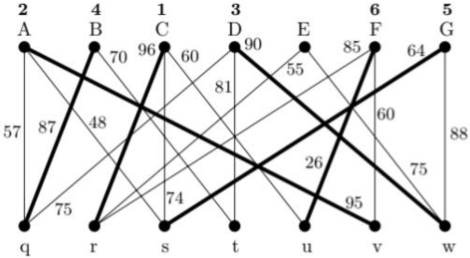
Programação Linear Inteira (PLI): Emparelhamento



- Preencher todas as vagas, maximizando as preferências.

Programação Linear Inteira (PLI): Emparelhamento

Solução via algoritmo *guloso*:



- Não obtem solução ótima!

Definições auxiliares: grafos bipartidos

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo.

Conjunto independente: Um conjunto $S \in V(G)$ é *independente* se

- $\forall u, v \in S$, $\{u, v\} \notin E(G)$

Grafo Bipartido: O grafo G é *bipartido* se existe uma partição (X, Y) de $V(G)$ tal que X e Y são conjuntos independentes

Emparelhamento perfeito: Um conjunto $M \subseteq E(G)$ é um *emparelhamento perfeito* em G se

- nenhum par de arestas de M tem pontas em comum
- cada vértice de $V(G)$ é ponta de alguma aresta de M

Exemplo de PLI: Emparelhamento perfeito

Instância: Grafo ponderado *bipartido* G
Resposta: Um *emparelhamento perfeito* de peso máximo em G, caso exista

Variáveis: $\forall e \in E(G)$, temos uma variável x_e

- Queremos variáveis binárias: $x_e \in \{0, 1\}$ para indicar se $e \in M$ ou $e \notin M$
- Para isso, temos a restrição: $0 \leq x_e \leq 1$ e $x_e \in \mathbb{Z}$
- Para cada vértice$v \in V(G)$ temos uma equação:

$$\sum_{e \in \partial(v)} w(e)x_e = 1$$

Função objetivo: $\sum_{e \in E(G)} w(e)x_e$

Exemplo de PLI: Conjunto independente máximo

Instância: Um grafo G
Resposta: Um *conjunto independente* S de tamanho máximo em G

Variáveis: $\forall v \in V(G)$, temos uma variável x_v

- x_v indica se $v \in S$ ou $v \notin S$
- Restrição: $0 \leq x_e \leq 1$ e $x_e \in \mathbb{Z}$
- Restrição $\forall \{u, v\} \in E(G)$, temos $x_u + x_v \leq 1$

Função objetivo: $\sum_{v \in V(G)} x_v$

Formas Equacionais em PL

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL):

- Instância: Uma tripla $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ onde A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{b}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{c}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^n$.
- Resposta: Um vetor $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo
  - $A\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}$,
  - $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

PROGRAMAÇÃO LINEAR NA FORMA EQUACIONAL (PLE):

- Instância: Uma tripla $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ onde A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{b}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{c}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^n$.
- Resposta: Um vetor $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo
  - $A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$,
  - $\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$,
  - $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

Note: Apesar de chamarmos de forma "equacional", não temos apenas equações!

Às vezes, vamos dizer "maximizar $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, sujeito a $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$".

Convertendo PLs em PLEs

Vamos converter o PL abaixo em um PLE:

Maximizar: $3x_1 - 2x_2$
Respeitando:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 \leq 4 \\
&x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Vamos converter a desigualdade $2x_1 - x_2 \leq 4$ em uma equação:
  - Crie uma variável nova x_3; crie a restrição $x_3 \geq 0$
  - Troque a desigualdade pela equação $2x_1 - x_2 + x_3 = 4$
  - x_3 é chamada de *variável de folga* (não aparece outras equações)
- Para $x_1 + 3x_2 \geq 5$:
  - Multiplique por (-1); Crie variável de folga x_4
  - De maneira semelhante, obtenha $-x_1 - 3x_2 + x_4 \leq -5$
- Lidando com x_1 (não tem restrição de não negatividade)
  - Crie variáveis novas y_1 e z_1 com restrições $y_1 \geq 0$ e $z_1 \geq 0$
  - Substitua x_1 por $y_1 - z_1$
  - Importante: x_1 deixa de existir!
    (note: x_1 pode ser recuperada a partir de $y_1 - z_1$)

Convertendo PLs em PLEs

Ou seja, dado o PL

Maximizar: $3x_1 - 2x_2$
Respeitando:

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 \leq 4 \\ &x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Obtemos o PLE:
Maximizar: $3y_1 - 3z_1 - 2x_2$
Respeitando:

$$\begin{aligned} &2y_1 - 2z_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ &-y_1 + z_1 - 3x_2 + x_4 = -5 \\ &x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\ ,\ x_4 \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ z_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Para que o PLE esteja completamente no formato correto, chamamos as variáveis de x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5.

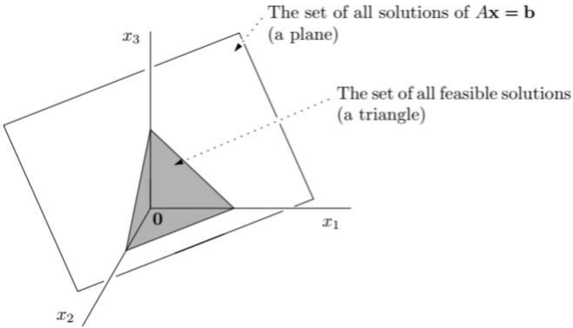
- Se PL original tinha n variáveis e m restrições
- O PLE resultante tem $n + 2m$ variáveis e m equações
  (além disso, temos também as restrições de não negatividade)

Interpretação Geométrica de PLEs

Considere o problema de maximizar $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, sujeito a $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.

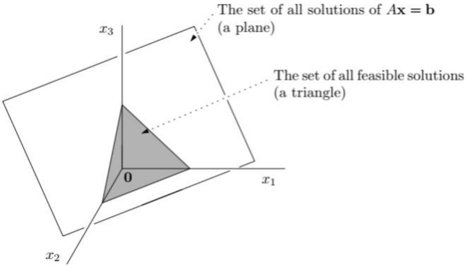
- As soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ são um subespaço F de $\mathbb{R}^n$
- Soluções viáveis do PL: Intersecção de F com o *ortante* não negativo de $\mathbb{R}^n$

Exemplo onde $n = 3$ e $m = 1$:



Interpretação Geométrica de PLEs

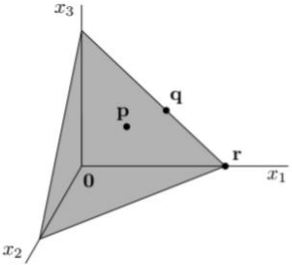
PLE: maximizar $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, sujeito a $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.



- Soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ podem ter componentes negativos.
- Soluções viáveis do PLE satisfazem o sistema e são não negativas.
- Alterando o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ usando via transformações que preservam soluções (e.g., operações de eliminação gaussiana):
  - Soluções viáveis (e também as ótimas) continuam as mesmas
  - O Algoritmo Simplex usa isso extensivamente
- Assumimos: (1) PLE com pelo menos uma solução; (2) as m linhas de A são l.i.
  - Fácil checar condição (1); podemos descartar linhas se (2) não vale

Soluções Viáveis Básicas

Considere as soluções viáveis p, q e r do exemplo anterior (onde $n = 3$ e $m = 1$):



- Destas soluções viáveis, apenas r é uma solução viável básica.
  - Isso pode ser formalizado como sendo uma solução com uma quantidade "suficientemente grande" de coordenadas em zero.

Soluções Viáveis Básicas

Lembrando: matriz A tem n colunas e m linhas l.i. (tem *rank* m)

Notação: Para $B \subseteq \{1..n\}$, denotamos por A_B a matriz com as colunas de A indexadas por B. A mesma notação vale para vetores.

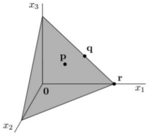
Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \{2, 4\}$, então

$$A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Se $\boldsymbol{x} = (3, 5, 7, 9, 11)$ e $B = \{2, 4\}$, então

$$x_B = (5, 9)$$

Soluções Viáveis Básicas



No exemplo tínhamos apenas uma equação:
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Ou seja, dada $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ queremos um $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{x} = b$

O conjunto $B = \{1\}$ "escolhe" apenas a primeira linha da matriz i.e. $A_B = (a_1)$

- Ideia: estamos assumindo $x_2 = 0, x_3 = 0$ e queremos x_1 tal que $(a_1)(x_1) = (b)$

Digamos que a matriz A do exemplo do slide anterior corresponda ao caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aqui 3 das 5 váriáveis podem ser zero

- Escolhendo $B = \{2, 4\}$, temos $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ i.e., $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Portanto $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução

Soluções Viáveis Básicas

Uma solução viável básica de um PLE em que queremos maximizar $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, sujeito a $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ é uma solução viável $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que exista um conjunto $B \subseteq \{1, ..., n\}$ contendo m elementos tal que

- A matriz A_B é não singular (i.e., as colunas indexadas por B são l.i.)
- $x_j = 0$ para todo $j \notin B$.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \{14, 7\}$.

Então $\boldsymbol{x} = (0, 2, 0, 1, 0)$ é uma solução viável básica com $B = \{2, 4\}$.

- Fixado B, as variáveis x_j, $j \in B$, são chamadas de variáveis básicas.
- Note que o vetor $\boldsymbol{c}$ é irrelevante nesta definição.
  - Ou seja, as soluções básicas viáveis são dependem de A e c.

Soluções Viáveis Básicas

Lema: Solução viável $\boldsymbol{x}$ de PLE é básica $\iff$ colunas de A_B são l.i. p/ algum B

Proposição: Uma solução básica é unicamente determinada por B

(i.e., para cada $B \in [1..n]$, com A_B não singular, existe no máximo uma solução viável $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, com $x_j = 0$ para todo $j \notin B$)

- chamamos B de base viável

Teorema: Considere o problema maximizar $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$, sujeito a $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.

1. Se existe pelo menos uma solução viável e a função objetivo é limitada superiormente no conjunto de soluções viáveis, então existe solução ótima
2. Se existe solução ótima, então uma solução básica é ótima.

Note: Um algoritmo sai naturalmente do teorema acima: tente todos os $\binom{n}{m}$ conjuntos B. O Algoritmo Simplex navega pelas soluções básicas, mas "em direção" a solução ótima.