CI1238 - Otimização

Aula 06 - Simplex

Professor Murilo V. G. da Silva
Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

21/03/2023

Introdução ao Simplex com um exemplo

Considere o PL

Maximizar: $x_1 + x_2$
Respeitando:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Obtenha o PLE equivalente:
Maximizar: $x_1 + x_2$
Respeitando:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ x_1, \ldots x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = (1, 1)$$

Introdução ao Simplex com um exemplo

Maximizar: $x_1 + x_2$
Respeitando:

$$\begin{array}{lllll} -x_1 + x_2 + x_3 & & & = 1 \\ x_1 & +x_4 & & = 3 \\ x_2 & & +x_5 & = 2 \\ x_1, \ldots x_5 \geq 0 & & & \end{array}$$

Vamos colocar as equações no seguinte *tableau*:

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

- O algoritmo vai obtendo novos tableaux a partir de um tableau inicial
- Parte de cima do tableau: restrições; Parte de baixo: a função objetivo
- Os tableux sempre representam o mesmo PLE
- Cada tableau é associado a uma solução básica
  Por hora não nos preocuparemos como obter o tableau inicial

- O tableu inicial acima é associado à solução básica $\boldsymbol{x} = (0, 0, 1, 3, 2)$
- Na última linha, z é o valor da função objetivo para estas solução básica
  Aqui a função objetivo começa valendo $z = 0$

Introdução ao Simplex com um exemplo

$$
\begin{array}{rcrrr}
x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\
x_4 & = & 3 & - x_1 & \\
x_5 & = & 2 & & - x_2 \\
\hline
z & = & 0 & + x_1 & + x_2
\end{array}
$$

Vamos obter uma solução melhor que $(0, 0, 1, 3, 2)$:

- Vamos incrementar o valor de alguma variável da função objetivo. Vamos escolher x_2 (mas tanto faz qual variável)
- Conseguimos incrementar em quanto o valor de x_2?
  Note: para isso, precisamos decrementar x_3 e x_5
- O "gargalo" é a primeira equação

Introdução ao Simplex com um exemplo

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

A partir de $(0, 0, 1, 3, 2)$, aumentaremos x_2 para o maior valor possível

- O máximo viável neste passo é fazer $x_2 = 1$
- Com isso, pela primeira equação, x_3 deve ser 0
  Ideia: x_2 passa a ser variável básica e x_3 deixa de ser ("trocam de papel")
  Obs: x_4 e x_5 continuam básicas e x_1 continua não básica

Ou seja, na nova solução temos: $x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 =? \quad x_5 =?$

- As demais equações (que não são gargalo) nos dão os valores $x_4 = 3$ e $x_5 = 1$:
  - Da segunda equação: $x_4 = 3 - x_1 \therefore x_4 = 3 - 0 \therefore x_4 = 3$
  - Da terceira equação $x_5 = 2 - x_2 \therefore x_5 = 1$

Qual é o novo tableau associado a esta nova solução?

$$\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 1 & + x_1 & - x_3 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 1 & - x_1 & + x_3 \\ \hline z & = & 1 & + 2x_1 & - x_3 \end{array}$$

- Primeira linha: apenas isolamos a nova variável não básica na equação "gargalo"
- Demais linhas (incl. função objetivo): substitua x_2 por $1 + x_1 - x_3$
- O processo de obter um novo tableau é chamado de **pivoteamento**.

Introdução ao Simplex com um exemplo

$$\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 1 & +\ x_1 & -\ x_3 \\ x_4 & = & 3 & -\ x_1 & \\ x_5 & = & 1 & -\ x_1 & +\ x_3 \\ \hline z & = & 1 & +\ 2x_1 & -\ x_3 \end{array}$$

$$B = \{2,4,5\} \qquad \boldsymbol{x} = (0,1,0,3,1) \qquad z = 1$$

- Vamos incrementar x_1; Gargalo: terceira equação
  - Com isso, x_1 e x_5 "trocam de papel"
  - Terceira linha sai e no novo tableu entra $x_1 = 1 + x_3 - x_5$
  - Outras linhas: trocamos x_1 por $1 + x_3 - x_5$

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 1 & +\ x_3 & -\ x_5 \\ x_2 & = & 2 & & -\ x_5 \\ x_4 & = & 2 & -\ x_3 & +\ x_5 \\ \hline z & = & 3 & +\ x_3 & -\ 2x_5 \end{array}$$

$$B = \{1,2,4\} \qquad \boldsymbol{x} = (1,2,0,2,0) \qquad z = 3$$

- Podemos incrementar x_3; Gargalo: terceira equação; Novo tableau abaixo:

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 3 & -\ x_4 & \\ x_2 & = & 2 & & -\ x_5 \\ x_3 & = & 2 & -\ x_4 & +\ x_5 \\ \hline z & = & 5 & -x_4 & -\ x_5 \end{array}$$

$$B = \{1,2,3\} \qquad \boldsymbol{x} = (3,2,2,0,0) \qquad z = 5$$

Introdução ao Simplex com um exemplo

Solução obtida:

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 3 & - x_4 & \\ x_2 & = & 2 & & - x_5 \\ x_3 & = & 2 & - x_4 & + x_5 \\ \hline z & = & 5 & -x_4 & - x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 2, 3\} \qquad \boldsymbol{x} = (3, 2, 2, 0, 0) \qquad z = 5$$

- Lembrando que os tableaus são diferentes, mas representam o mesmo PLE
- Pela equação da última linha **qualquer solução $\boldsymbol{x}$** deve respeitar
  - $\boldsymbol{z} = 5 - x_4 - x_5$
- A equação acima junto com a não negatividade de x_4 e x_5 implica em $z \leq 5$

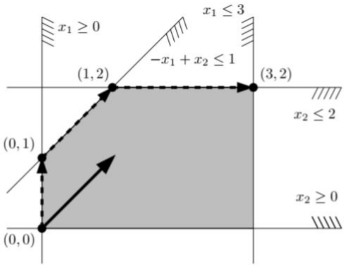
Introdução ao Simplex com um exemplo

Solução obtida:

$$
\begin{array}{rcrrr}
x_1 & = & 3 & -\ x_4 & \\
x_2 & = & 2 & & -\ x_5 \\
x_3 & = & 2 & -\ x_4 & +\ x_5 \\
\hline
z & = & 5 & -x_4 & -\ x_5
\end{array}
$$

$$B = \{1, 2, 3\} \qquad \boldsymbol{x} = (3, 2, 2, 0, 0) \qquad z = 5$$

Interpretação geométrica (no PL original):

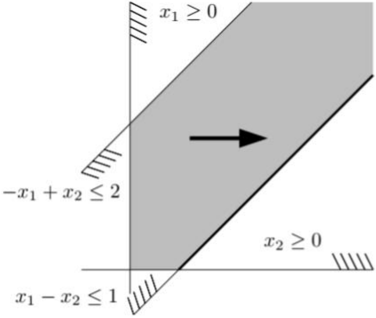


Lidando com espaço de soluções viáveis ilimitado

Maximizar: x_1
Respeitando:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Interpretação geométrica deste PL:



Lidando com espaço de soluções viáveis ilimitado

Maximizar: x_1
Respeitando:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Convertendo o PL em PLE:
Maximizar: x_1
Respeitando:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vamos começar com o seguinte tableau inicial:
(obs: ainda estamos ignorando como obter este tableau)

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 1 & -\ x_1 & +\ x_2 \\ x_4 & = & 2 & +\ x_1 & -\ x_2 \\ \hline z & = & 0 & +\ x_1 & \end{array}$$

$$B = \{3, 4\} \qquad \boldsymbol{x} = (0, 0, 1, 2) \qquad z = 0$$

Lidando com espaço de soluções viáveis ilimitado

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 1 & - x_1 & + x_2 \\ x_4 & = & 2 & + x_1 & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & \end{array}$$

$$B = \{3, 4\} \qquad \boldsymbol{x} = (0, 0, 1, 2) \qquad z = 0$$

- Pivoteando uma vez, com x_1 e x_3 trocando de papel, temos:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & 1 & + x_2 & - x_3 \\ x_4 & = & 3 & & - x_3 \\ \hline z & = & 1 & + x_2 & - x_3 \end{array}$$

$$B = \{1, 4\} \qquad \boldsymbol{x} = (1, 0, 0, 3) \qquad z = 1$$

- Escolhemos agora x_2 para entrar na base
- Não existe gargalo! Podemos aumentar o valor de x_2 arbitrariamente!
- $\forall t \geq 0$, $(1 + t, t, 0, 3)$ é solução (não necessariamente básica)

O conjunto $\{(1, 0, 0, 3) + (1, 1, 0, 0) \ : \ t \geq 0\}$ é sempre viável

Obs: A semi-reta (do PL original) está em destaque na figura anterior

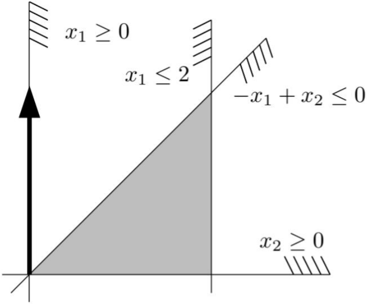
- O Simplex retorna esta semi-reta em tais casos

Lidando com soluções degeneradas

Maximizar: x_2
Respeitando:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1 \qquad &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Interpretação geométrica deste PL:



Lidando com soluções degeneradas

PLE equivalente:

Maximizar: x_2
Respeitando:

$$\begin{aligned}
&-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
&x_1 \qquad\quad + x_4 = 2 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Começamos com o seguinte tableau:

$$\begin{array}{ccccc}
x_3 & = & 0 & +\, x_1 & -\, x_2 \\
x_4 & = & 2 & -\, x_1 & \\
\hline
z & = & 0 & & +\, x_2
\end{array}$$

$$B = \{3, 4\} \qquad \boldsymbol{x} = (0, 0, 0, 2) \qquad z = 0$$

- Única candidata a entrar na base: x_2
- Gargalo: linha 1; Não há como incrementar x_2, mas a solução não é ótima
- Ainda assim, vamos fazer esse pivoteamento **degenerado** trocando x_2 e x_3.

$$\begin{array}{ccccc}
x_2 & = & 0 & +\, x_1 & -\, x_3 \\
x_4 & = & 2 & -\, x_1 & \\
\hline
z & = & 0 & +\, x_1 & -\, x_3
\end{array}$$

$$B = \{2, 4\} \qquad \boldsymbol{x} = (0, 0, 0, 2) \qquad z = 0$$

Note: Mesma solução básica

Lidando com soluções degeneradas

$$
\begin{array}{rcrrr}
x_2 & = & 0 & + x_1 & - x_3 \\
x_4 & = & 2 & - x_1 & \\
\hline
z & = & 0 & + x_1 & - x_3
\end{array}
$$

$$B = \{2,4\} \qquad \boldsymbol{x} = (0,0,0,2) \qquad z = 0$$

Pivoteamento: trocamos x_4 por x_1

$$
\begin{array}{rcrrr}
x_1 & = & 2 & & - x_4 \\
x_2 & = & 2 & - x_3 & - x_4 \\
\hline
z & = & 2 & - x_3 & - x_4
\end{array}
$$

$$B = \{1,2\} \qquad \boldsymbol{x} = (2,2,0,0) \qquad z = 0$$

- PLs em que isso ocorre são chamados de PL degenerados (i.e., existem soluções básicas com mais de uma base correspondente)
- Aqui, bastou um pivoteamento degenerado e já voltamos a fazer progresso
- Mas este não é o caso geral: Podemos ter vários casos e até "ciclar infinitamente"
- Existem **regras de pivoteamento** para evitar isso (i.e., regra para escolher quais variáveis vão trocar de papel)

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Considere o seguinda caso particular de PLE:

$$\text{maximizar } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \text{ sujeito a } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{com } \boldsymbol{b} \geq 0$$

- Obs: Coincidentemente, até agora sempre estávamos lidando com esse caso. Mas o Simplex também lida com o caso mais geral, como veremos.
- Neste caso em que $\boldsymbol{b} \geq 0$, as variáveis de folga nos dão uma base viável inicial.

Relembrando os exemplos anteriores

Primeiro exemplo do simplex:

Maximizar: $x_1 + x_2$
Respeitando:

$$\begin{array}{llllll} -x_1 + x_2 + x_3 & & & = 1 \\ \;x_1 & +x_4 & & = 3 \\ \quad x_2 & & +x_5 & = 2 \\ x_1, \ldots x_5 \geq 0 \end{array}$$

Começamos com o *tableau*:

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

- Note que as variáveis de folga começaram na base

Relembrando os exemplos anteriores

No exemplo do espaço de soluções viáveis ilimitado:

Maximizar: x_1
Respeitando:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Começamos com o *tableau*:

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & = & 1 & - x_1 & + x_2 \\ x_4 & = & 2 & + x_1 & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & \end{array}$$

- Aqui também temos as variáveis de folga começando na base

Relembrando os exemplos anteriores

No exemplo do PL degenerado:

Maximizar: x_2
Respeitando:

$$
\begin{array}{l}
-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
x_1 \qquad\quad\; + x_4 = 2 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Começamos com o *tableau*:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_3 & = & 0 & + x_1 & - x_2 \\
x_4 & = & 2 & - x_1 & \\
\hline
z & = & 0 & & + x_2
\end{array}
$$

- Variáveis de folga também começaram na base

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Considere agora o PLE:

Maximizar: $x_1 + 2x_2$
Respeitando:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quais variáveis colocaremos na base?

- Qual seria uma solução básica viável? Ou mesmo, uma solução viável?
- Vamos começar com a solução não negativa $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

  Esta solução não é viável.

- Ideia: incluir mais **variáveis de correção**

  Quanto falta para que $x_1 + 3x_2 + x_3$ seja 4? A variável x_4 terá esse valor.

  Quanto falta para que $2x_2 + x_3$ seja 2? A variável x_5 terá esse valor.

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Considere agora o PLE:

Maximizar: $x_1 + 2x_2$
Respeitando:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\
2x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Adicionando variáveis de correção e criando outra função objetivo

Maximizar: $-x_4 - x_5$
Respeitando:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\
2x_2 + x_3 + x_5 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Note: Neste PLE a função objetivo vale no máximo 0.
  Mas pode valer menos. Duas possibilidades para o ótimo:
- Se é 0, note que $x_4 = 0$ e $x_5 = 0$
  Com isso, o valor das demais variáveis nos dão a solução inicial do PLE original
- Se é menor que 0, então não há solução viável para PL original!
  $x_1 + 3x_2 + x_3 + 0$ nunca vale 4 e $2x_2 + x_3 + 0$ nunca vale 2 (ao mesmo tempo)
- Vamos agora resolver o **PLE auxiliar** acima e ver o que acontece

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Maximizar: $-x_4 - x_5$
Respeitando:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Agora variáveis de correção fazem o papel das variáveis de folga na "estratégia" usada nas outras vezes para ter solução inicial.

  (Obs: aqui temos $\boldsymbol{b} \geq 0$; mas aqui poderíamos mudar o sinal da variável de correção se necessário)

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & = & 4 & -\ 3x_2 & -\ x_3 & +\ x_4 \\ x_5 & = & 2 & -\ 2x_2 & -x_3 & \\ \hline z & = & \text{-6} & +x_1 & +5x_2 & +\ 2x_3 \end{array}$$

$$B = \{4, 5\} \qquad \boldsymbol{x} = (0, 0, 0, 4, 2) \qquad z = -6$$

- Fazendo dois pivoteamentos chegamos a

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & = & 2 & -\ x_2 & -\ x_4 & +\ x_5 \\ x_3 & = & 2 & -\ 2x_2 & & -x_5 \\ \hline z & = & & -x_4 & & -x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 3\} \qquad \boldsymbol{x} = (2, 0, 2, 0, 0) \qquad z = 0$$

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & 2 & -\ x_2 & -\ x_4 & +\ x_5 \\ x_3 & = & 2 & -\ 2x_2 & & -x_5 \\ \hline z & = & & -x_4 & & -x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 3\} \qquad \boldsymbol{x} = (2, 0, 2, 0, 0) \qquad z = 0$$

- Neste caso, temos $x_4 = x_5 = 0$, portanto a solução inicial para PLE original é:

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 2)$$

- De fato, podemos obter o tableau inicial do PLE original da seguinte maneira:
  - Elimine as colunas de x_4 e x_5
  - Escrever z em função de variáveis não básicas (no caso, apenas x_2)

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & 2 - x_2 \\ x_3 & = & 2 - 2x_2 \\ \hline z & = & 2 + x_2 \end{array}$$

- Pivoteando uma vez apenas o tableu acima, encontramos a solução.

Simplex (caso geral)

1. Converta o PL em PLE se necessário:

   maximizar $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, s.a. $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ $\quad n$ variáveis, m equações, A tem rank m

2. Se não há solução viável "óbvia", obtenha o PL auxiliar

   faça $\boldsymbol{b} \geq 0$ (se necessário); auxiliar: max $-(x_{n+1} + ...x_{n+m})$ s.a. $\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}$, $\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}$

   x_{n+i} variáveis de correção, $\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1, ..., x_{n+m})$, $\overline{A} = (A|I_m)$

   - Se ótimo do auxiliar é negativo, PLE não era viável; Se ótimo é zero, primeros n componentes da solução obtida é solução inicial do PLE

3. Obtenha o tableau inicial $T(B)$ $\qquad B \subseteq \{1, 2, ..., n\}$

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

4. Se $\boldsymbol{r} \leq 0$ retorne a solução (a partir de $\boldsymbol{p}$, completando com 0's); **Termine;**
5. Caso contrário, escolha x_v com coeficiente positivo em $\boldsymbol{r}$ para entrar na base

   Havendo mais de uma opção, use regra de pivoteamento
6. Se a coluna de x_v é não negativa em $T(B)$, PLE é ilimitado; **Termine**
7. Escolha variável x_u para sair da base; Se necessário, use regra de pivoteamento
8. Troque a base B e obtenha novo tableau $T(B)$; Vá para o passo 4.