

CI1238 - Otimização

Aula 06 - Dualidade

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

21/03/2023

Dualidade em Programação Linear

Considere o PL

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \text{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- ▶ A partir da primeira restrição e da não negatividade de x_1 e x_2 , temos:
 - ▶ $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$
- ▶ Ou seja, conseguimos um **limite superior** para valor ótimo do PL
- ▶ Mas podemos fazer melhor:
 - ▶ Podemos usar a primeira restrição dividida por 2, i.e., $2x_1 + 4x_2 \leq 6$
 - ▶ $2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$
- ▶ Melhor ainda: podemos usar a soma das restrições (1) e (2) divididas por 3 i.e., $\frac{1}{3}(4x_1 + 2x_1) + \frac{1}{3}(8x_2 + x_2) \leq \frac{1}{3}(12 + 3)$
 - ▶ $2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 5$
- ▶ Da para fazer melhor?

Dualidade em Programação Linear

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \text{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- ▶ No slide anterior, a partir das restrições, derivamos:
 - ▶ $2x_1 + 4x_2 \leq 6$ (usando restrição (1) dividida por 2)
 - ▶ $2x_1 + 3x_2 \leq 5$ (somando (1) e (2) e dividindo por 3)
- ▶ E se procurássemos outra combinação linear das restrições para obter
 - ▶ $d_1x_1 + d_2x_2 \leq h$ onde $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 3$ e h mínimo possível
 - ▶ Com isso teríamos $\forall x_1, x_2, 2x_1 + 3x_2 \leq d_1x_1 + d_2x_2 \leq h$
- ▶ Podemos fazer a restrição (1) multiplicada por um coeficiente y_1
- ▶ Podemos fazer a restrição (2) multiplicada por um coeficiente y_2
- ▶ Podemos fazer a restrição (3) multiplicada por um coeficiente y_3
- ▶ E somar tudo para obter:

$$y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq y_1 \cdot 12 + y_2 \cdot 3 + y_3 \cdot 4$$

$$\therefore (4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$$

- ▶ Como encontrar y_1, y_2, y_3 para que o lado direito seja mínimo?

Dualidade em Programação Linear

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \text{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- ▶ Do slide anterior procurávamos d_1, d_2 e h para termos
 - ▶ $d_1x_1 + d_2x_2 \leq h$ onde $d_1 \geq 2, d_2 \geq 3$ e h mínimo possível
- ▶ Obtivemos:
 - ▶ $(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
- ▶ Como encontrar y_1, y_2, y_3 para que o lado direito seja mínimo?

$$\begin{array}{lllll} \text{Minimizar:} & 12y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 \\ \text{Respeitando:} & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

- ▶ O PL acima é chamado de **dual** do PL original; O PL original é o **primal**

Solução do dual: $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{5}{16}, 0, \frac{1}{4})$ com função objetivo igual **4.75**.

- ▶ Ou seja, o limite superior para o primal é 4.75

Resolvendo o primal, obtemos $x = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ com função objetivo igual **4.75**.

- ▶ Ou seja o limitante superior era justo! Isso sempre ocorre? Sim!

Dualidade em Programação Linear

$$\begin{array}{llllll} \text{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Minimizar:} & 12y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 \\ \text{Respeitando:} & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0. & & \end{array}$$

- Qual a relação entre os vetores $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ do primal e do dual?
- E qual a relação entre as matrizes ?

Primal: maximizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, sujeito a $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$

Dual: minimizar $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$, sujeito a $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq 0$

- Note: Dada solução viável $\mathbf{y}$, o valor de $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ é limite superior para $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

Dualidade em Programação Linear

- ▶ Dados A , $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$:

Primal: maximizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, sujeito a $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Dual: minimizar $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$, sujeito a $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

- ▶ Lembrando: dada sol. viável $\mathbf{y}$, o valor de $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ é limite superior para $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$.
- ▶ Para toda solução viável $\mathbf{y}$ e toda solução viável $\mathbf{x}$, temos $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.
- ▶ O teorema a seguir nos diz algo mais forte:

Teorema da Dualidade: Dados os dois PLs:

Primal: maximizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, sujeito a $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (P)

Dual: minimizar $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$, sujeito a $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ (D)

Uma das 4 possibilidades ocorre:

- 1 (P) e (D) são inviáveis;
- 2 (P) é ilimitado e (D) é inviável;
- 3 (P) é inviável e (D) ilimitado;
- 4 (P) e (D) são viáveis e tem solução ótima. Sejam $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ as soluções ótimas de (P) e (Q), respectivamente

Então $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$. i.e. máximo de (P) é o mínimo de (D)