Computação Quântica
Aula 02

Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

17/09/2021

Relembrando: Axioma da Sobreposição

Axioma da Sobreposição:

Se um sistema quântico que pode estar em k possíveis estados $|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |k-1\rangle$, **então o sistema pode estar em qualquer combinação linear dos estados:**

$$\boldsymbol{\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \ldots + \alpha_{k-1} |k-1\rangle}$$

$$\sum_{i=0}^{k} |\alpha_i|^2 = 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

Axioma da Sobreposição

Exemplo 1: para $k = 3$, um possível estado do sistema seria:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\left|1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|2\right\rangle$$

Exemplo 2: para $k = 4$, um possível estado do sistema seria:

$$\frac{1}{2}\left|0\right\rangle - \frac{1}{2}\left|1\right\rangle + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left|3\right\rangle$$

- No exemplo 1, qual a probabilidade de observar 0 ao medir o sistema?
- No exemplo 2, qual a probabilidade de observar k? ($k = 0, 1, 2, 3$)

Medindo o valor de um qubit

Medindo sistemas quânticos

Axioma da Medida

Suponha que um sistema quântico está no estado

$$|\Psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \ldots + \alpha_{k-1} |k-1\rangle$$

Quando medimos o sistema:

- O resultado é um dos k estados clássicos $0, 1, \ldots, k-1$
- O estado j é observado com probabilidade $|\alpha_j|^2$
- O novo estado do sistema passa a ser $|j\rangle$

Medindo sistemas quânticos

Exemplo: $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})|3\rangle$

Quando medimos o sistema:

- O estado 0 é observado com probabilidade $\frac{1}{4}$
  - Neste caso, depois da medição o estado é $|\Psi\rangle = |0\rangle$.
- O estado 1 é observado com probabilidade $\frac{1}{4}$
  - Neste caso, depois da medição o estado é $|\Psi\rangle = |1\rangle$.
- O estado 2 não será observado
- O estado 3 é observado com probabilidade $\frac{1}{2}$
  - Neste caso, depois da medição o estado é $|\Psi\rangle = |3\rangle$.

Interpretação geométrica (no caso de amplitudes reais)

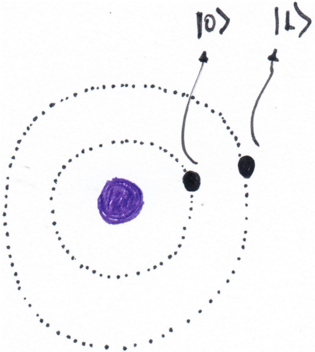
Vamos olhar um qubit do ponto de vista matemático, mais precisamente vamos olhar vetores do ponto de vista geométrico

Interpretação geométrica de vetores

Seja $|\Psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$, sendo $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

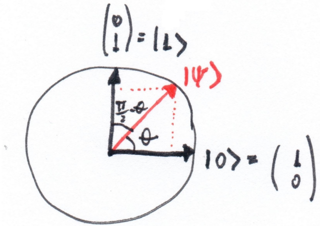
O que podemos dizer do vetor $|\Psi\rangle$ em relação aos vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$?

Interpretação geométrica (no caso de amplitudes reais)



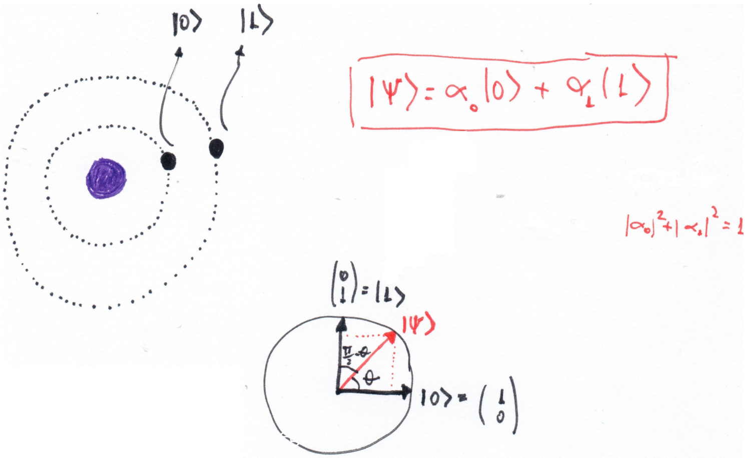
$$\boxed{|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle}$$

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$$



Note que α_0 e α_1 podem ser eventualmente negativos.

Interpretação geométrica (no caso de amplitudes reais)



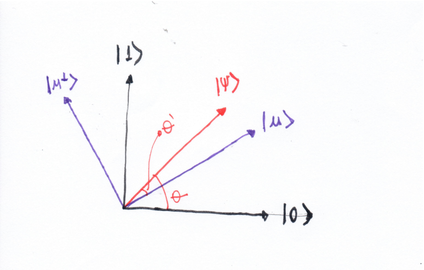
Qual o valor de α_0 e α_1 em função do ângulo θ? $\alpha_0 = \cos\theta$ $\alpha_1 = \sin\theta$

Se o estado de um qubit é $|\Psi\rangle$, ao se fazer a medição, qual é a probabilidade de se obter 0? (e de se obter 1?)

- $Pr[0] = |\alpha_0|^2 = \cos^2\theta$ $Pr[1] = |\alpha_1|^2 = \sin^2\theta$

Medição em Base Arbitrária

Digamos que $|\Psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$ Note que $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{pmatrix}$



Medindo se qubit está em 0 ou 1 (note que as probabilidades dependem de θ):

- $Pr[0] = |\alpha_0|^2 = |\cos\theta|^2 = \cos^2\theta$ $Pr[1] = |\alpha_1|^2 = |\sin\theta|^2 = |\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)|^2 = \cos^2(\frac{\pi}{2} - \theta)$

Importante:

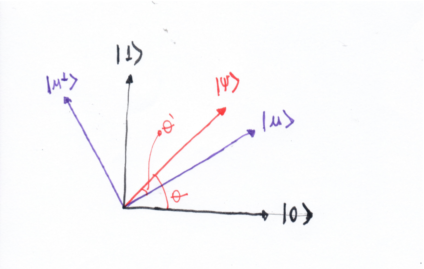
- $Pr[0] = |(|\psi\rangle, |0\rangle)|^2$ $Pr[1] = |(|\psi\rangle, |1\rangle)|^2$ Ou seja, medir 0 ou 1 associado ao produto interno com $|0\rangle$ ou $|1\rangle$

Ignorando o significado físico disso, se pudéssemos medir se o sistema está em u ou $u^\perp$, quais seriam as prob. de obtermos u ou $u^\perp$?

- $Pr[u] = |\alpha_0|^2 = \cos^2\theta'$ $Pr[u^\perp] = |\alpha_1|^2 = \cos^2(\frac{\pi}{2} - \theta')$
- $Pr[u] = |(|\psi\rangle, |u\rangle)|^2$ $Pr[u^\perp] = |(|\psi\rangle, |u^\perp\rangle)|^2$

Medição em Base Arbitrária

Digamos que $|\Psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$



O que (fisicamente) quer dizer "medir se o qubit está no estado u ou $u^{\perp}$"?

- Por hora vamos ignorar o que fisicamente significa isso, mas adiantamos que diferentes "propriedades" que podem ser observadas em um objeto estão associadas a diferentes bases ortonormais.

- Neste momento vamos apenas pensar como teóricos e notar que do ponto de vista matemático estamos generalização o conceito de medição de um qubit para qualquer par de vetores ortonormais.

A base de Hadamard

Considere os seguintes estados quânticos:

Os estados de Hadamard

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Digamos que temos um qubit que sabemos estar ou no estado $|+\rangle$ ou no estado $|-\rangle$.

- Conseguimos distinguir em qual dos dois estados está o qubit se fizermos uma medição na base $|0\rangle$, $|1\rangle$?

A base de Hadamard

Os estados de Hadamard

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Caso 1: Digamos o estado do qubit é $|+\rangle$:

Caso $|+\rangle$: obtemos 0 com probabilidade $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ novo estado: $|0\rangle$
obtemos 1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ novo estado: $|1\rangle$

Caso 2: Digamos o estado do qubit é $|-\rangle$:

Caso $|-\rangle$: obtemos 0 com probabilidade $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ novo estado: $|0\rangle$
obtemos 1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ novo estado: $|1\rangle$

Princípio da Incerteza (cenário restrito)

Suponha que temos $|\Psi\rangle$ e queremos saber seu valor $+/-$.

- Após a medida, quão certos estaremos de seu valor $0/1$?
- E quão certos estaremos de seu valor $+/-$?

De maneira semelhante, se medirmos $|\Psi\rangle$ para saber seu valor $0/1$.

- Após a medida, quão certos estaremos de seu valor $+/-$?
- E quão certos estaremos de seu valor $0/1$?

"One can never know with perfect accuracy both of those two important factors which determine the movement of one of the smallest particles? Its position and its velocity."

– *Herner Heisenberg*

A base de Hadamard e a base Padrão

Os estados de Hadamard

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Importante:

- Isolando $|0\rangle$ e $|1\rangle$ no sistema acima temos:
  - $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$
  - $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

Exemplo de medição em base arbitrária

Exemplo: Medindo o qubit na base de Hadamard (a base $|+\rangle$, $|-\rangle$):

Seja $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$

- Medindo na base $|+\rangle$, $|-\rangle$, qual é a probabilidade de obter $+$?
- Medindo na base $|+\rangle$, $|-\rangle$, qual é a probabilidade de obter $-$?

Exemplo de medição em base arbitrária

Vamos medir o qubit $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ na base $|+\rangle, |-\rangle$

Usando produto interno, temos:

- $Pr[+] = |\,|\psi\rangle, |+\rangle\,|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$
- $Pr[-] = |\,|\psi\rangle, |-\rangle\,|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Observação importante:

Primeiramente vamos reescrever $|\Psi\rangle$ em termos de $|+\rangle$ e $|-\rangle$:

- Lembre que $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ e $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$$
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)$$
$$|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)|-\rangle$$
$$|\Psi\rangle = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|-\rangle$$

- $Pr[+] = |\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$
- $Pr[-] = |\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$