

Computação Quântica

Aula 03

Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

Revisão de Números Complexos e Álgebra Linear

Números Complexos – Breve revisão

Números complexos

Sejam z e w números complexos,

- $z = a + bi$
- $w = c + di$ lembrando que $i^2 = -1$

Soma e multiplicação:

- $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- $zw = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Definição de conjugado e de módulo:

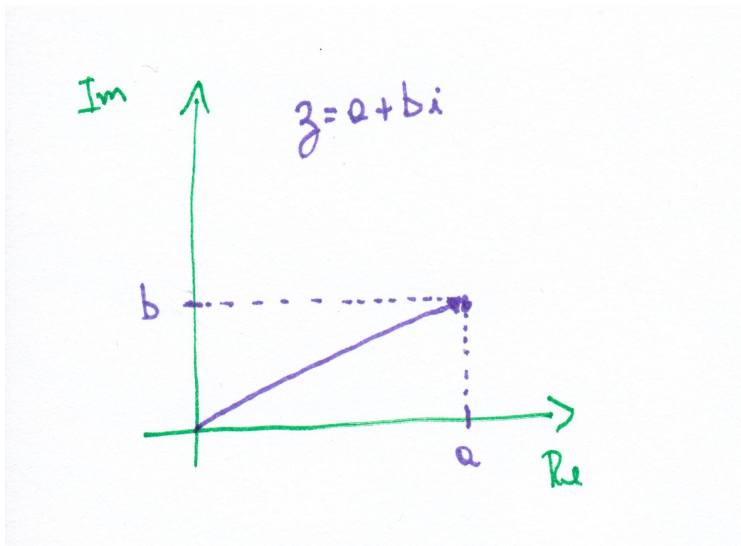
- $z^* = a - bi$ (conjugado complexo)
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Algumas identidades úteis (as demonstrações são simples e ficam como exercício):

- $|z|^2 = a^2 + b^2 = zz^*$
- $|zw| = |z||w|$

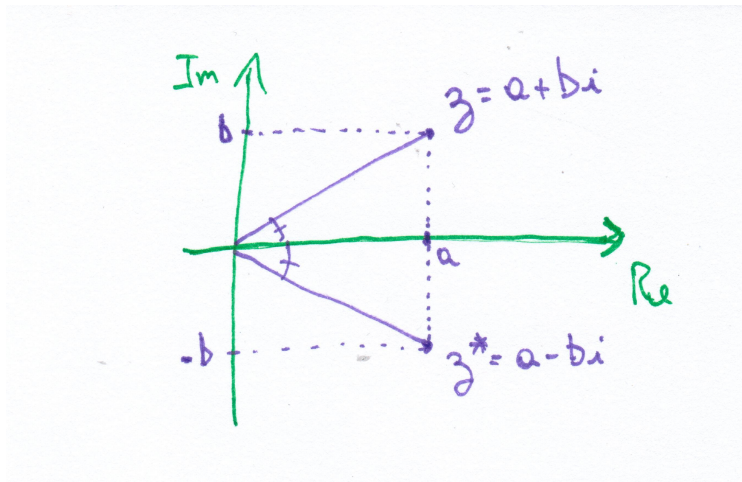
Números complexos

Representação geométrica



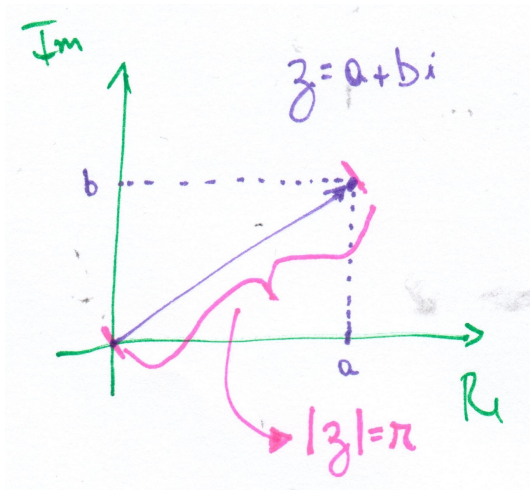
Números complexos

Complexo conjugado de $z = a + bi$



Números complexos

Módulo de $z = a + bi$



Forma polar de um número complexo:

Seja $z = a + bi$

Forma polar: $z = re^{i\theta}$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (sendo θ o ângulo da representação geométrica)

Multiplicação na forma polar: $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Caso comum: $r = 1$ $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Revisão relâmpago de álgebra linear

- Elementos de espaços vetoriais: **vetores**.
- Espaço vetorial de interesse para nós: $\mathbb{C}^n$.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Somando vetores:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z'_1 \\ z_2 + z'_2 \\ \vdots \\ z_n + z'_n \end{pmatrix}$$

Multiplicação por escalar:

$$a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 \\ az_2 \\ \vdots \\ az_n \end{pmatrix}$$

Notação em mecânica quântica:

- $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbb{C}^n$
- soma: $|\psi\rangle + |\phi\rangle$
- multiplicação por escalar: $a|\psi\rangle$

Exemplo:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) |1\rangle$$

lembrando que $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vetores geradores e base

Os vetores $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$ geram $\mathcal{V}$ se:

Cada vetor $|\psi\rangle$ de $\mathcal{V}$ pode ser escrito na forma $|\psi\rangle = \sum_i^n a_i |v_i\rangle$.

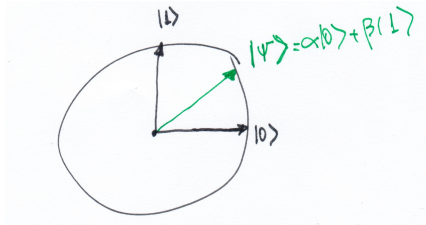
- Exemplo: $|0\rangle$ e $|1\rangle$ geram $\mathbb{C}^2$ (obs: $|0\rangle$ e $|1\rangle$ também são uma base de $\mathbb{C}^2$)
- Algum outro exemplo de par de vetores gerando $\mathbb{C}^2$?

Os vetores $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ geram $\mathbb{C}^2$

- Alguém reconhece os vetores acima?
São os vetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ vistos nas aulas anteriores.
- Os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são chamados de base computacional
- Os vetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são chamados de base de Hadamard

Transformações Lineares

- Um mapeamento entre dois espaços vetoriais (nosso caso: vetores unitários de $\mathbb{C}_n$)
- Definido por uma matriz (e.g, matrizes unitárias, matrizes de projeção)



Exercício: O que a matriz abaixo faz com os vetores $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|\Psi\rangle$?

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exercício: Apresente a matriz X tal que $X|0\rangle = |1\rangle$ e $X|1\rangle = |0\rangle$

Pergunta: O que a matriz X faz com o vetor $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$?

Exercício: O que a matriz abaixo faz com o vetor $|0\rangle$?

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- E com o vetor $|1\rangle$?
- E com o vetor $|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$?

$$\textbf{Ket: } |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \dots + \alpha_{n-1} |n-1\rangle = \sum_i^{n-1} \alpha_i |i\rangle$$

$$\textbf{Bra: } \langle\psi| = (\alpha_0^* \alpha_1^* \cdots \alpha_{n-1}^*) = \sum_i^{n-1} \alpha_i^* \langle i|$$

Produto interno

- O produto interno é uma função de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ em $\mathbb{C}$ que respeita certas propriedades
- Existem várias notações na literatura:
 - uv
 - $u \cdot v$
 - $\langle u, v \rangle$
 - $(|u\rangle, |v\rangle)$
 - $\langle u|v\rangle$

Para o nosso caso: Seja $|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ e $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Definição de produto interno: $(|u\rangle, |v\rangle) = \sum u_i^* v_i = (u_1^* \ u_2^* \cdots u_n^*) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Mais sobre o produto interno $(|u\rangle, |v\rangle)$:

- $(|u\rangle, |v\rangle) = (|v\rangle, |u\rangle)^*$
- $(|v\rangle, |v\rangle) \geq 0$ obs: $(|v\rangle, |v\rangle) = 0$ somente quando $|v\rangle = \mathbf{0}$

Em computação quântica, um *Espaço de Hilbert* é a mesma coisa que um *espaço vetorial com produto interno*.

A rigor teríamos que tomar cuidado se a dimensão for infinita, mas em computação/informação quântica lidamos apenas com dimensões finitas.

Matrizes

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada tal que $a_{ij} \in \mathbb{C}$

- Transposta: $A^T = [a_{ji}]$
- Transposta-Conjugada: $A^\dagger = [a_{ji}^*]$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 2i \\ 1+i & 1-4i \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1-3i & 1-i \\ -2i & 1+4i \end{pmatrix}$$

- A é uma matriz unitária se $AA^\dagger = A^\dagger A = I$

Importante: Matrizes unitárias preservam ângulos

(de maneira geral, produtos internos):

Mais precisamente, seja U uma matriz unitária e $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ vetores

- Se $U|\phi\rangle = |\phi'\rangle$ e $U|\psi\rangle = |\psi'\rangle$, então $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi'|\psi'\rangle$.

Produto Tensorial

Seja $|u\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|v\rangle \in \mathcal{H}_2$.

- Seja n a dimensão de $\mathcal{H}_1$ e m a dimensão de $\mathcal{H}_2$.
- O produto tensorial $|u\rangle \otimes |v\rangle$ é o seguinte vetor:

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ \vdots \\ u_1 v_m \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \\ \vdots \\ u_n v_1 \\ u_n v_2 \\ \vdots \\ u_n v_m \end{pmatrix}$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 2 \\ 3 \times 1 \\ 3 \times 2 \\ -1 \times 1 \\ -1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert de dimensão n e m , então

- $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é um espaço vetorial de dimensão nm
- Os elementos de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ são vetores $|u\rangle \otimes |v\rangle$, tal que $|u\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|v\rangle \in \mathcal{H}_2$.

Produto Tensorial de Matrizes

Seja A e B matrizes quadradas de ordem n e m . Definimos

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix}$$

Produtos Tensoriais (cont.)

Propriedades:

- $\alpha(|u\rangle \otimes |v\rangle) = (\alpha |u\rangle) \otimes |v\rangle = |u\rangle \otimes (\alpha |v\rangle)$
- $(|u_1\rangle + |u_2\rangle) \otimes |v\rangle = |u_1\rangle \otimes |v\rangle + |u_2\rangle \otimes |v\rangle$
- $|u\rangle \otimes (|v_1\rangle + |v_2\rangle) = |u\rangle \otimes |v_1\rangle + |u\rangle \otimes |v_2\rangle$
- $(A \otimes B)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = A|u\rangle \otimes B|v\rangle$

Notação:

- Usamos $|\Psi\rangle^{\otimes k}$ para denotar o produto tensorial de $|\Psi\rangle$ consigo mesmo k vezes
- Para uma matriz A , denotamos analogamente $A^{\otimes k}$