

Computação Quântica

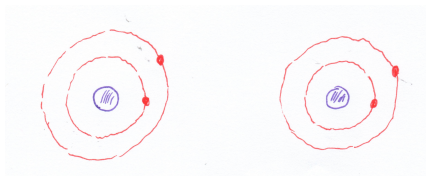
Aula 04

Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

2 qubits e emaranhamento

2 qubits



Em quantos estados este sistema pode estar? Em 4 estados.

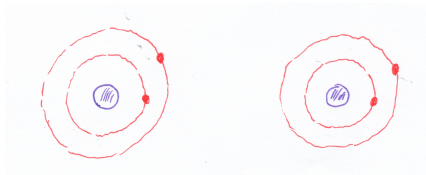
$$|\Psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle$$

$$\alpha_x \in \mathbb{C}, \quad \sum |\alpha_x|^2 = 1$$

Vamos medir o sistema:

- Qual é a probabilidade de se obter 00? $Pr[00] = |\alpha_{00}|^2$
- Após a medida, qual o novo estado? $|\Psi'\rangle = |00\rangle$

2 qubits



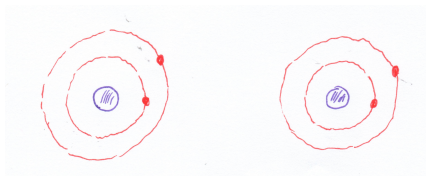
$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle$$

$$\alpha_x \in \mathbb{C}, \quad \sum |\alpha_x|^2 = 1$$

Vamos medir **apenas o primeiro qubit** do sistema:

- Qual é a probabilidade de se obter 0? $P[0] = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$
- Após a medida, qual o novo estado? $|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$

2 qubits



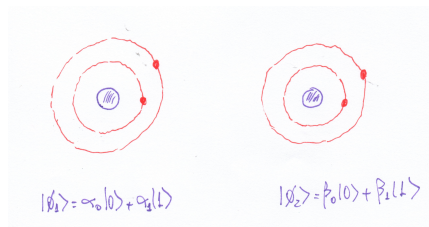
Digamos que o sistema esteja no estado:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{i}{2} |11\rangle$$

Vamos medir **apenas o primeiro qubit** do sistema:

- Qual é a probabilidade de se obter 0? $P[0] = \left|\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$
- Após a medida, qual o novo estado? $|\psi'\rangle = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})}{\sqrt{3/2}} |00\rangle + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3/2}} |01\rangle = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right) |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |01\rangle$

2 qubits



No slide anterior dissemos que o estado do sistema era:

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

- Mas qual é o estado “individual” $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ de cada qubit?
- Seja $|\phi_1\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ e $|\phi_2\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$
- $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ é o estado composto destes estados

Assim, $|\Psi\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$

Ou seja, $\alpha_{00} = \alpha_0\beta_0$, $\alpha_{01} = \alpha_0\beta_1$, $\alpha_{10} = \alpha_1\beta_0$, $\alpha_{11} = \alpha_1\beta_1$

2 qubits

Supondo que individualmente os estados dos átomos são:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |1\rangle$$

Qual o estado do sistema composto?

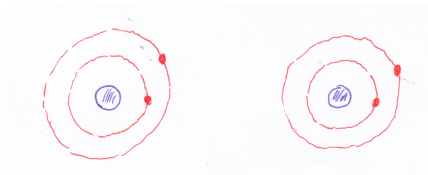
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} |01\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} |11\rangle$$

Exercício: Refaça o exercício supondo que os estados são $|+\rangle$ e $|+\rangle$

No caso acima, dado $|\Psi\rangle$, poderíamos recuperar o estado individual de cada qubit fatorando

Isso sempre é possível?

Estado de Bell



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

Conseguimos fatorar $|\Psi\rangle$ para obter o estado de cada qubit?

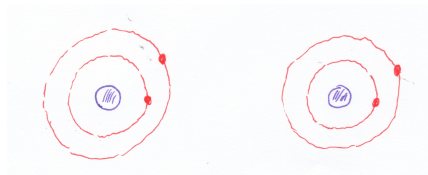
Suponha que $|\Psi\rangle = (\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) \otimes (\beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) = \alpha_0\beta_0 |00\rangle + \alpha_0\beta_1 |01\rangle + \alpha_1\beta_0 |10\rangle + \alpha_1\beta_1 |11\rangle$

- Como $\alpha_0\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\alpha_1\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ temos que $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \neq 0$
- Porém, $\alpha_0\beta_1 = 0$. Contradição!

Outros estados de Bell

- $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$
- $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$
- $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$
- $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$

Estado de Bell



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

Vamos medir este Estado de Bell:

- $Pr[00] = \frac{1}{2}$ $Pr[11] = \frac{1}{2}$

Medindo agora apenas o primeiro qubit:

- $Pr[0] = \frac{1}{2}$ Novo estado: $|00\rangle$

- $Pr[1] = \frac{1}{2}$ Novo estado: $|11\rangle$

Ou seja, medindo o primeiro qubit, o segundo qubit imediatamente também “colapsa”.