

Computação Quântica

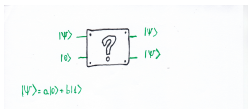
Aula 06

Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

O teorema da não clonagem

É possível construir um circuito para “copiar” o estado quântico de um qubit?



Seja $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ o qubit que queremos copiar

Seja $\mathcal{U}$ a transformação unitária que corresponde ao circuito,

- Note que se $|\psi\rangle = |0\rangle \Rightarrow \mathcal{U}|\psi 0\rangle = \mathcal{U}|00\rangle = |00\rangle$
- Note que se $|\psi\rangle = |1\rangle \Rightarrow \mathcal{U}|\psi 0\rangle = \mathcal{U}|10\rangle = |11\rangle$
- Note que como $\mathcal{U}(|00\rangle) = |00\rangle$, então por linearidade $\mathcal{U}(a|00\rangle) = a|00\rangle$ (*)
- Similarmente $\mathcal{U}(a|10\rangle) = a|10\rangle$ (**)

Agora observe o que a descrição do circuito em forma de matriz unitária nos dá:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}((a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle) &= \mathcal{U}(a|00\rangle + b|10\rangle) && \text{(desenvolvendo o produto tensorial)} \\ &= \mathcal{U}(a|00\rangle) + \mathcal{U}(b|10\rangle) && \text{(linearidade)} \\ &= a|00\rangle + b|11\rangle && \text{(usando (*) e (**))}\end{aligned}$$

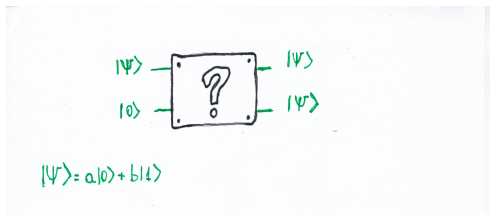
Lembrando que: $\mathcal{U}|\psi 0\rangle = |\psi\psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)(a|0\rangle + b|1\rangle) = a^2|00\rangle + ab|01\rangle + ab|10\rangle + b^2|11\rangle$

Concluimos que $a = 0, b = 1$ ou $a = 1, b = 0$.

- O que isso significa? Não existe tal matriz unitária, pois a e b são arbitrários.

Não clonagem e teletransporte

É possível construir um circuito para “copiar” o estado quântico de um qubit?

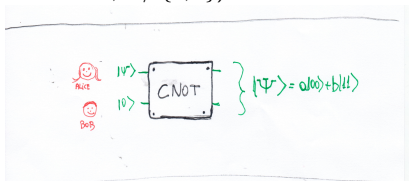


Note que vimos que não é possível clonar $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$,

- exceto quando $a = 0, b = 1$ or $a = 1, b = 0$.
- Ou seja, $|\psi\rangle$ é um bit clássico.
- Qual era a porta que fazia cópia de bits clássicos?
- Resp: A porta CNOT.
- Vamos explorar o que acontece ao tentarmos copiar qubits usando CNOT.

Protocolo 1

O que acontece se tentarmos copiar o estado do qubit $a|0\rangle + b|1\rangle$, que está com a **Alice** para um qubit que está com **Bob** (que inicialmente está setado em $|0\rangle$)? (lembrando que possivelmente, $a, b \notin \{0, 1\}$)



Os bits emaranham no estado $|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$,

- Vamos medir agora o qubit da **Alice** na base de Hadamard (+/-)?

• Pergunta: O que acontece com o qubit do **Bob**?

$$\begin{aligned} a|00\rangle + b|11\rangle &= a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)|0\rangle + b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) \end{aligned}$$

- Medindo o qubit da **Alice** na base (+/-) temos dois casos:

• Caso 1: Obtemos $+$ e o sistema agora fica em $|+\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle)$

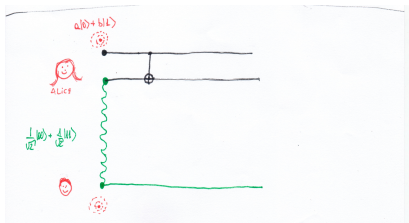
• Caso 2: Obtemos $-$ e o sistema agora fica em $|-\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle)$

Neste segundo caso, pedimos para Bob aplicar uma porta Z em seu qubit
E com isso, agora o sistema fica no estado $|-\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle)$

- Com isso, nos dois casos, ao final **Bob** termina com o seu qubit no estado que era o estado inicial do qubit de **Alice**
- Nós “transportamos” o qubit de Alice para Bob!

Teletransporte Quântico

Vamos separar Alice e Bob a uma grande distância:



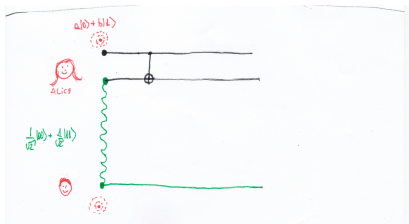
Note que o sistema tem 3 qubits (dois com Alice e um com Bob)

- O primeiro qubit fica com Alice. Este é o que queremos teletransportar
- O segundo qubit também fica com Alice. Este é um qubit auxiliar que está emaranhado com o qubit do Bob
- O terceiro qubit fica com Bob (emaranhado com o segundo, que está com Alice)

Pergunta: É possível enviar o primeiro qubit de Alice para Bob?

Protocolo 2 (teletransporte quântico)

Vamos separar Alice e Bob a uma grande distância:



Vamos ver o estado dos 3 qubits antes e depois de aplicar o CNOT:

- Inicialmente $(a|0\rangle + b|1\rangle)(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle) = \frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|111\rangle$
- Depois do CNOT: $\frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|101\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|110\rangle$

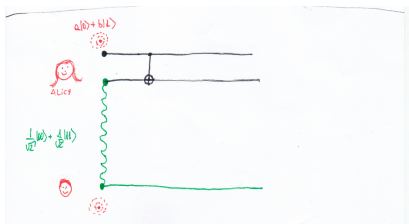
Medindo o 2o qubit na base 0/1, qual o estado dos qubits restantes de Alice e Bob?

- segundo qubit é 0: O estado dos demais qubits é $a|00\rangle + b|11\rangle$
- segundo qubit é 1: O estado dos demais qubits é $a|01\rangle + b|10\rangle$

Como isso pode ser útil?

Protocolo 2 (teletransporte quântico)

Vamos separar Alice e Bob a uma grande distância:



Relembrando slide anterior:

Medindo o 2-qubit na base 0/1, os estado dos qubits restantes é:

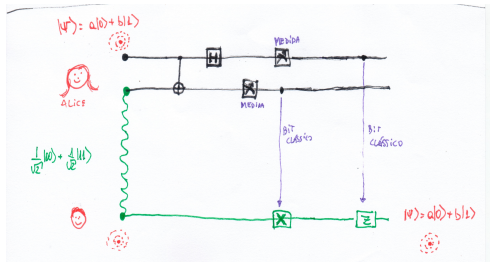
- Caso 0: $a|00\rangle + b|11\rangle$
- Caso 1: $a|01\rangle + b|10\rangle$

O que Bob deve fazer para obter ψ ?

- Caso 0: Alice e Bob repetem o Protocolo 1
- Caso 1: Bob aplica um “bit flip” em seu bit e depois Alice e Bob repetem o protocolo anterior

Teletransporte Quântico

Protocolo 2 em forma de circuito:



Obs: Você vê algo diferente que Alice fez?

- Ao invés dela medir seu bit na base de Hadamard, ela primeiro aplicou uma transformada de Hadamard e depois mediu na base 0/1.
- Exercício: Verifique que o resultado é o mesmo.

Observação crucial: Alice envia apenas 2 bits clássicos e com isso dois números complexos são teletransportados: Esse é o poder do emaranhamento!