Computação Quântica
Aula 11

Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

O Algoritmo de Grover

Objetivo: encontrar um elemento de um conjunto de tamanho N em tempo $\mathcal{O}(\sqrt{N})$.

O Algoritmo de Grover

Objetivo: encontrar um elemento de um conjunto de tamanho N em tempo $\mathcal{O}(\sqrt{N})$.

- Embora seja conhecido com algoritmo de "busca", não é uma busca no sentido clássico em que estamos acostumados

O Algoritmo de Grover

Objetivo: encontrar um elemento de um conjunto de tamanho N em tempo $\mathcal{O}(\sqrt{N})$.

- Embora seja conhecido com algoritmo de "busca", não é uma busca no sentido clássico em que estamos acostumados

  (aqui não é fornecido um vetor de entrada para encontrar um elemento via busca binária, sequencial, etc.)

O Algoritmo de Grover

Objetivo: encontrar um elemento de um conjunto de tamanho N em tempo $\mathcal{O}(\sqrt{N})$.

- Embora seja conhecido com algoritmo de "busca", não é uma busca no sentido clássico em que estamos acostumados

  (aqui não é fornecido um vetor de entrada para encontrar um elemento via busca binária, sequencial, etc.)

- Aqui busca significa encontrar um objeto que tem certa propriedade

O Algoritmo de Grover

Objetivo: encontrar um elemento de um conjunto de tamanho N em tempo $\mathcal{O}(\sqrt{N})$.

- Embora seja conhecido com algoritmo de "busca", não é uma busca no sentido clássico em que estamos acostumados

  (aqui não é fornecido um vetor de entrada para encontrar um elemento via busca binária, sequencial, etc.)

- Aqui busca significa encontrar um objeto que tem certa propriedade
- Se quisermos, podemos pensar que esta propriedade é a entrada do algoritmo

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.
- Tipicamente estamos preocupados com linguagens (propriedades) decidíveis.

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.
- Tipicamente estamos preocupados com linguagens (propriedades) decidíveis.
  - Não estamos preocupados com propriedades indecidíveis, ou seja, dada um string não existe sequer um algoritmo que consegue decidir se a dada string possui ou não tal propriedade. Em outras palavras, estamos preocupados com linguagens recursivas. Ou seja, a propriedade (linguagem) em questão é totalmente definida pela máquina de Turing que a decide.

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.
- Tipicamente estamos preocupados com linguagens (propriedades) decidíveis.
  - Não estamos preocupados com propriedades indecidíveis, ou seja, dada um string não existe sequer um algoritmo que consegue decidir se a dada string possui ou não tal propriedade. Em outras palavras, estamos preocupados com linguagens recursivas. Ou seja, a propriedade (linguagem) em questão é totalmente definida pela máquina de Turing que a decide.
  - Caso comum: propriedades testáveis em tempo polinomial.
- Ou seja, podemos (se quisermos) pensar que a entreda do algoritmo de Grover é a propriedade (i.e., um algoritmo).

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.
- Tipicamente estamos preocupados com linguagens (propriedades) decidíveis.
  - Não estamos preocupados com propriedades indecidíveis, ou seja, dada um string não existe sequer um algoritmo que consegue decidir se a dada string possui ou não tal propriedade. Em outras palavras, estamos preocupados com linguagens recursivas. Ou seja, a propriedade (linguagem) em questão é totalmente definida pela máquina de Turing que a decide.
  - Caso comum: propriedades testáveis em tempo polinomial.
- Ou seja, podemos (se quisermos) pensar que a entreda do algoritmo de Grover é a propriedade (i.e., um algoritmo).
- Para simplificar, lidaremos com o caso em que apenas uma string possui tal propriedade (ou seja, a linguagem tem apenas um elemento).

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.
- Tipicamente estamos preocupados com linguagens (propriedades) decidíveis.
  - Não estamos preocupados com propriedades indecidíveis, ou seja, dada um string não existe sequer um algoritmo que consegue decidir se a dada string possui ou não tal propriedade. Em outras palavras, estamos preocupados com linguagens recursivas. Ou seja, a propriedade (linguagem) em questão é totalmente definida pela máquina de Turing que a decide.
  - Caso comum: propriedades testáveis em tempo polinomial.
- Ou seja, podemos (se quisermos) pensar que a entreda do algoritmo de Grover é a propriedade (i.e., um algoritmo).
- Para simplificar, lidaremos com o caso em que apenas uma string possui tal propriedade (ou seja, a linguagem tem apenas um elemento).
- Note: neste caso estamos falando de um algoritmo que aceita apenas uma string dentre as 2^n strings possíveis (uma agulha em um palheiro).

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.
- Tipicamente estamos preocupados com linguagens (propriedades) decidíveis.
  - Não estamos preocupados com propriedades indecidíveis, ou seja, dada um string não existe sequer um algoritmo que consegue decidir se a dada string possui ou não tal propriedade. Em outras palavras, estamos preocupados com linguagens recursivas. Ou seja, a propriedade (linguagem) em questão é totalmente definida pela máquina de Turing que a decide.
  - Caso comum: propriedades testáveis em tempo polinomial.
- Ou seja, podemos (se quisermos) pensar que a entreda do algoritmo de Grover é a propriedade (i.e., um algoritmo).
- Para simplificar, lidaremos com o caso em que apenas uma string possui tal propriedade (ou seja, a linguagem tem apenas um elemento).
- Note: neste caso estamos falando de um algoritmo que aceita apenas uma string dentre as 2^n strings possíveis (uma agulha em um palheiro).

Note: essencialmente estamos no modelo "caixa preta" (que é a maneira como vamos tratar o algoritmo de entrada).

O Algoritmo de Grover

Formalizando: Busca por objeto com certa propriedade

Dada uma propriedade, encontrar um "objeto" de tamanho n (uma string de tamanho n que representa o objeto) sem precisar enumerar as $2^n = N$ strings de tamanho n.

- O que significa "uma dada propriedade"?
  - Em teoria da computação uma propriedade é definida por um conjunto de strings (tipicamente um conjunto de strings que compartilham alguma característica em comum), ou seja uma linguagem.
- Tipicamente estamos preocupados com linguagens (propriedades) decidíveis.
  - Não estamos preocupados com propriedades indecidíveis, ou seja, dada um string não existe sequer um algoritmo que consegue decidir se a dada string possui ou não tal propriedade. Em outras palavras, estamos preocupados com linguagens recursivas. Ou seja, a propriedade (linguagem) em questão é totalmente definida pela máquina de Turing que a decide.
  - Caso comum: propriedades testáveis em tempo polinomial.
- Ou seja, podemos (se quisermos) pensar que a entreda do algoritmo de Grover é a propriedade (i.e., um algoritmo).
- Para simplificar, lidaremos com o caso em que apenas uma string possui tal propriedade (ou seja, a linguagem tem apenas um elemento).
- Note: neste caso estamos falando de um algoritmo que aceita apenas uma string dentre as 2^n strings possíveis (uma agulha em um palheiro).

Note: essencialmente estamos no modelo "caixa preta" (que é a maneira como vamos tratar o algoritmo de entrada).

Importante: neste modelo o Algoritmo de Grover é ótimo!

O Algoritmo de Grover

Exemplos de agulhas no palheiro (supondo apenas uma agulha):

O Algoritmo de Grover

Exemplos de agulhas no palheiro (supondo apenas uma agulha):

- Dado uma fórmula ϕ em 3-CNF, encontar uma valoração que a satisfaça.

O Algoritmo de Grover

Exemplos de agulhas no palheiro (supondo apenas uma agulha):

- Dado uma fórmula ϕ em 3-CNF, encontar uma valoração que a satisfaça.
- Dado um grafo, encontar um circuito hamiltoniano.

O Algoritmo de Grover

Exemplos de agulhas no palheiro (supondo apenas uma agulha):

- Dado uma fórmula ϕ em 3-CNF, encontar uma valoração que a satisfaça.
- Dado um grafo, encontar um circuito hamiltoniano.
- Dado um grafo com pesos, encontar um circuito que visite todos os vértices cujo peso do circuito seja mínimo.

O Algoritmo de Grover

Exemplos de agulhas no palheiro (supondo apenas uma agulha):

- Dado uma fórmula ϕ em 3-CNF, encontar uma valoração que a satisfaça.
- Dado um grafo, encontar um circuito hamiltoniano.
- Dado um grafo com pesos, encontar um circuito que visite todos os vértices cujo peso do circuito seja mínimo.
- Dada uma instância do problema da mochila, encontar uma solução.

O Algoritmo de Grover

Exemplos de agulhas no palheiro (supondo apenas uma agulha):

- Dado uma fórmula ϕ em 3-CNF, encontar uma valoração que a satisfaça.
- Dado um grafo, encontar um circuito hamiltoniano.
- Dado um grafo com pesos, encontar um circuito que visite todos os vértices cujo peso do circuito seja mínimo.
- Dada uma instância do problema da mochila, encontar uma solução.

Ideia: Colocar todas strings em sobreposição, jogar no algoritmo que testa a propridade (consequentemente, saída temos cada string com sua saída em sobreposição) e, de alguma maneira, manipular a superposição para que a "agulha" (string que procuramos) que estamos buscando no palheiro tenha amplitude muito alta.

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$
ou seja, $\forall x \in \{0,1\}^n \setminus \{x^*\}, \quad f(x) = 0)$

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$
ou seja, $\forall x \in \{0,1\}^n \setminus \{x^*\}, \quad f(x) = 0)$

- (1) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad -\alpha_{x^*} |x^*\rangle + \sum_{x \neq x^*} \alpha_x |x\rangle.$

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$
ou seja, $\forall x \in \{0,1\}^n \setminus \{x^*\}, \quad f(x) = 0$)

- (1) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad -\alpha_{x^*} |x^*\rangle + \sum_{x \neq x^*} \alpha_x |x\rangle.$
- (2) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad \sum_x (2\mu - \alpha_x) |x\rangle.$

onde $\mu = \sum_x \alpha_x / N$ é a média das amplitudes.

Observe que $(2\mu - \alpha_x) = \mu + (\mu - \alpha_x)$

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$
ou seja, $\forall x \in \{0,1\}^n \setminus \{x^*\}, \quad f(x) = 0$)

- (1) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad -\alpha_{x^*} |x^*\rangle + \sum_{x \neq x^*} \alpha_x |x\rangle.$
- (2) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad \sum_x (2\mu - \alpha_x) |x\rangle.$

onde $\mu = \sum_x \alpha_x / N$ é a média das amplitudes.

Observe que $(2\mu - \alpha_x) = \mu + (\mu - \alpha_x)$

Ideia do Algoritmo

Vamos rodar os passos (1) e (2) alternadamente $O(\sqrt{N})$ vezes e no final medir.

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$
ou seja, $\forall x \in \{0,1\}^n \setminus \{x^*\}, \quad f(x) = 0$)

- (1) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad -\alpha_{x^*} |x^*\rangle + \sum_{x \neq x^*} \alpha_x |x\rangle.$
- (2) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad \sum_x (2\mu - \alpha_x) |x\rangle.$

onde $\mu = \sum_x \alpha_x / N$ é a média das amplitudes.

Observe que $(2\mu - \alpha_x) = \mu + (\mu - \alpha_x)$

Ideia do Algoritmo

Vamos rodar os passos (1) e (2) alternadamente $O(\sqrt{N})$ vezes e no final medir.

- Veremos que a probabilidade de obeter x^* é $1/2$

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$
ou seja, $\forall x \in \{0,1\}^n \setminus \{x^*\}, \quad f(x) = 0$)

- (1) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad -\alpha_{x^*} |x^*\rangle + \sum_{x \neq x^*} \alpha_x |x\rangle.$
- (2) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad \sum_x (2\mu - \alpha_x) |x\rangle.$

onde $\mu = \sum_x \alpha_x / N$ é a média das amplitudes.

Observe que $(2\mu - \alpha_x) = \mu + (\mu - \alpha_x)$

Ideia do Algoritmo

Vamos rodar os passos (1) e (2) alternadamente $O(\sqrt{N})$ vezes e no final medir.

- Veremos que a probabilidade de obeter x^* é $1/2$
- Rodamos o algoritmo várias vezes e escolhemos o resultado mais obtido.

O Algoritmo de Grover

Dois passos básicos usados no algoritmo de Grover:

- (1) Inversão de fase.
- (2) Reflexão em torno da média.

Vamos ver mais especificamente o que os passos acima fazem:

Seja f a função que representa a propriedade de entrada (no modelo caixa preta)

Seja x^* a única string tal que $f(x^*) = 1$
ou seja, $\forall x \in \{0,1\}^n \setminus \{x^*\}, \quad f(x) = 0$)

- (1) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad -\alpha_{x^*} |x^*\rangle + \sum_{x \neq x^*} \alpha_x |x\rangle.$
- (2) $\sum_x \alpha_x |x\rangle \quad \Longrightarrow \quad \sum_x (2\mu - \alpha_x) |x\rangle.$

onde $\mu = \sum_x \alpha_x / N$ é a média das amplitudes.

Observe que $(2\mu - \alpha_x) = \mu + (\mu - \alpha_x)$

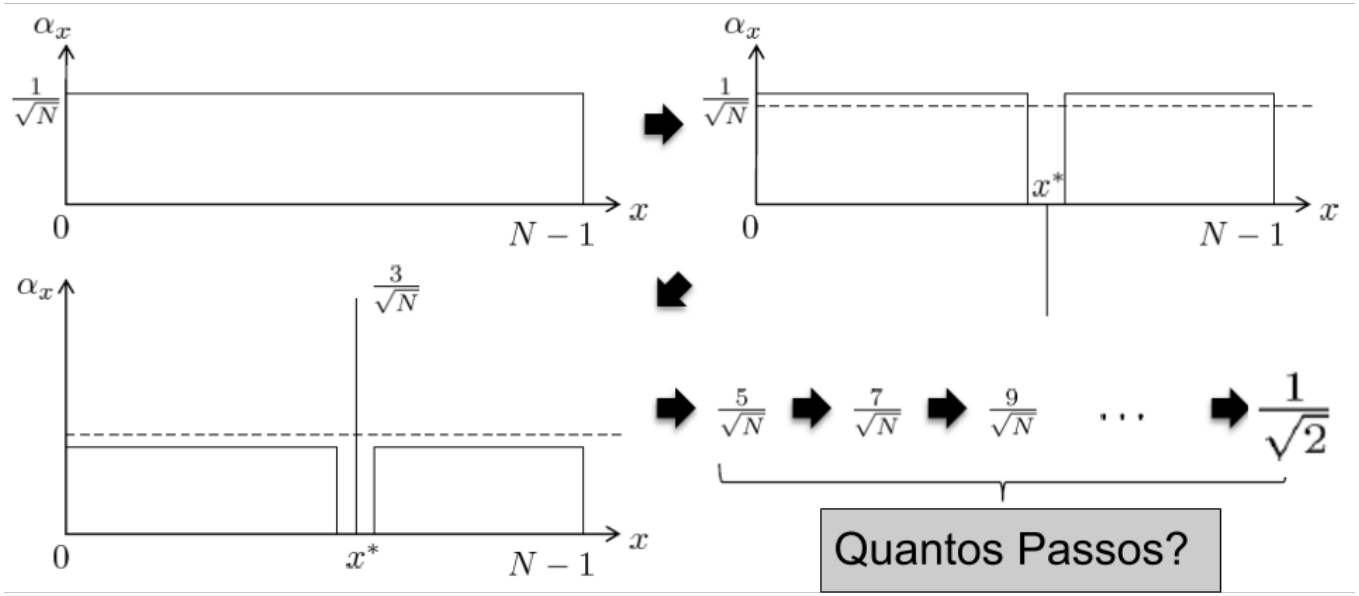
Ideia do Algoritmo

Vamos rodar os passos (1) e (2) alternadamente $O(\sqrt{N})$ vezes e no final medir.

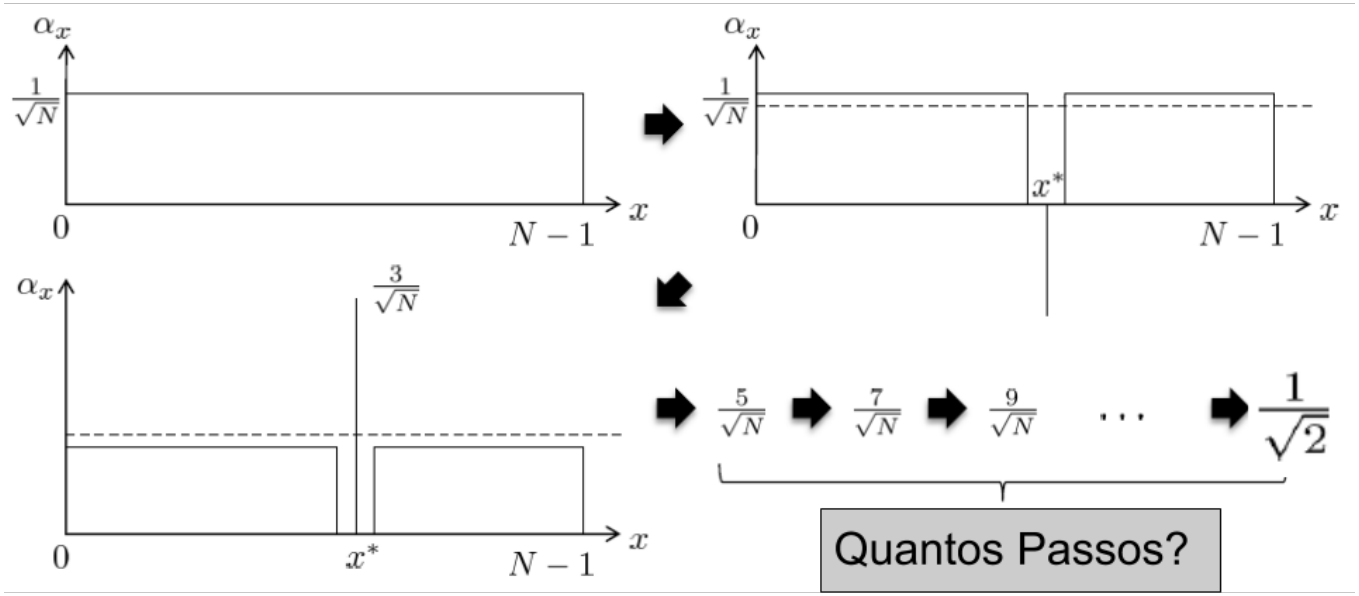
- Veremos que a probabilidade de obeter x^* é $1/2$
- Rodamos o algoritmo várias vezes e escolhemos o resultado mais obtido.

Obs.: Semelhante (mas não idêntico) ao que fizemos em várias outras situações: Ao rodarmos o algoritmo 100 vezes, o número esperado de vezes que obtemos x' é 50 e, para cada outro x, o número esperado de ocorrer é uma única vez. A probabilidade de que qualquer outro x ocorra 50 vezes é desprezível.

Algoritmo de Grover: Ideia

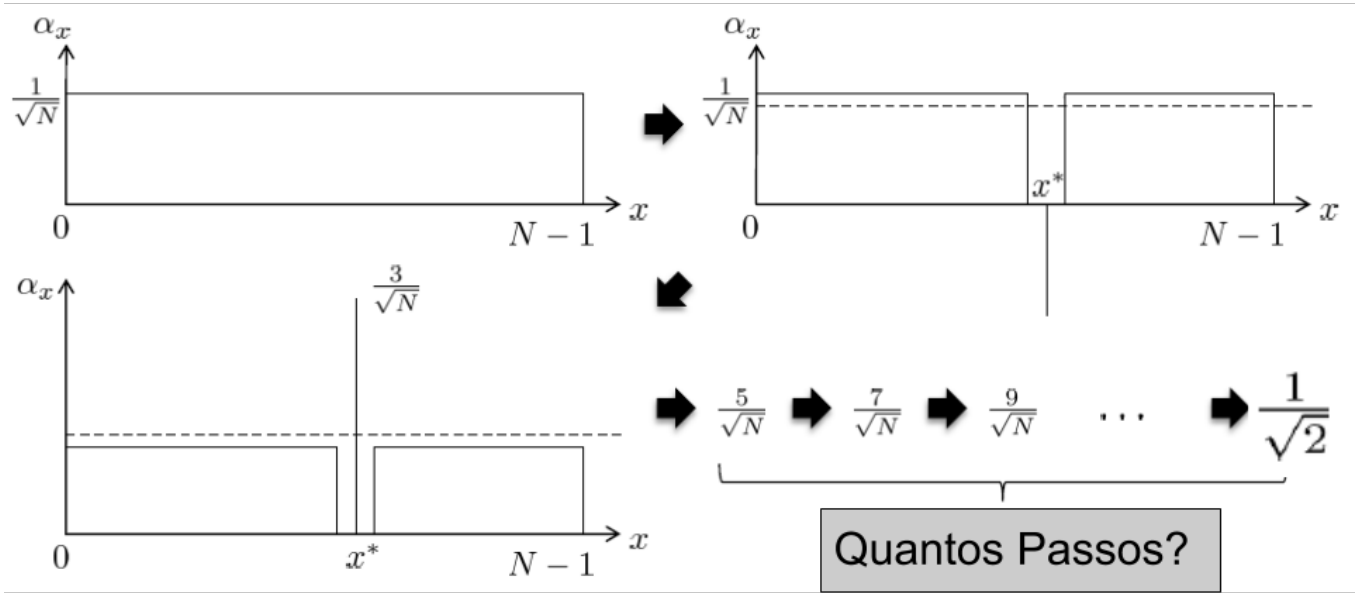


Algoritmo de Grover: Ideia



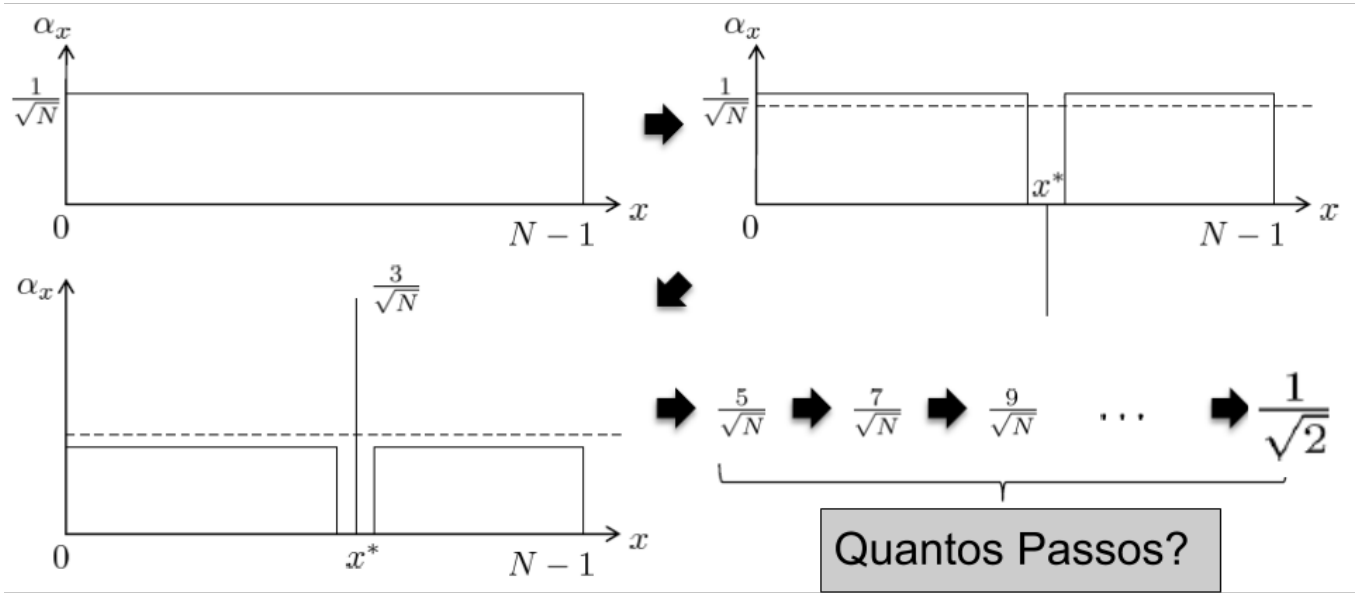
- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.

Algoritmo de Grover: Ideia



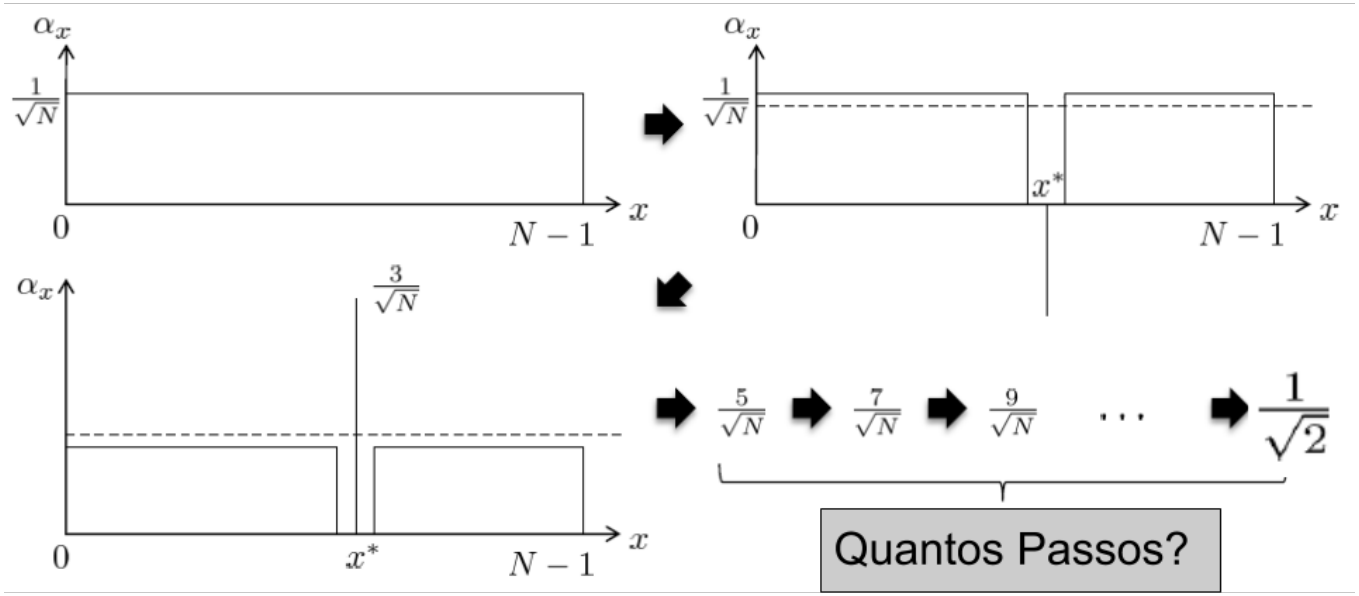
- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.
- O que precisamos analisar:

Algoritmo de Grover: Ideia



- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.
- O que precisamos analisar:
  - O ganho da amplitude de x^* a cada passo (veremos a seguir)

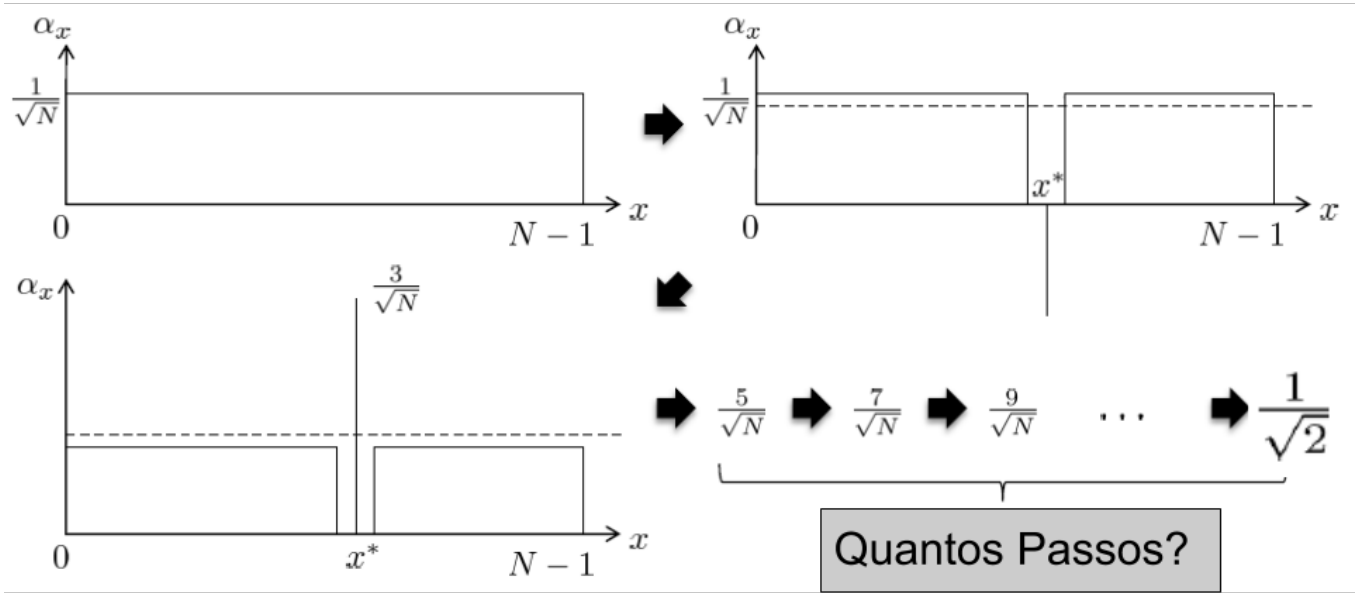
Algoritmo de Grover: Ideia



- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.
- O que precisamos analisar:
  - O ganho da amplitude de x^* a cada passo (veremos a seguir)

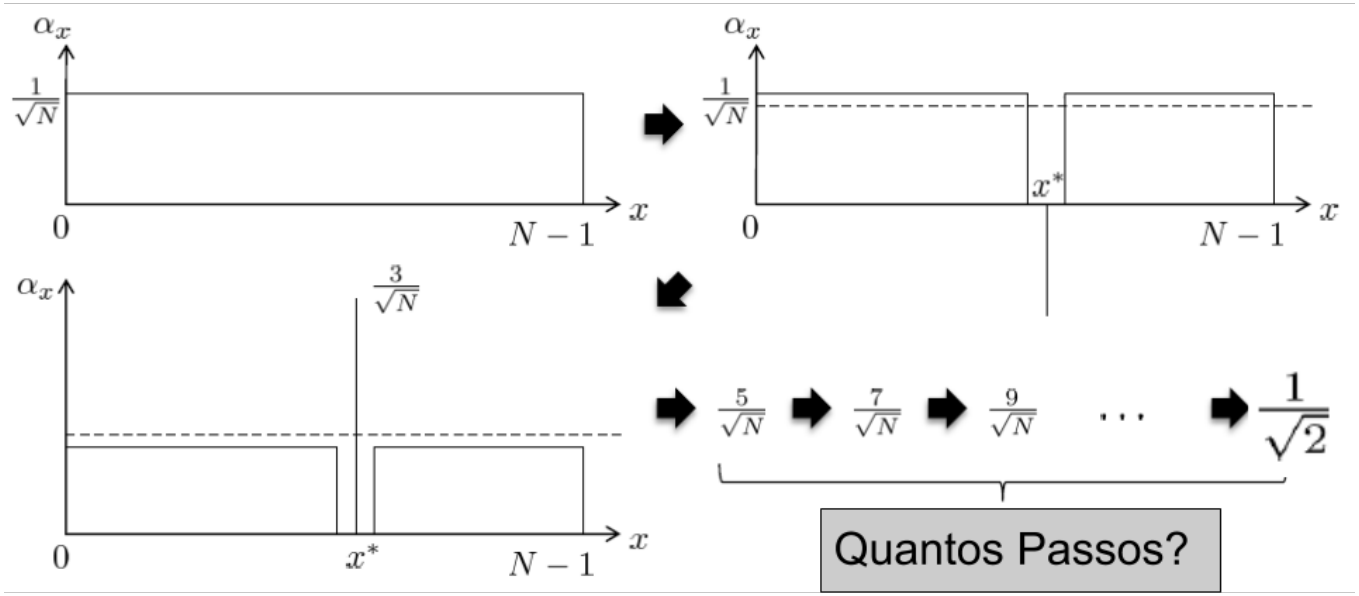
    (a figura sugere $2/\sqrt{N}$, mas na realidade é um pouco menos do que isso)

Algoritmo de Grover: Ideia



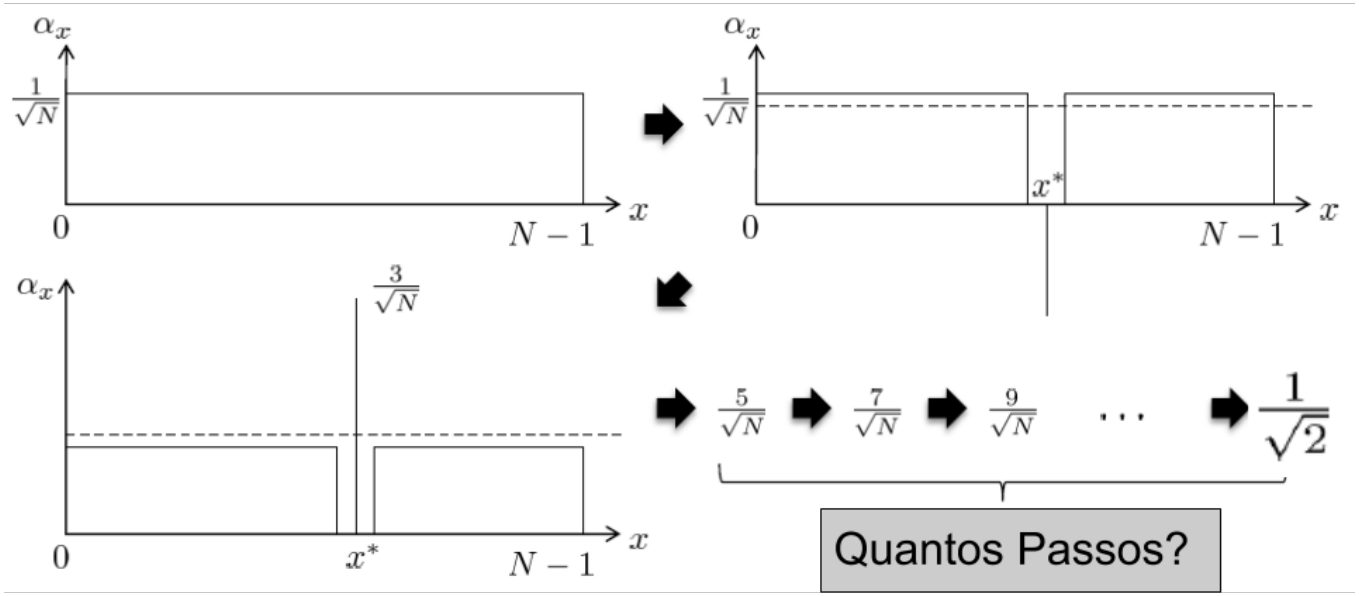
- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.
- O que precisamos analisar:
  - O ganho da amplitude de x^* a cada passo (veremos a seguir)
    (a figura sugere $2/\sqrt{N}$, mas na realidade é um pouco menos do que isso)
  - O número de passos (veremos a seguir)

Algoritmo de Grover: Ideia



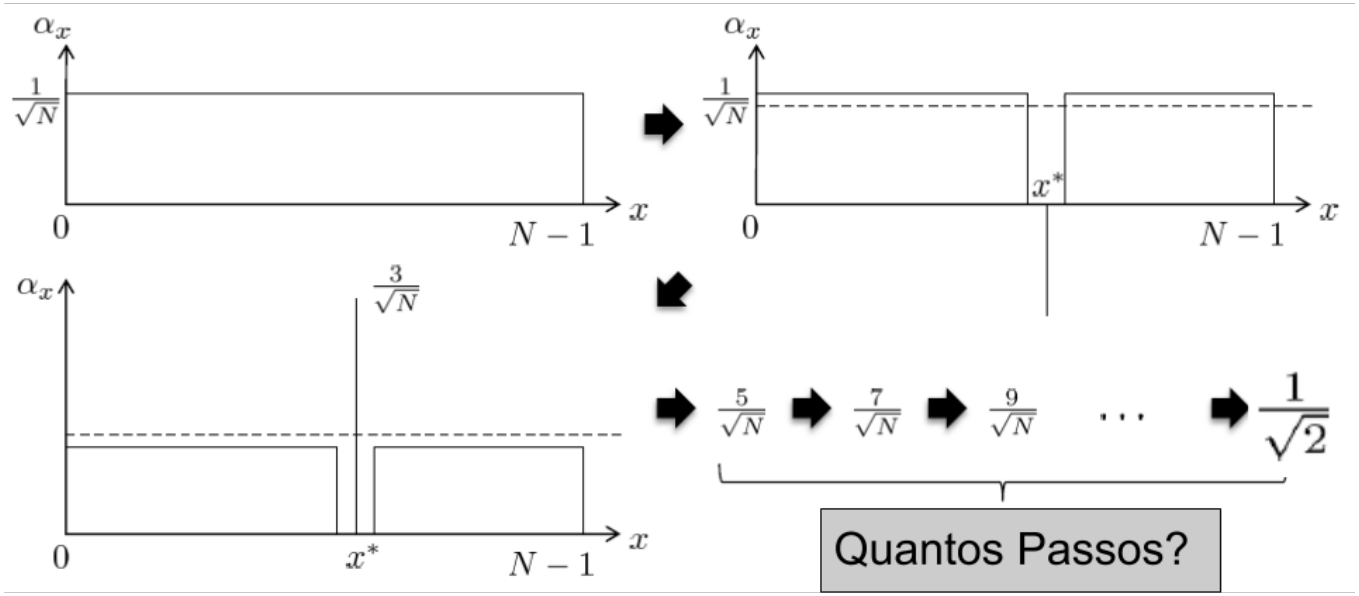
- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.
- O que precisamos analisar:
  - O ganho da amplitude de x^* a cada passo (veremos a seguir)
    (a figura sugere $2/\sqrt{N}$, mas na realidade é um pouco menos do que isso)
  - O número de passos (veremos a seguir)
    (se a figura estivesse correta, bastariam $\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{2}}$ passos)

Algoritmo de Grover: Ideia



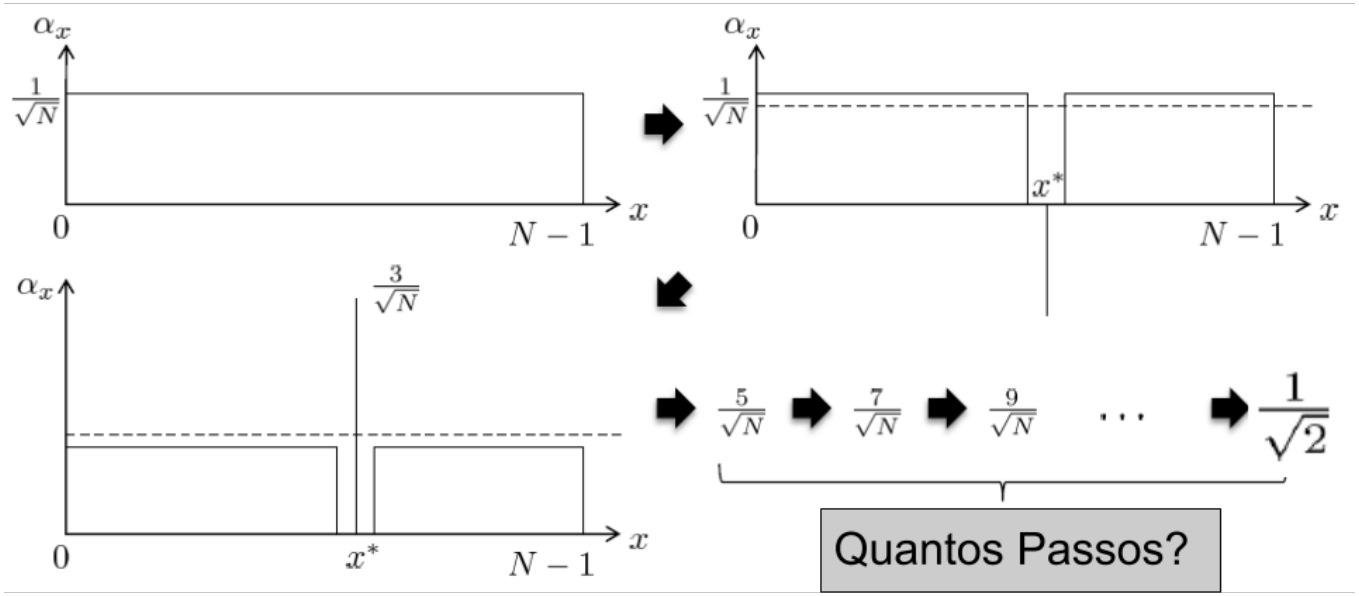
- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.
- O que precisamos analisar:
  - O ganho da amplitude de x^* a cada passo (veremos a seguir)
    (a figura sugere $2/\sqrt{N}$, mas na realidade é um pouco menos do que isso)
  - O número de passos (veremos a seguir)
    (se a figura estivesse correta, bastariam $\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{2}}$ passos)
  - Como fazer a inversão de fase (Fácil? Alguém sabe como?)

Algoritmo de Grover: Ideia

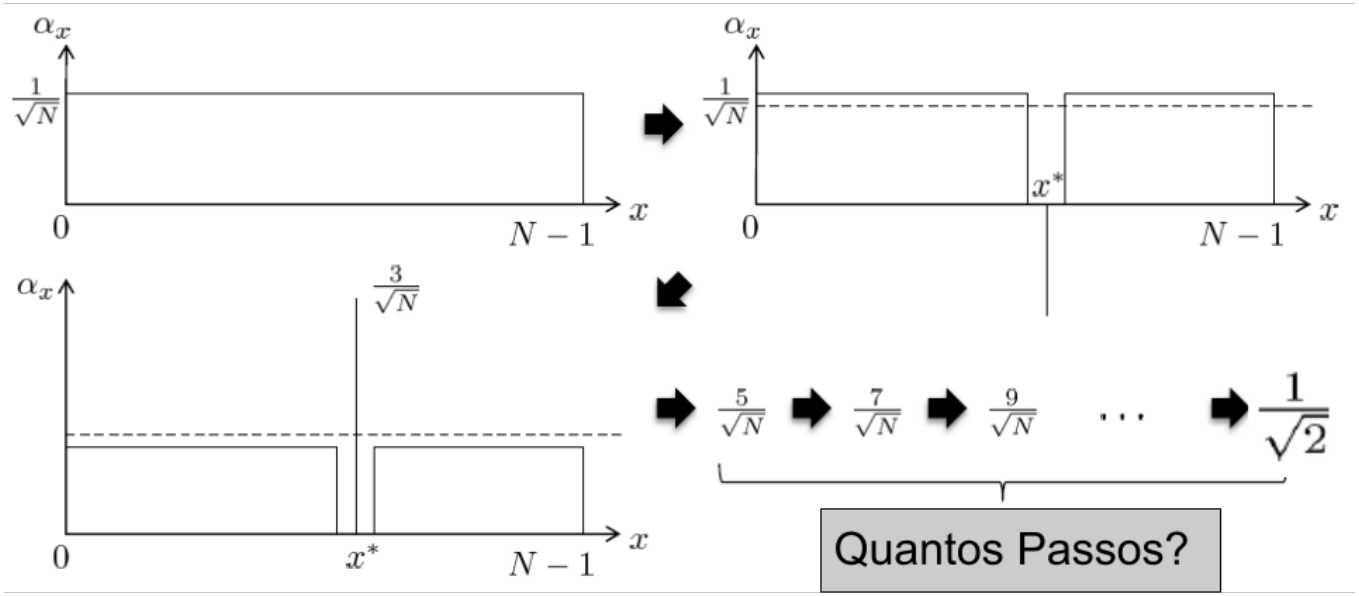


- Note que uma vez que o algoritmo atinge o ponto em que a amplitude de x^* é $1/\sqrt{2}$, a probabilidade de obter x^* ao medir o sistema é $1/2$.
- O que precisamos analisar:
  - O ganho da amplitude de x^* a cada passo (veremos a seguir)
    (a figura sugere $2/\sqrt{N}$, mas na realidade é um pouco menos do que isso)
  - O número de passos (veremos a seguir)
    (se a figura estivesse correta, bastariam $\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{2}}$ passos)
  - Como fazer a inversão de fase (Fácil? Alguém sabe como?)
  - Como fazer a reflexão sobre a média (Mais adiante)

Algoritmo de Grover: Incremento de x^* e número de passos

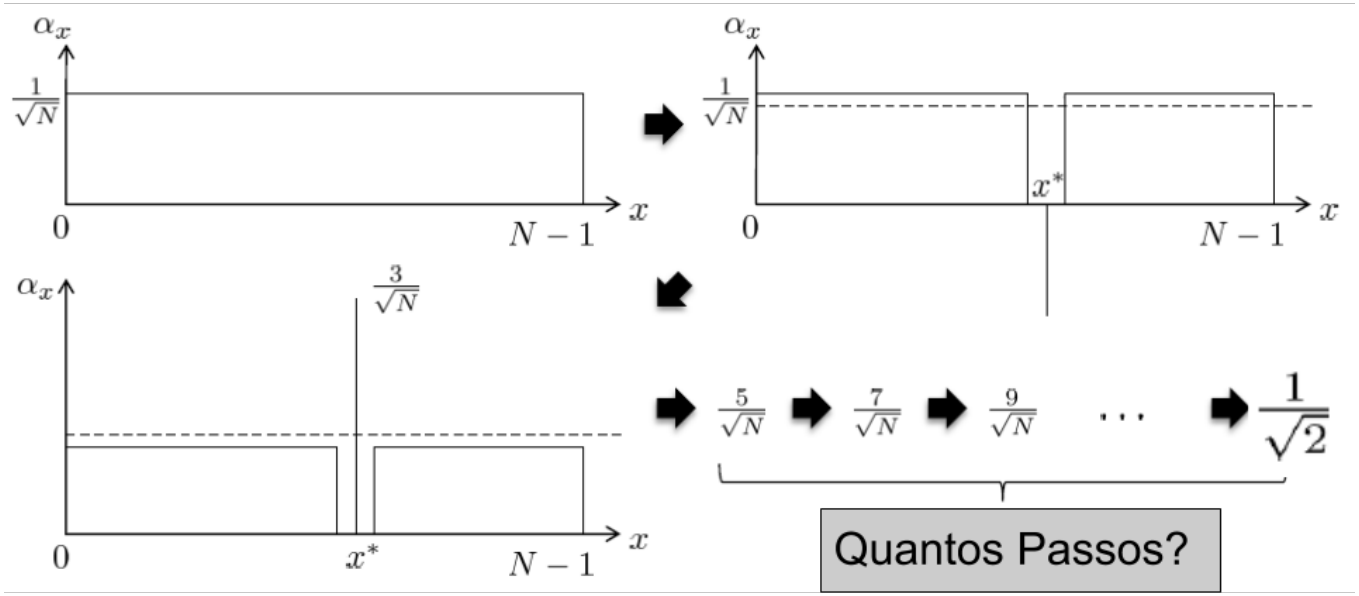


Algoritmo de Grover: Incremento de x^* e número de passos



- Fazendo uma análise mais fina, a cada passo a amplitude de x^* aumenta no mínimo $\sqrt{2/N}$ a cada passo. Por quê?

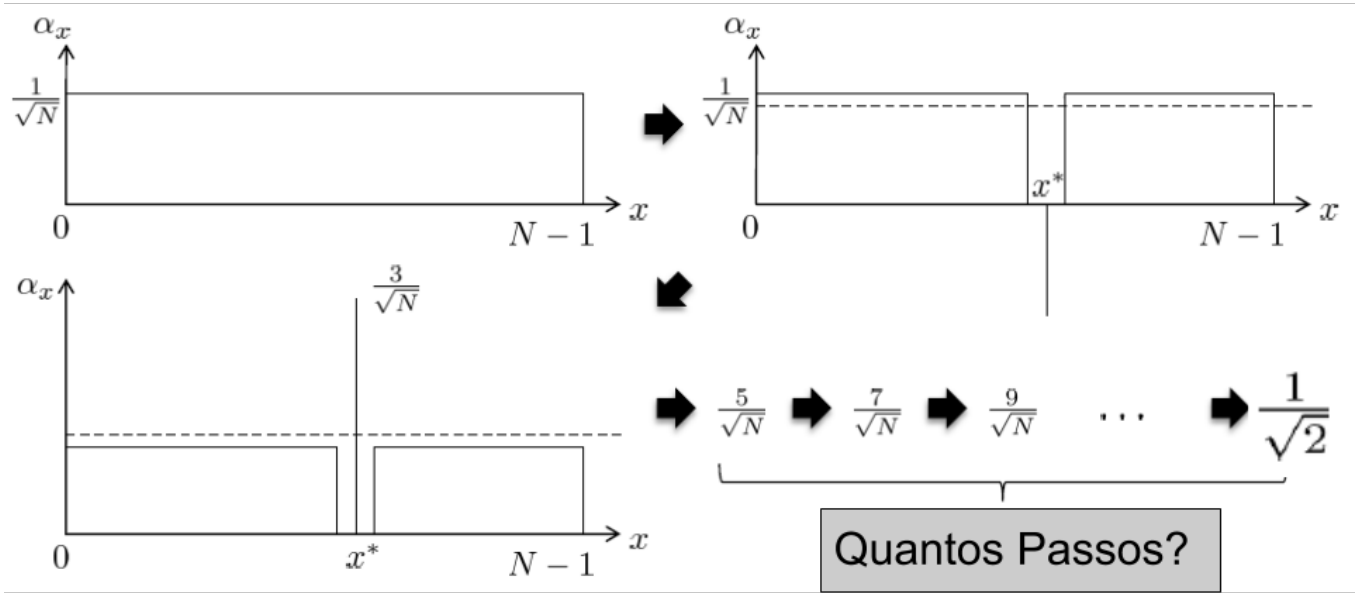
Algoritmo de Grover: Incremento de x^* e número de passos



- Fazendo uma análise mais fina, a cada passo a amplitude de x^* aumenta no mínimo $\sqrt{2/N}$ a cada passo. Por quê?

  No pior caso α_x^* já atingiu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e o restante das amplitudes deve estar distribuído igualmente.

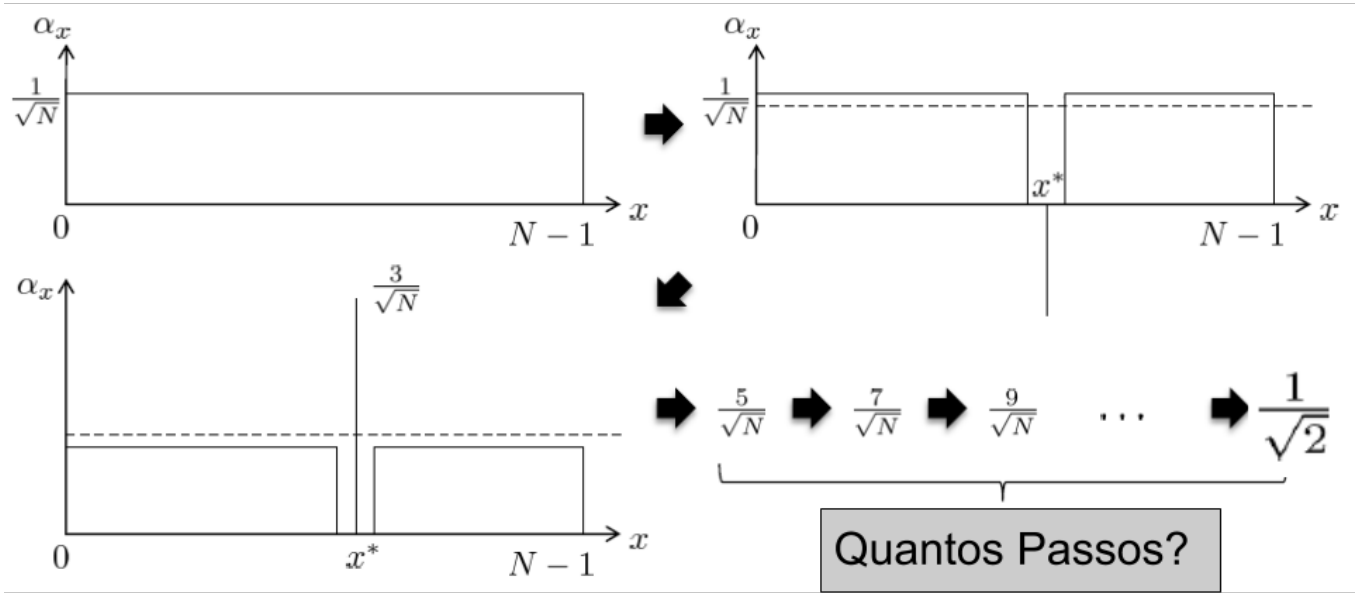
Algoritmo de Grover: Incremento de x^* e número de passos



- Fazendo uma análise mais fina, a cada passo a amplitude de x^* aumenta no mínimo $\sqrt{2/N}$ a cada passo. Por quê?

  No pior caso α_x^* já atingiu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e o restante das amplitudes deve estar distribuído igualmente. Portanto cada demais x vale $1/\sqrt{2(N-1)}$. Para simplificar e sem perder a validade do argumento, digamos que que cada $\alpha_x \geq 1/\sqrt{2N}$.

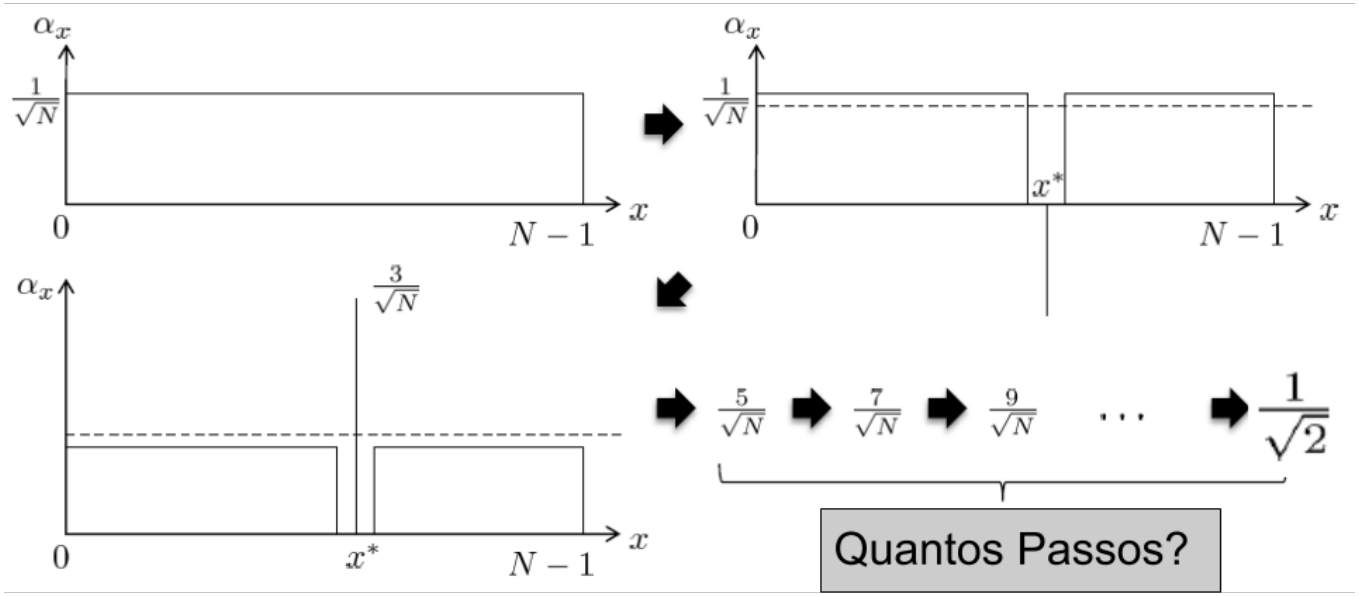
Algoritmo de Grover: Incremento de x^* e número de passos



- Fazendo uma análise mais fina, a cada passo a amplitude de x^* aumenta no mínimo $\sqrt{2/N}$ a cada passo. Por quê?

  No pior caso α_x^* já atingiu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e o restante das amplitudes deve estar distribuído igualmente. Portanto cada demais x vale $1/\sqrt{2(N-1)}$. Para simplificar e sem perder a validade do argumento, digamos que que cada $\alpha_x \geq 1/\sqrt{2N}$. Com isso a variação de α_x^* é $\geq 2/\sqrt{2N} = \sqrt{2/N}$ a cada passo.)

Algoritmo de Grover: Incremento de x^* e número de passos

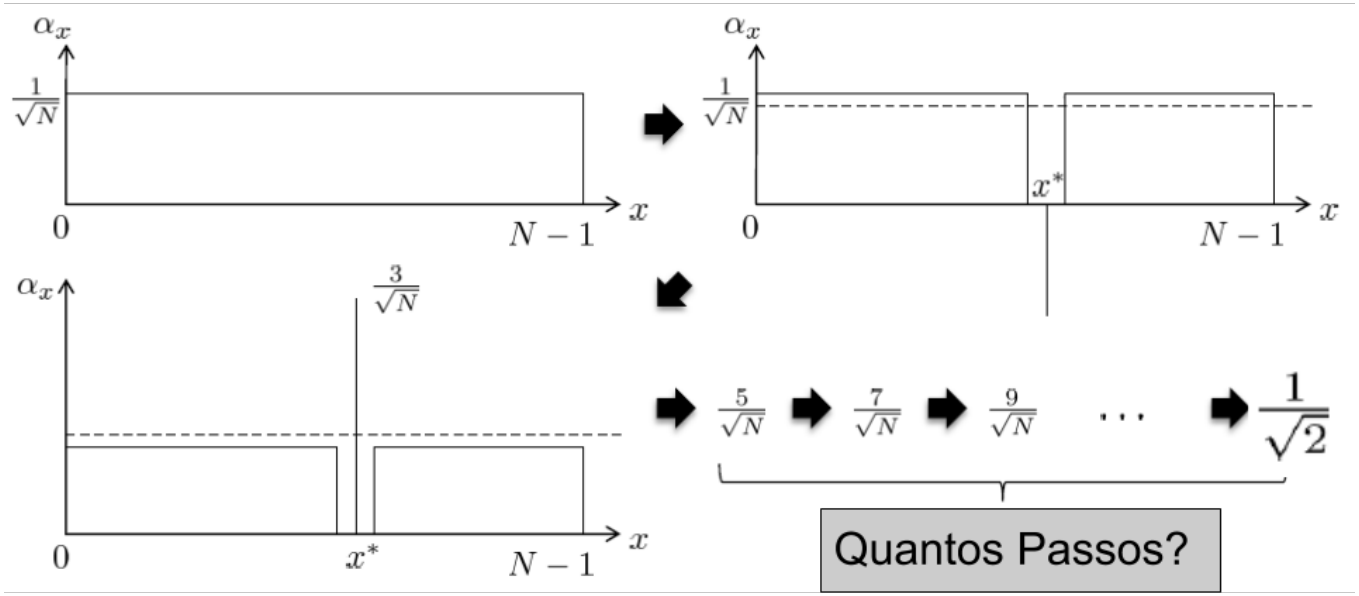


- Fazendo uma análise mais fina, a cada passo a amplitude de x^* aumenta no mínimo $\sqrt{2/N}$ a cada passo. Por quê?

  No pior caso α_x^* já atingiu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e o restante das amplitudes deve estar distribuído igualmente. Portanto cada demais x vale $1/\sqrt{2(N-1)}$. Para simplificar e sem perder a validade do argumento, digamos que que cada $\alpha_x \geq 1/\sqrt{2N}$. Com isso a variação de α_x^* é $\geq 2/\sqrt{2N} = \sqrt{2/N}$ a cada passo.)

- Com isso garantimos que $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ passos é o suficiente para α_x^* atinja $1/\sqrt{2}$

Algoritmo de Grover: Incremento de x^* e número de passos



- Fazendo uma análise mais fina, a cada passo a amplitude de x^* aumenta no mínimo $\sqrt{2/N}$ a cada passo. Por quê?

  No pior caso α_x^* já atingiu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e o restante das amplitudes deve estar distribuído igualmente. Portanto cada demais x vale $1/\sqrt{2(N-1)}$. Para simplificar e sem perder a validade do argumento, digamos que que cada $\alpha_x \geq 1/\sqrt{2N}$. Com isso a variação de α_x^* é $\geq 2/\sqrt{2N} = \sqrt{2/N}$ a cada passo.)

- Com isso garantimos que $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ passos é o suficiente para α_x^* atinja $1/\sqrt{2}$

  (pois $\frac{1}{2}\sqrt{N}$ passos vezes o incremento $\sqrt{2/N}$ é igual a $1/\sqrt{2}$.)

Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

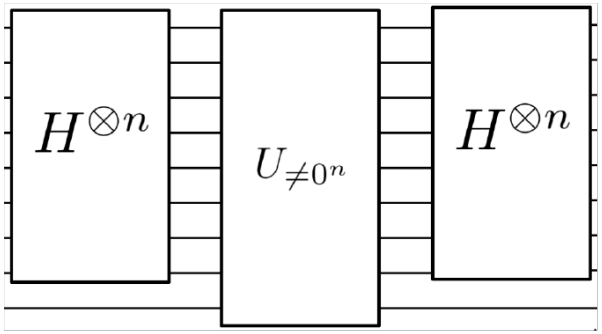
O circuito que calcula a inversão sobre a média é a "versão *phase kickback* do circuito:

Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

O circuito que calcula a inversão sobre a média é a "versão *phase kickback* do circuito:

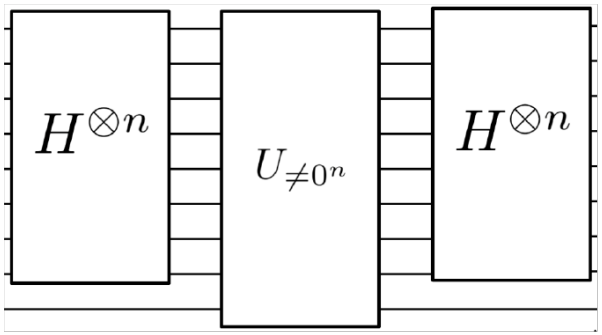


Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

O circuito que calcula a inversão sobre a média é a "versão *phase kickback* do circuito:



- Ou seja, o este circuito, mas com o qubit que controla a saída de $U_{\neq 0^n}$ fixo em $|-\rangle$
- Portanto, para mostrarmos que, de fato o circuito acima faz a reversão sobre a média, devemos mostrar que a matriz $H^{\otimes n} U\ H^{\otimes n}$ faz a inversão sobre a média, sendo que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Grover: Matriz Unitária

$$
\begin{aligned}
D &= H_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} H_N \\
&= H_N \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - I \right) H_N \\
&= H_N \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} H_N - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \end{pmatrix} - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N - 1 & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N - 1 & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Grover: Matriz Unitária

$$
\begin{aligned}
D &= H_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} H_N \\
&= H_N \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - I \right) H_N \\
&= H_N \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} H_N - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \end{pmatrix} - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N-1 & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N-1 & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora veremos o que D faz com um vetor com amplitudes α_i de entrada:

$$
D \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}
$$

Observe que cada β_i é precisamente $\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i - \alpha_i =$

Algoritmo de Grover: Matriz Unitária

$$
\begin{aligned}
D &= H_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} H_N \\
&= H_N \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - I \right) H_N \\
&= H_N \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} H_N - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \end{pmatrix} - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N-1 & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N-1 & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora veremos o que D faz com um vetor com amplitudes α_i de entrada:

$$
D \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}
$$

Observe que cada β_i é precisamente $\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i - \alpha_i = 2\mu - \alpha_i$

Algoritmo de Grover: Matriz Unitária

Circuito completo: