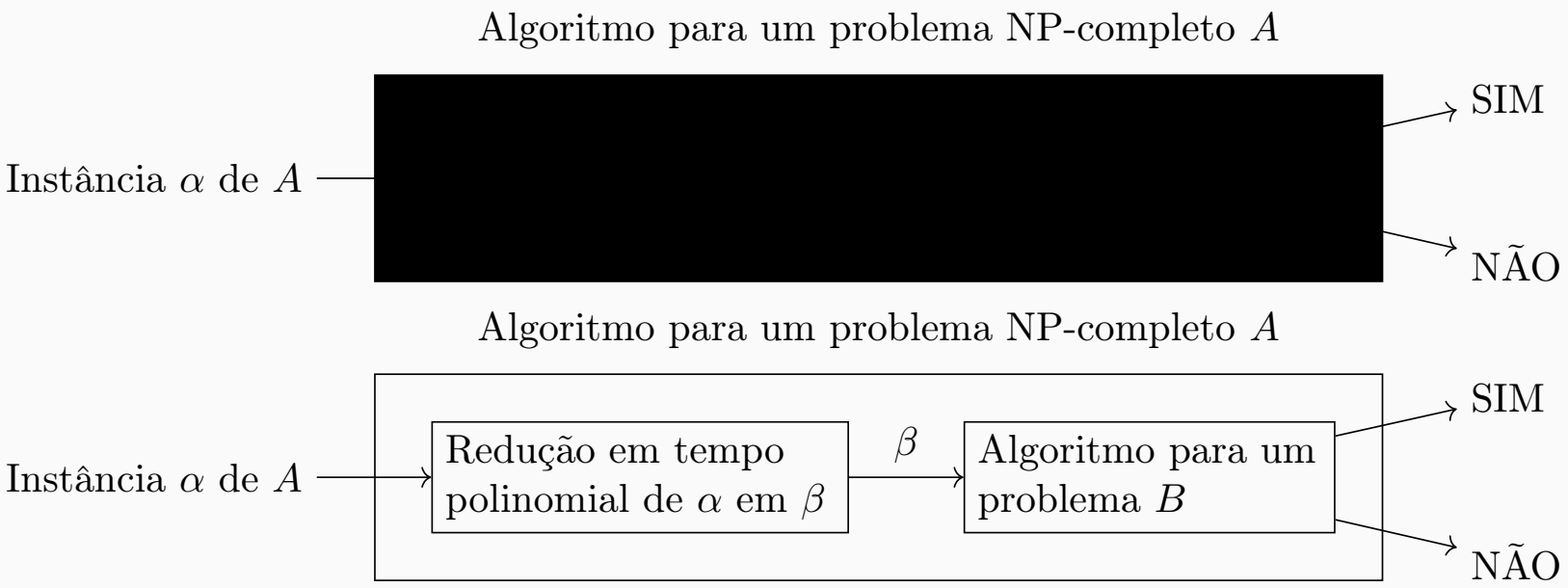
Redução de SAT para Conjunto Independente

Henrique Hepp
hhepp@inf.ufpr.br

25 de abril de 2022

Redução de Problemas NP-completo



- Se o algoritmo para A acima funciona, então o problema para B é NP-difícil.
- Precisamos mostrar:
  1. α é uma instância verdadeira de A se, e somente se, a instância β é verdadeira para B;
  2. a redução tem que ser polinomial.

Redução de Problemas NP-completo

Dado um problema NP-completo A, como mostrar que um problema B é NP-completo?

1. Mostre que o problema $B \in$ NP.
    - Solução pode ser verificada em tempo polinomial.
2. Mostre que o problema B é NP-difícil.
    - Mostre a redução de A para B.
        2.1 Descreva o algoritmo que converte em tempo polinomial uma instância arbitraria α de A para uma instância β de B.
        2.2 Mostre que α é uma instância verdadeira de A se, e somente se, a instância β é verdadeira para B.

Redução de Problemas NP-completo

- Mostre que α é uma instância verdadeira de A se, e somente se, a instância β é verdadeira para B.
  - se a reposta for SIM para B, então também é SIM para A;
  - se a reposta for NÃO para B, então também é NÃO para A.
- De maneira equivalente:
  - se a reposta for SIM para B, então também é SIM para A;
  - se a reposta for SIM para A, então também é SIM para B.

Redução de SAT para Conjunto Independente

Satisfatibilidade de fórmulas booleanas (SAT)

$L_{SAT} = \{\llcorner \phi \lrcorner \in \Sigma^* |\ \phi$ é uma fórmula booleana satisfazível escrita como uma conjunção de cláusulas, onde uma cláusula é uma disjunção de literais.$\}$

- Dadas as variáveis booleanas x_1, x_2, x_3, x_4 a seguinte fórmula é satisfazível?
  $\phi = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_3 \vee x_4)$.
- A fórmula é satisfazível, certificado: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$.

Redução de SAT para Conjunto Independente

Conjunto independente

Um conjunto independente de um grafo G é um conjunto S de vértices de G tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S.

Problema de decisão para um conjunto independente

$L_{CI} = \{\llcorner(G, k)\lrcorner \in \Sigma^* | G$ é um grafo que contém um conjunto independente de tamanho pelo menos $k\}$.

Redução de SAT para Conjunto Independente

Teorema

O problema de decisão para um conjunto independente é NP-completo.

Lema 1

O problema de decisão para um conjunto independente pertence a NP.

Lema 2

O problema de decisão para um conjunto independente é NP-difícil.

Redução de SAT para Conjunto Independente

Lema 1

O problema de decisão para um conjunto independente pertence a NP.

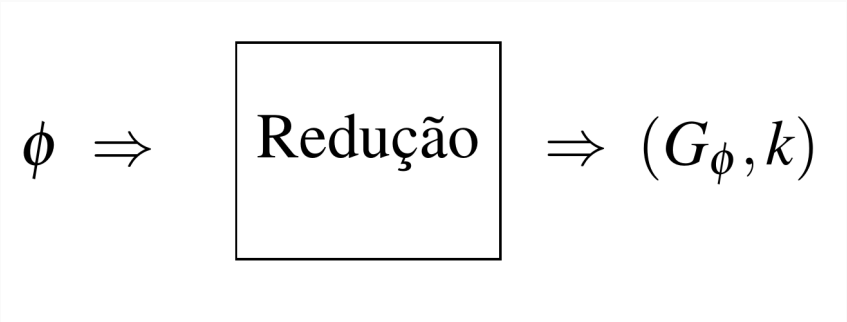
- O certificado é o conjunto dos vértices independentes.
- Verifique se existe um vértice vizinho ao outro nesse conjunto.
- Pode ser feito em $O(n^2)$, sendo n o número de vértices.

Redução de SAT para Conjunto Independente

Lema 2

O problema de decisão para um conjunto independente é NP-difícil.

1. Redução que recebe instância ϕ do problema SAT e retorna instância (G_Φ, k) do problema do conjunto independente.



2. (G_Φ, k) é uma instância verdadeira se, e somente se, ϕ é satisfazível.

O problema conjunto independente é NP-difícil

- Seja $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ uma instância do problema SAT com n variáveis x_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Para cada $j = 1, \ldots, m$, denotamos por $A(C_j)$ o conjunto dos literais que aparecem na cláusula C_j.

O problema conjunto independente é NP-difícil

Redução(ϕ)

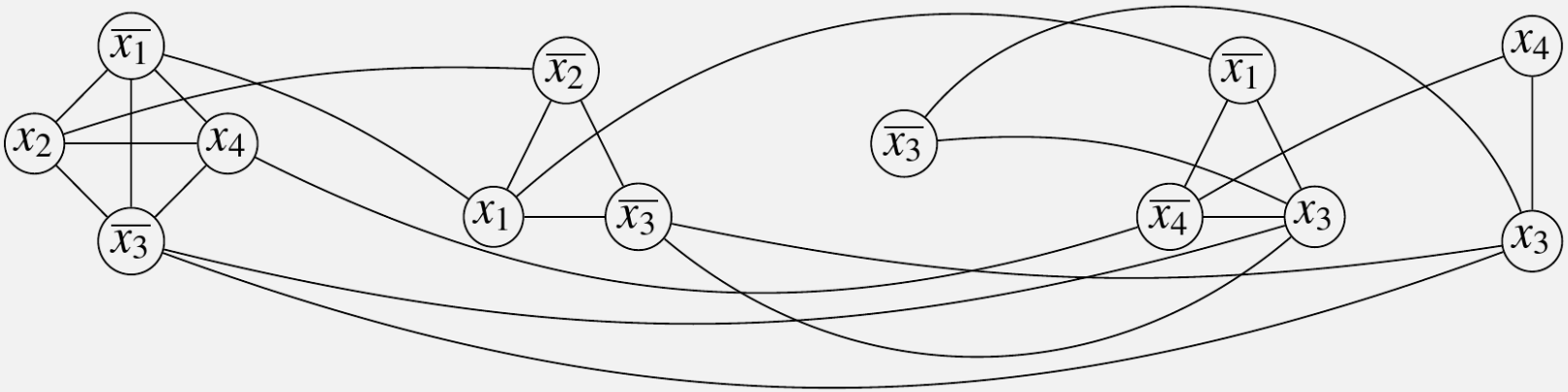
1. Crie um conjunto de vértices V de tamanho $\sum_i^m |A(C_j)|$.
2. Particione o conjunto V em subconjuntos $V_1, \ldots, V_m$, tal que cada subconjunto V_j tem tamanho $|A(C_j)|$ e rotule cada vértice v_j com um elemento diferente do conjunto $A(C_j)$.
3. Para cada conjunto de vértices V_j, adicione todas as arestas possíveis entre pares de vértices de V_j.
4. Adicione arestas ligando vértices rotulados com literais complementares.
5. Retorne (G_ϕ, m)

O problema conjunto independente é NP-difícil

Exemplo:

$$\phi_1 = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_3 \vee x_4)$$

Neste caso, a saída da redução é $(G_{\phi_1}, 5)$, sendo que G_{ϕ_1} é o grafo da figura abaixo.



O problema conjunto independente é NP-difícil

- (G_ϕ, k) é uma instância verdadeira se, e somente se, ϕ é satisfazível.
  - Caso 1: se (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira, então ϕ é satisfazível.
  - Caso 2: se ϕ é satisfazível, então (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira.

(G_ϕ, k) é uma instância verdadeira se, e somente se, ϕ é satisfazível

- Caso 1: se (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira, então ϕ é satisfazível.
  - Seja S o conjunto independente de tamanho máximo de G_ϕ.
  - Se (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira então $|S| = m$.
  - S é um conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$, com um vértice de cada clique diferente.
  - Uma valoração que satisfaz ϕ é obtida dos rótulos de $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

(G_ϕ, k) é uma instância verdadeira se, e somente se, ϕ é satisfazível

- Caso 2: se ϕ é satisfazível, então (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira.
  - Se ϕ é satisfazível, existe pelo menos um literal satisfeito em cada cláusula de ϕ.
  - Seja S' o conjunto dos vértices correspondentes a esses literais.
  - O conjunto S' é independente, pois contém um vértice por clique e não pode haver nenhum par de vértices correspondentes a x_i e $\overline{x_i}$.
  - O conjunto S' tem tamanho m (pois existem m cláusulas).