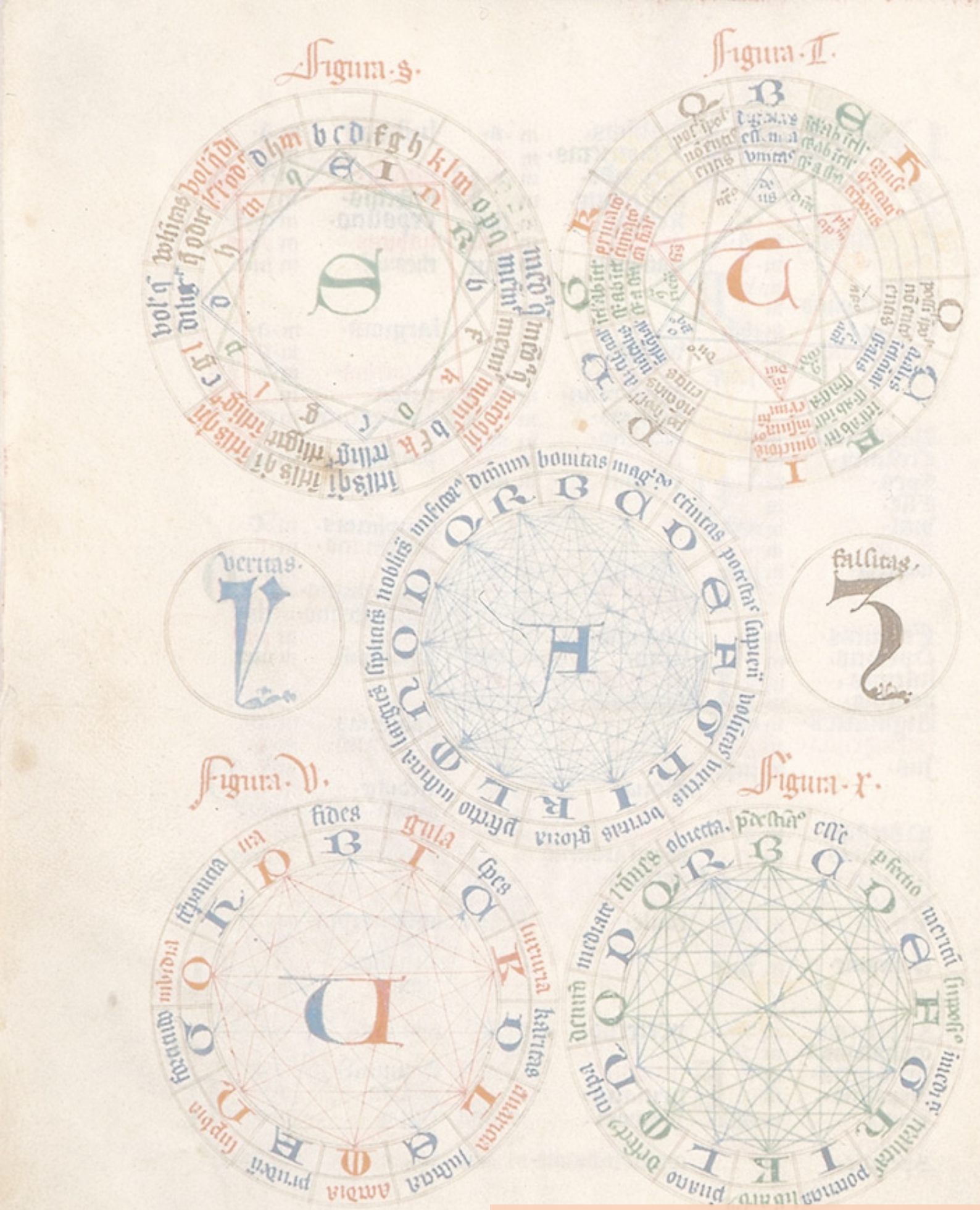
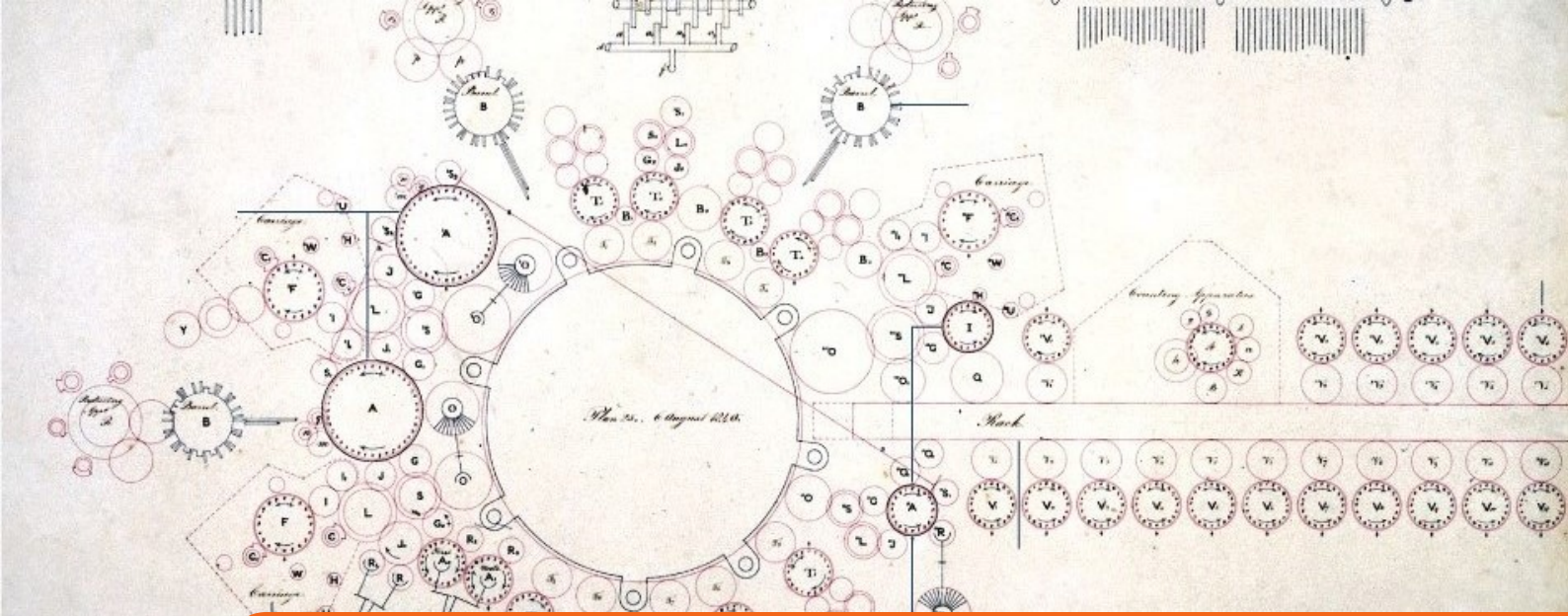
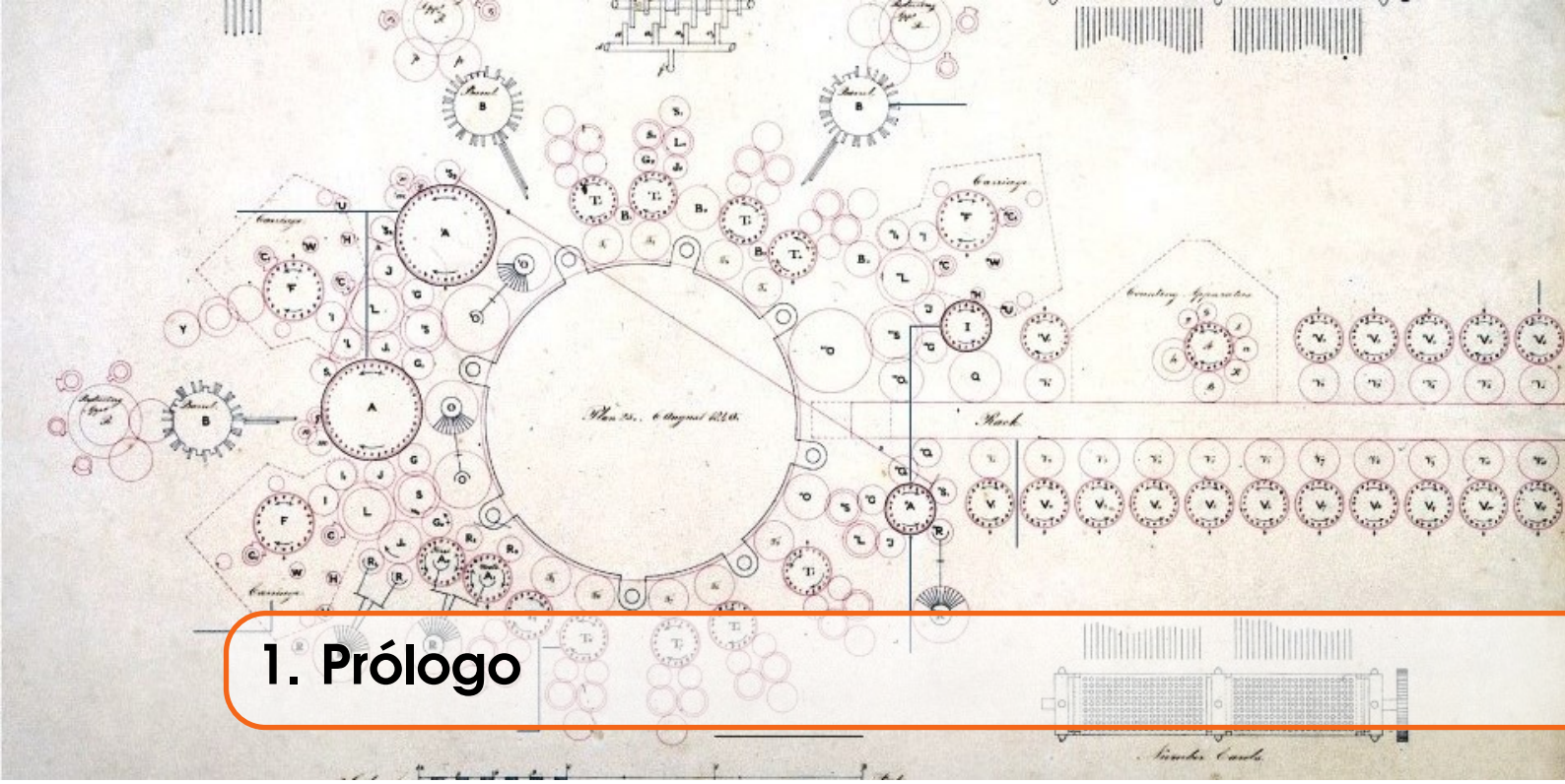


Autômatos, computabilidade e complexidade computacional

Murilo V. G. da Silva



Sumário



1. Prólogo

1.1 O que é computação?

A maioria de nós tem alguma ideia, mesmo que superficial, do que são algoritmos e computadores. Estes conceitos são tão corriqueiros, que normalmente não pararmos para pensar muito a fundo sobre eles. Porém, como veremos neste livro, quando nós nos propomos a responder algumas perguntas fundamentais sobre computação, nós precisaremos mais do que ter apenas uma ideia superficial do que são algoritmos e computadores.

Mas que perguntas fundamentais são estas? Podemos começar com a seguinte pergunta: Será que existe algum problema computacional para o qual não existe nenhum algoritmo *eficiente* (dentre os infinitos algoritmos eficientes concebíveis) que o resolva? Podemos ir um passo adiante e fazer uma outra pergunta mais radical: Será que existe algum problema para o qual não existe *nenhum* algoritmo (independente de eficiência) que o resolva? A área de estudos conhecida como teoria da computação estabelece as bases da computação apresentando definições matematicamente precisas para conceitos como algoritmos e computadores e apresenta respostas para perguntas fundamentais como estas que acabamos de mencionar.

Um dos primeiros cuidados que precisamos tomar é que devemos pensar em algoritmos e computadores sem nos atermos à artefatos tecnológicos do nosso dia a dia, como linguagens programação, desktops, laptops e smartphones, de forma que tais artefatos são apenas casos particulares de conceitos mais gerais. A ideia é começar a enxergar computação como uma ciência que transcende tais tecnologias. Mas seria possível falar de algoritmos e computadores sem nenhuma preocupação com artefatos tecnológicos?

Um bom ponto de partida para entendermos que isso é possível é a observação bastante simples de que muitos algoritmos importantes foram descobertos antes do advento dos computadores modernos. O algoritmo de Euclides, por exemplo, já é conhecido a aproximadamente 2300 anos[1]. Mas e os computadores? No caso de algoritmos até parece concebível que possamos falar deles abstratamente, mas seria também possível falarmos de computadores de maneira abstrata, sem nos

[1] Podemos dar exemplos até mais corriqueiros: diferentes algoritmos para operações aritméticas, como soma e multiplicação, também já são conhecidos a muito tempo antes da existência de computadores como conhecemos hoje.

referirmos à alguma máquina em particular? Podemos dar uma resposta curta e uma resposta longa. A resposta curta é "sim". A resposta longa é "sim, mas com algumas sutilezas".

A chave para ver que isso é possível falar de computadores de maneira puramente abstrata é compreender que um computador é uma máquina que se propõe a ser capaz de executar todo e qualquer algoritmo imaginável. Portanto, em última análise, a compreenção do que é um computador é equivalente a compreenção da ideia (abstrata) de qual é o conjunto infinito de todos os possíveis algoritmos. A sutileza fica por conta do seguinte: Como o comum é que estes algoritmos e computadores sejam, de alguma forma, implementados fisiscamente, deve haver restrições para a definição de tal conjunto dos infinitos possíveis algoritmos.

O CONCEITO DE INFORMAÇÃO EM DIFERENTES ÁREAS DA CIÊNCIA

Com a popularização dos computadores na segunda metade do século XX, um outro conceito, intimamente relacionado a computação, também tornou-se popular: o conceito de informação. Esta popularização acaba nos induzindo a associar computação e informação sempre fazendo referência à algum artefato tecnológico em particular, que é algo que, como já mencionamos, queremos evitar neste livro.

Para ilustrar o que queremos dizer, observe que em situações em que estamos descrevendo processos computacionais no mundo natural, como moléculas de DNA *armazenando informação*, ou cérebros *processando informação*, não é incomum pensarmos que estamos meramente usando metáforas inspiradas por tecnologias contemporâneas. Embora isso, de fato, aconteça[†], não podemos deixar obscurecido o fato de que informação e computação são conceitos que estão presentes no mundo (na matemática, na natureza, etc), e podem ser estudados como objetos em si, independentes de qualquer contingência tecnológica.

O conceito de *informação* também já vem sendo estudado antes de termos computadores digitais disseminados na sociedade. A ideia de informação começou a entrar de maneira mais regular no vocabulário de alguns cientistas no final do século XIX, quando estes começaram a esbarrar em conceitos como entropia e termodinâmica. Já no século XX, uma série de descobertas científicas, como por exemplo a descoberta das leis da mecânica quântica (leis em que a ideia de *informação* quântica é central) e a descoberta da molécula de DNA (molécula que está intrinsicamente ligada a ideia de *informação* genética), começaram a solidificar a intuição que temos hoje de que informação é algo fundamental e que permeia o mundo natural em diferentes níveis de análise.

[†]Pode existir, de fato, um contingência histórica que nos faz criar tais associações. Assim como alguns hoje usam informação como metáfora para descrever fenômenos naturais, no século XIX era comum se descrever o universo como um grande mecanismo, fazendo analogia as engrenagens de um relógio e mecanismos descritos pela leis da mecânica clássica.

1.2 Algoritmos, problemas e computadores

Além de algoritmos e computadores, um outro conceito que normalmente usamos de maneira intuitiva e que iremos tornar preciso neste livro é o conceito de *problema computacional*. Por exemplo, considere o problema de testar se um dado número é primo, ou o problema de testar se existe um caminho ligando dois vértices em um grafo. Em teoria da computação iremos definir exatamente o que é, de *maneira genérica*, um problema computacional.

Uma vez que temos em mãos definições matematicamente precisas para algoritmos e para problemas computacionais, a pergunta que fizemos na seção anterior surge naturalmente: Será que existe algum problema para o qual não existe nenhum algoritmo que o resolva? Algo importante de se enfatizar é que não estamos falando de problemas para os quais, hoje, ainda não conhecemos

algoritmos que os solucionem, mas que, por ventura, no futuro venhamos a descobrir tais algoritmos futuramente. A pergunta aqui é se existem problemas que fundamentalmente não podem ser resolvidos por algoritmos. No Capítulo 7 veremos que a resposta para esta pergunta é sim. O ponto central aqui, como já mencionamos, é que nós não vamos meramente afirmar que existem tais problemas. Nós seremos capazes de provar isto, de forma que possamos ter *certeza matemática* de tal afirmação.

REFLETINDO UM POUCO: LIMITE TECNOLÓGICO OU PRINCÍPIO FUNDAMENTAL?

A existência de problemas insolúveis não refletiria apenas uma limitação para o que atualmente entendemos por computadores e algoritmos? Ou seja, será que tais problemas não seriam apenas insolúveis apenas em nossa concepção corrente de computadores e algoritmos? Estes problemas não poderiam ser resolvidos no futuro por computadores "exóticos"descritos por modelos matemáticos correspondendo a leis da física que ainda não conhecemos? Ou a insolubilidade de certos problemas seria algo mais fundamental? Até que ponto podemos descartar a possibilidade de que seja possível construir objetos exóticos que poderíamos usar como computadores para resolver estes problemas que os computadores atuais não resolvem?

O consenso entre os teóricos da computação, expresso por uma tese chamada de *Tese de Church-Turing* [Aar13; HMU06; Sip06], é que qualquer problema computacional solúvel pode ser resolvido, *em princípio*, por computadores como concebemos hoje. Esta tese parece bastante ousada e este tipo de questão, é claro, como qualquer questão científica corrente, é passível de debate. Entretanto, a maioria das propostas de modelos alternativos de computação que aparecem na literatura questionando a Tese de Church-Turing, embora matematicamente bem definidas, costumam ser variações de ideias que não correspondem ao que intuitivamente entendemos por processos computacionais sistamáticos e, além disso, parecem ser inviáveis de ser realizadas fisicamente[Aar13][†]. O Capítulo 6 deste livro é dedicado a discussão desta tese.

Entretanto, isso tudo não exclui a possibilidade de que possamos construir computadores *fundamentalmente* muito mais *eficientes* que os atuais. A pesquisa em computação quântica, por exemplo, investiga precisamente a possibilidade de construção de computadores *exponencialmente* mais rápidos do que os atuais na resolução de *alguns* problemas.

[†]Um caso comum se refere a um modelo matemático que requer a existência de "oráculos mágicos" que executam passos computacionais sem nenhuma explicação. Um outro caso comum é o de um modelo matemático que requer a realização de computação "verdadeiramente analógica", uma ideia que parece contradizer alguns pressupostos da física contemporânea.

Embora um curso de teoria da computação seja um curso de matemática, e não de física, é importante observarmos que objetos abstratos estudados em computação, como algoritmos e informação, se manifestam, de alguma forma no mundo físico[2].

O seu laptop rodando Windows é o caso mais óbvio do que podemos entender como um processo computacional ocorrendo em um meio físico. Entretanto, tal caso não é único, e este é exatamente o ponto que queremos ressaltar aqui. O cálculo do logaritmo de um número usando uma máquina com engrenagens e graxa do século XIV, como a máquina de Charles Babbage também é um exemplo de um processo computacional ocorrendo no meio físico. Poderíamos também pensar no cérebro de um primata processando sinais elétricos sensoriais, ou moléculas de DNA executando rotinas biológicas, ou mesmo em um punhado de átomos, elétrons e fótons interagindo sistematicamente em algum protótipo de computador quântico, de maneira que a manipulação da

[2]O ponto de contato entre a natureza matemática da teoria da computação e questões de natureza empírica, ou seja, o "mundo físico" é bastante sutil. Sem entrar em uma discussão filosófica mais profunda, o ponto que queremos chamar atenção aqui é simplesmente que existe conexão entre modelos matemáticos estudados em computação e substratos físicos que podemo ser usados para realizar estes modelos.

informação quântica de destas partículas fazem parte do processo de execução de um algoritmo quântico (a Figura 1.1 ilustra alguuns destes exemplos).

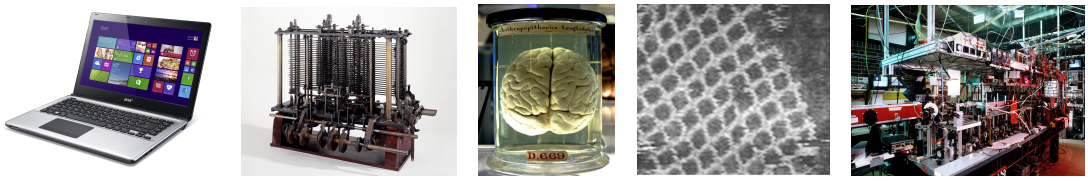


Figure 1.1: Computação ocorrendo em diferentes meios físicos: circuitos eletrônicos, engrenagens mecânicas, estruturas biológicas, moléculas de DNA e partículas subatômicas.

O objetivo da teoria da computação é prover modelos matemáticos para processos computacionais que sejam *independentes do substrato físico* em que a computação esteja ocorrendo. O nosso objetivo principal é ter um modelo matemático que seja independente do substrato físico, mas que, ao mesmo tempo, seja abrangente e realista o suficiente para capturar qualquer possível computação ocorrendo em qualquer meio físico possível. Por que isso seria o ideal? Porque uma vez que temos um modelo matemático com estas características, bastaríamos nos focar neste modelo para poder saber o que pode e o que não pode ser *efetivamente* computado.

Claramente este objetivo parece ser bastante ambicioso, pois estamos atrás de um modelo matemático que possa descrever todo e qualquer tipo de manipulação sistemática de informação em qualquer tipo de substrato físico! Entretanto, veremos que na década de 1930 foi concebido um modelo que, apesar de ser razoavelmente simples, se propõe a ter tais propriedades[3]. Este modelo é conhecido como *Máquina de Turing*. A tese científica que afirma que Máquinas de Turing atingem tal nível de generalidade em termos de poder representar qualquer processo computacional (i.e., processos para manipular informação) é conhecida hoje em dia como *Tese de Church-Turing*[4].

> COMPUTAÇÃO: INSTANCIANDO OBJETOS ABSTRATOS EM OBJETOS FÍSICOS
>
> Podemos pensar em um computador como uma maneira de instanciar objetos abstratos e o conjunto de possíveis relacionamentos matemáticos destes objetos abstratos (i.e., informação e algoritmos) em objetos físicos e o conjunto dos possíveis graus de movimento (ou graus de liberdade de movimento) destes objetos físicos.

Os computadores que usamos no dia a dia são objetos precisos e sabemos rigorosamente como eles funcionam (afinal, eles foram construídos por nós!) e, portanto, temos modelos matemáticos que os descrevem com exatidão. Veremos que os modelos matemáticos que descrevem nossos computadores atuais são equivalentes a certas Máquinas de Turing conhecidas como Máquinas de Turing Universais. A propriedade essencial de tais máquinas universais é que elas podem simular[5] qualquer outra Máquina de Turing, e, portanto, de acordo com a TCT, poderiam simular qualquer

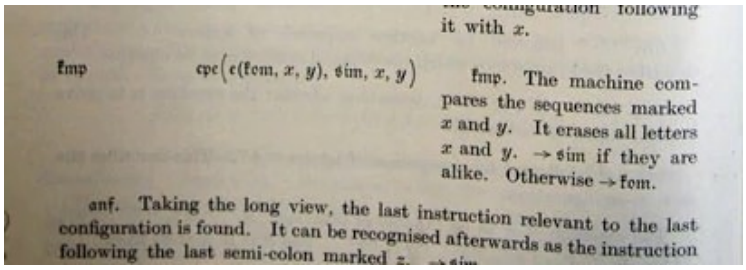
[3] Observe que, embora isso pareça ousado, empreendimentos semelhantes também ocorrem em outras áreas da ciências. Na física, por exemplo, algumas equações se propõe a descrever "todo e qualquer movimento", "todo e qualquer estado de um sistema", etc. Na ciência da computação busca-se, de maneira análoga, modelos matemáticos para descrever "toda e qualquer manipulação sistemática de informação", ou "todo e qualquer algoritmo".

[4] Para ser mais preciso, atualmente há duas interpretações para o que se entende por Tese de Church-Turing (TCT). Estas duas interpretações serão vistas com cuidado no Capítulo 6. Uma interpretação é que a TCT é uma *definição matemática* e a outra, que é a que nos referimos neste parágrafo, é que ela é uma *afirmação sobre a realidade física*. Um ponto fundamental desta segunda versão da TCT é que, na possibilidade dela ser falsa, em princípio existe meios de refutá-la, o que é essencial para hipóteses no contexto de ciências empíricas.

[5] Aqui a palavra "simular" tem um significado matematicamente preciso que, a grosso modo, significa uma certa *correspondência de um para um* entre dois modelos matemáticos.

outro processo computacional com alguma correspondência em algum substrato físico. Isso significa que, pelo menos em princípio, não existem instanciações de modelos de computação em substratos físicos que possam resolver problemas que não possam ser resolvidos por computadores atuais devidamente programados e com as condições de eficiência e de memória adequadas. A definição matemática de uma Máquina de Turing Universal é o modelo matemático para o que chamamos de *computador*.

O fato de que existem Máquinas de Turing Universais, que é um dos resultados mais importantes no artigo original escrito por Alan Turing (a Figura 1.2 mostra um fragmento de tal artigo), é conhecido como *universalidade* das Máquinas de Turing.


it with x.

fmp $\quad$ cpc(c(fom, x, y), sim, x, y)

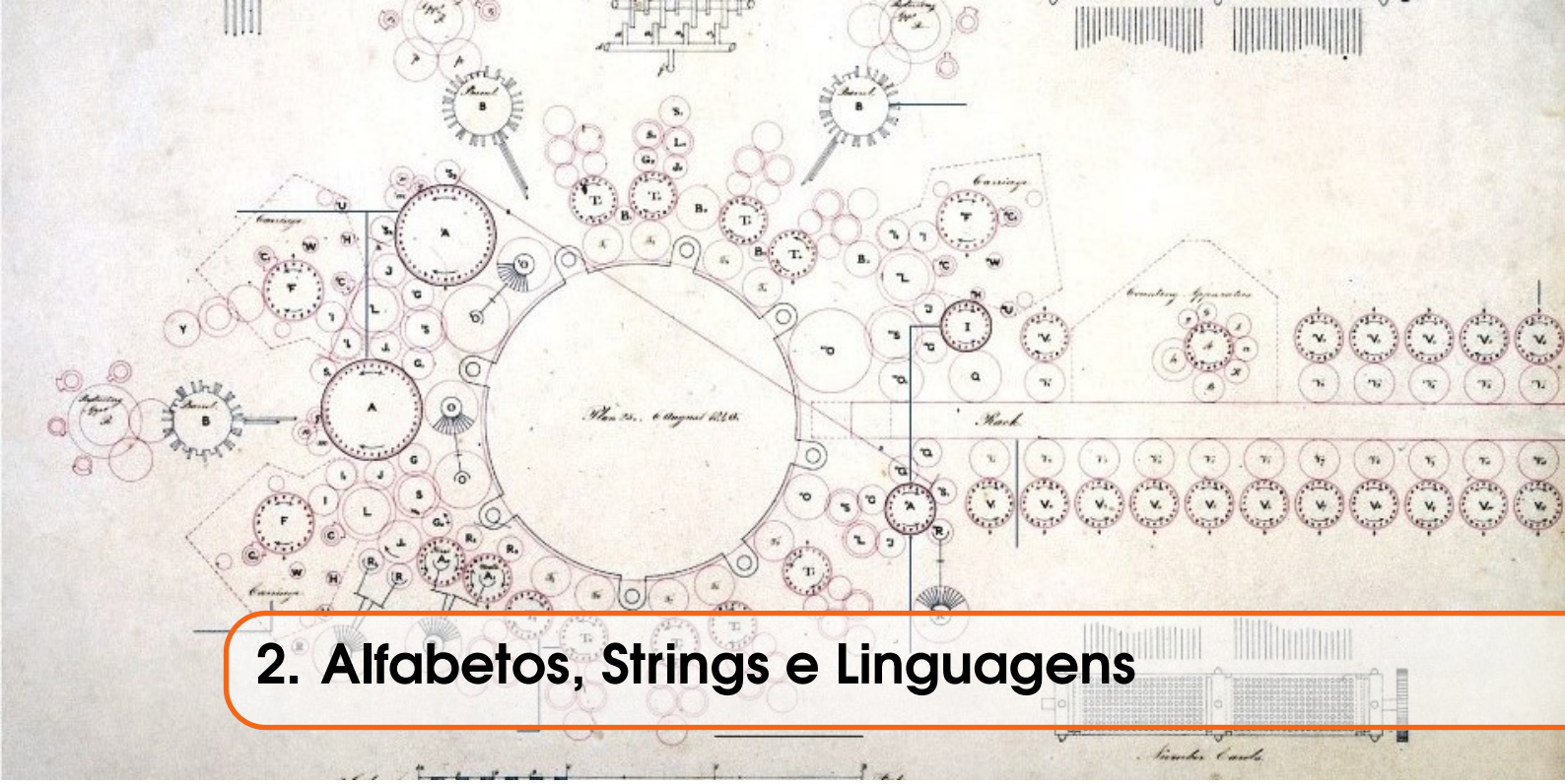
fmp. The machine compares the sequences marked x and y. It erases all letters x and y. → sim if they are alike. Otherwise → fom.

anf. Taking the long view, the last instruction relevant to the last configuration is found. It can be recognised afterwards as the instruction following the last semi-colon marked z.

Figure 1.2: Um trecho do famoso artigo publicado em 1936 por Alan Turing, entitulado *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Neste artigo é que foram estabelecidas as bases de toda ciência da computação.

> **A Tese de Church-Turing e a Universalidade da Computação**
>
> *"A lição que tomamos da universalidade da computação é que podemos construir um objeto físico, que chamamos de computador, que pode simular qualquer outro processo físico, e o conjunto de todos os possíveis movimentos deste computador, definido pelo conjunto de todos os possíveis programas concebíveis, está em* ***correspondência de um para um*** *com o conjunto de todos os possíveis movimentos de qualquer outro objeto físico concebível".* – David Deutsch

Parte 1: Teoria de linguagens e autômatos



2. Alfabetos, Strings e Linguagens

2.1 Alfabetos e strings

Algoritmos, computadores e problemas computacionais são objetos matemáticos complexos. Nosso primeiro passo será definir os conjuntos elementares de símbolos que usaremos para construir tais objetos. Ou seja, apresentar os tijolos básicos que serão necessários para construirmos todo o nosso edifício intelectual. Estes tijolos básicos serão chamados de símbolos e conjuntos finitos destes símbolos serão chamados de alfabetos.

Definição 2.1.1 — Alfabeto e símbolos. Um *alfabeto* é um conjunto finito qualquer e *símbolos* são elementos deste conjunto.

■ **Exemplo 2.1** Considere o conjunto $X = \{a, b, c, d\}$. Os elementos a, b, c, d do conjunto X são chamados de *símbolos do alfabeto X*. ■

■ **Exemplo 2.2** Considere o conjunto $\Sigma = \{0, 1\}$. Os elementos $0, 1$ do conjunto Σ são chamados de *símbolos do alfabeto* Σ. ■

Note que os conceitos de alfabeto e símbolos nada mais são do que sinônimos dos conceitos matemáticos de conjuntos e elementos. Iremos usar vários alfabetos neste livro, entretanto, o mais utilizado será o alfabeto *alfabeto binário*, apresentando no Exemplo 2.2. Um exemplo de alfabeto bastante comum no mundo das linguagens de programação é o conjunto de símbolos Σ_C de caracteres da tabela ASCII[1], que contém o conjunto de todos caracteres válidos em um programa escrito na linguagem C no padrão ANSI C.

Assim como não é possível construir um edifício usando apenas um tijolo, objetos matemáticos complexos não podem ser descritos usando-se apenas um símbolo. Para descrever objetos matemáticos complexos, iremos utilizar sequências de símbolos. A segunda definição que veremos neste capítulo se refere exatamente a isso.

[1] O conjunto de símbolos que contém caracteres básicos como $0, ..., 9$, $a, ..., z$, $A, ..., Z, +, -, *, \&, \#, \%, >, <, ...$, etc.

Definição 2.1.2 — Strings. Dado um alfabeto Σ, uma *string sobre* Σ é uma sequência de símbolos de Σ justapostos.

Por exemplo, *aaba* é uma string sobre o alfabeto $X = \{a, b, c, d\}$, do Exemplo 2.1. A string 00101 é uma string sobre o alfabeto binário. Um outro exemplo de string é um programa escrito em linguagem C, que pode ser visto matematicamente como uma string sobre o alfabeto Σ_C, que mencionamos anteriormente.

UM PROGRAMA PODE SER VISTO COMO UMA LONGA STRING

Observe que um programa em Linguagem C é uma sequência de símbolos ANSI. Esta sequência de símbolos inclui símbolos especiais que normalmente não são mostrados na tela do editor de texto (i.e., caracteres que indicam quebra de linha, indentação, espaçamento, etc que instruem o editor de texto a como dispor o código na tela do computador).

Notação 2.1. *Em geral usamos a letra grega* Σ *para denotar alfabetos. No caso em que o alfabeto não estiver explicitamente definido, a letra grega* Σ *denotará, por convenção, o alfabeto binário.*

Terminologia 2.1. *Embora estejamos usando "string" para se referir a uma sequência de símbolo, observamos que em textos em português é comum também que se use "palavra" para se referir a estes mesmos objetos matemáticos.*

Definição 2.1.3 — Substring e concatenação de strings. Uma *substring* de uma string w é uma subsequência de símbolos de w. A concatenação de duas strings x e y, denotada xy, é a string resultante da justaposição das strings x e y.

■ **Exemplo 2.3** As strings *ab*, *bb* e *bbc* são algumas das substrings da string *abbbbc*. ■

■ **Exemplo 2.4** Para um exemplo de concatenação, considere as strings $x = 111$ e $y = 000$. Neste caso, a string $xy = 111000$ é a concatenação de x e y e a string 000000 é a concatenação de y com ela mesma (i.e., $yy = 000000$). ■

Observe que concatenção não é uma operação comutativa. A partir do Exemplo 2.4, temos que $yx = 000111$, portanto $xy \neq yx$. Por outro lado, para quaisquer strings x, y, z, $(xy)z = x(yz)$, ou seja, a operação de concatenação de strings é associativa.

TEORIA DE LINGUAGENS FORMAIS

Em alguns livros de Teoria da Computação a definição de concatenação de strings é apresentada de maneira um pouco mais formal (veja o livro [Sud05], por exemplo) e em outros de maneira um pouco mais "intuitiva" (veja o livro [Sip06]), por exemplo). Esta variação é uma questão da ênfase que o autor quer dar ao assunto.

Na Definição 2.1.3 optamos pela versão mais intuitiva. De maneira semelhante, quando dissemos que concatenação é uma operação associativa nós não apresentamos uma demonstração matemática para isso (no livro [Sud05] tal demonstração é feita). Esta opção que fizemos aqui não tem a ver com a importância em sermos formais, pois seremos bastante formais no decorrer do texto. A ideia é que o nosso curso tem um enfoque mais na linha de cobrir em *amplitude as bases da teoria da computação* e menos na linha de cobrir *em profundidade a teoria de linguangens formais*.

Definição 2.1.4 — Tamanho de uma string. O *tamanho* de uma string w é o número de símbolos de w, e é denotado por $|w|$.

■ **Exemplo 2.5** Considere as strings *aabc* e 01. Nestes casos escrevemos $|aabc| = 4$ e $|001| = 2$. ■

Notação 2.2. *Seja Σ um alfabeto e s um símbolo de Σ. Embora símbolos e strings sejam objetos matemáticos diferentes, nos referiremos a s tanto como um símbolo de Σ quanto a uma string de tamanho 1 sobre Σ.*

Definição 2.1.5 — String nula. Denotamos a *string nula*, ou seja, a string que não contém nenhum símbolo, por ε.

Observe que, de acordo com nossa definição, $|\varepsilon| = 0$. Note também que ε é substring de qualquer possível string. A seguir, definiremos o que é a reversa de uma string. Intuitivamente, a ideia é simples: dada uma string w, a reversa de w, denotada por w^{R}, é a string lida de trás para frente (e.g., se $w = 1110$, então $w^{\mathrm{R}} = 0111$). Segue a definição indutiva[2]:

Definição 2.1.6 — Reversa de uma string. A reversa de uma string w, denotada w^{R}, é definida recursivamente da seguinte maneira:

Base: Se $w = \varepsilon$, então $w^{\mathrm{R}} = \varepsilon$.
Caso Geral: Seja w uma string com pelo menos um símbolo. Se a string w tem a forma $w = xs$, tal que x é uma string e s é uma string de tamanho 1, então $w^{\mathrm{R}} = sx^{\mathrm{R}}$.

Notação 2.3. *Seja Σ um alfabeto e $s \in \Sigma$. Diremos que uma string sobre este alfabeto é da forma s^n se a string é formada por n símbolos s consecutivos. De maneira análoga, se w é uma string sobre Σ, ao escrevermos w^n estamos nos referindo à concatenação de n cópias da string w.*

■ **Exemplo 2.6** A string 11111 pode ser escrita como 1^5. ■

■ **Exemplo 2.7** Considere a string $w = 10$. Com isso $w^6 = 101010101010$. ■

Note que, em particular, $x^0 = \varepsilon$ para qualquer string x.

Definição 2.1.7 — Potência de um alfabeto. Dado um alfabeto Σ, o conjunto Σ^i de strings w sobre Σ, tal que $|w| = i$, é dito uma *potência de* Σ. Definimos $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$.

Por exemplo, dado o alfabeto binário Σ, o conjunto Σ^3 é o seguinte conjunto de strings: $\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Dado um alfabeto Σ e $i \in \mathbb{N}$, note que Σ^i é um conjunto finito. A seguir vamos definir o conjunto infinito de todas as strings sobre Σ, ou seja, $\Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots$. A definição formal é a seguinte.

Definição 2.1.8 — O conjunto Σ^*. Dado um alfabeto Σ, o conjunto de todas as strings sobre Σ é definido como

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i.$$

[2]Uma definição indutiva é a mesma coisa que uma definição recursiva. Em teoria da computação será bastante comum usar raciocínio indutivo. Este tipo de raciocínio será útil não apenas em demonstrações de teoremas, mas também em várias definições.

2.1.1 Exercícios

Exercício 2.1 Seja $\Sigma = \{0,1\}$, $x \in \Sigma^*$ e $y \in \{a,b,c\}^*$. Responda verdadeiro ou falso.

(a) Se w é uma string da forma $x01$, então $|w| > 2$?
(b) Se w é uma string da forma $x010$, então $|w| \geq 3$?
(c) Se w é uma string da forma $y010$, então w é uma string sobre Σ?

■

Exercício 2.2 Seja Σ um alfabeto e i um número natural. Qual é a cardinalidade de Σ^i? ■

Exercício 2.3 (RESOLVIDO) Dado um alfabeto Σ, a Definição 2.1.8 estabelece o conjunto Σ^* de todas as strings possíveis com símbolos de Σ. Apresente uma definição alternativa para Σ^* (ou seja, uma definição diferente da Definição 2.1.8, mas que resulte no mesmo conjunto de strings) que seja recursiva.

Solução:

Dado um alfabeto Σ, conjunto Σ^* é definido da seguinte forma:
Base: $\varepsilon \in \Sigma^*$
Indução: Se $w \in \Sigma^*$, então $\forall a \in \Sigma$ temos que $wa \in \Sigma^*$. ■

Exercício 2.4 Nesta seção, fornecemos uma definição informal para a concatenação de uma string x com ela mesmo n vezes, denotada x^n. Forneça uma definição formal indutiva para x^n. ■

Exercício 2.5 É verdade que $x^0 = y^0$ para qualquer par de strings x e y? ■

Exercício 2.6 Seja Σ um alfabeto qualquer, $i \in \mathbb{N}$ e $w \in \Sigma^*$. Mostre que $(w^i)^R = (w^R)^i$. ■

2.2 Linguagens

Na seção anterior começamos com elementos fundamentais chamados símbolos e os usamos para construir objetos complexos chamados de strings. Agora vamos usar strings como elementos fundamentais para construir objetos ainda mais complexos chamados de *linguagens*.

Definição 2.2.1 — Linguagem. Seja Σ um alfabeto. Uma linguagem é um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Em outras palavras, dado um alfabeto, uma linguagem é um conjunto qualquer de strings sobre este alfabeto. Por exemplo, $L = \{aba, acccc, b\}$ é uma linguagem sobre o alfabeto $\Sigma = \{a,b,c\}$.

Observe que strings e linguagens são objetos matemáticos diferentes. Enquanto strings são *sequências*, linguagens são *conjuntos*. Enquanto strings tem tamanho *finito*, linguagens podem ter tamanho *finito ou infinito*. Considere o alfabeto binário $\Sigma = \{0,1\}$. Nos Exemplos 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11 apresentamos algumas linguagens binárias que serão bastante comuns neste curso:

■ **Exemplo 2.8** $L_{01} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, ...\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é da forma } 0^n1^n, \text{ para } n \geq 0\}$. ■

■ **Exemplo 2.9** $L_{\text{PAL}} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 010, 101, 000, 111, ...\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um palíndromo}\}$. ■

■ **Exemplo 2.10** $L_{\text{P}} = \{10, 11, 101, 111, 1011, ...\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um número primo escrito em binário}\}$. ■

■ **Exemplo 2.11** $L_{SQ} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, ...\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um número quadrado perfeito escrito em binário}\}$. ■

LINGUAGENS NATURAIS E LINGUAGENS FORMAIS

Observe que chamamos conjuntos de strings de linguagens. A razão disso é que há uma certa analogia com o conceito que intuitivamente conhecemos como linguagem, usada naturalmente em nosso dia a dia. Vamos a alguns exemplos que nos ajudarão a tornar isso mais claro.

■ **Exemplo 2.12** Seja $\Sigma_P = \{a, b, c, ..., z\}$ um alfabeto (i.e., o alfabeto da língua portuguesa). ■

Considere agora o conjunto L contendo todas as palavras da língua portuguesa. Note que este conjunto, por se tratar de um conjunto de strings sobre Σ_P, de acordo com Definição 2.2.1 é formalmente uma linguagem (por questão de simplicidade, estamos ignorando aqui acentos, hífens e outras sutilezas). Poderíamos chamar este conjunto de strings de "linguagem portuguesa". Por exemplo, observe que $bola \in L$, $caneta \in L$, $inconstitucional \in L$.

■ **Exemplo 2.13** Seja $\Sigma_P = \{a, b, c, ..., z, \sqcup\}$. ■

Ao incluirmos o símbolo "$\sqcup$" em nosso alfabeto, temos algo para ser usado de separador de palavras. Com isso, poderíamos montar um frase como $a \sqcup bola \sqcup verde \sqcup escura$. De maneira simplificada, novamente, poderíamos pensar na língua portuguesa como sendo o conjunto L' de todas as strings que correspondem a frases válidas em português.

Neste ponto, um linguista nos chamaria atenção (com razão!) para o fato que tentar definir matematicamente a língua portuguesa não é uma tarefa tão fácil e argumentaria que o conteúdo das linguagens L e L' que acabamos de ver não é tão bem definido como estamos sugerindo. Poderíamos até tentar contra-argumentar dizendo que, pelo menos no caso de L, seria possível sermos formais definindo a linguagem como sendo o conjunto de todas as palavras de algum dicionário específico fixado a priori (já para o caso de fornecer uma definição exata para L' a tarefa seria bem mais difícil).

Entretanto, o nosso foco neste livro não são linguagens naturais como o português ou qualquer outra língua natural, sendo que os exemplos vistos acima são úteis apenas para ilustrar a analogia que há entre o conceito matemático de linguagens e o conceito intuitivo de linguagens naturais. Ainda assim, existem muitas linguagens que nós, profissionais de computação, lidamos no dia a dia e que são completamente formais. Voltando à um exemplo que vimos anteriormente, considere o alfabeto Σ_C da Seção 2.1. A linguagem sobre Σ_C, definida abaixo é matematicamente precisa:

$$L_C = \{w \in \Sigma_C^* : \text{"}w \text{ é um programa válido em linguagem C"}\}$$

A linguagem L_C, definida acima, consiste de todos os (infinitos) possíveis programas válidos escritos em linguagem C. Embora tenhamos escrito textualmente a expressão informal "w é um programa válido em linguagem C" na nossa especificação das strings contidas no conjunto L_C, esta linguagem pode, sim, ser matematicamente bem definida. Para tal precisamos de algumas ferramentas matemáticas, especialmente um conceito matemático conhecido como *gramática formal*. Mais adiante neste livro veremos formalmente o que é uma gramática formal e discutiremos brevemente algumas aplicações disto na especificação de linguagens de programação e na construção de compiladores.

Em diversas situações, nós queremos interpretar strings binárias não apenas como meras sequências de 0's e 1's, mas como números naturais representados em base binária. Em tais situações a seguinte notação será conveniente:

Notação 2.4. *O número natural representado pela string binária w é denotado por $N(w)$.*

Por exemplo, se $w_1 = 101$ e $w_2 = 1111$, então $N(w_1) = 5$ e $N(w_2) = 15$. Note que N não é uma bijeção, pois várias strings podem estar associadas à um mesmo número. Por exemplo, $N(01) = N(1) = 1$.

Convenção: $N(\varepsilon) = 0$.

A vantagem da Notação 2.4, é tornar a nossa escrita mais concisa na definição de algumas linguagens. Por exemplo, a linguagem dos números primos e a linguagens do números múltiplos de 3 podem ser denotadas, respectivamente, por $L_P = \{w : N(w)$ é um número primo$\}$ e $L_3 = \{w : N(w)$ é um múltiplo de $3\}$.

2.2.1 Linguagens e problemas computacionais

O que significa o problema de *"testar se um número n é primo"*? Uma maneira de tentar formalizar isso é pensar que isso é equivalente ao seguinte problema: dada uma string w, decidir se w é a representação binária de um número primo, ou seja, testar se a string w pertence a linguagem L_P do Exemplo 2.10.

Para aqueles que não gostam de números binários, poderíamos alternativamente definir a linguagem dos números primos usando outros alfabetos (e.g., o alfabeto dos dígitos de 0 a 9), mas isso realmente não é tão importante aqui. O ponto central é que uma vez que fixamos um alfabeto, digamos o alfabeto binário, a linguagem L_P incorpora a propriedade "ser primo", pois todos os objetos contidos neste conjunto tem tal propriedade e todos os objetos que não fazem parte deste conjunto não tem tal propriedade. Portanto, responder se um número é primo se reduz a distinguir se uma dada string pertence ou não ao conjunto L_P.

> TESTANDO SE UM DADO OBJETO TEM CERTA PROPRIEDADE
>
> Em teoria da computação é bastante comum pensamos em linguagens como sinônimos de problemas computacionais. Embora esta ideia pareça simples, ela também é bastante poderosa. Existem outras maneiras de tornar formal o conceito de problema computacional e, no decorrer deste livro, veremos outras definições mais sofisticadas para tal. Entretanto, em boa parte do curso o uso de linguagens será o formalismo padrão para representar problemas.
>
> Para quem ainda não está convencido de que existe tal conexão direta entre o conceito de linguagem e o conceito de problema, uma maneira intuitiva de se pensar a respeito disso segue na seguinte linha: No funcionamento interno de um computador, qualquer objeto matemático, em última análise, é uma sequência de bits. No caso particular do exemplo acima, quando escrevemos um programa para testar se um dado número é primo, o que o programa faz é testar se uma sequência de bits da memória do computador representa ou não representa um número primo em binário. Ou seja, no final das contas, o que o programa está fazendo é testar se uma string do alfabeto binário pertence ou não à linguagem L_P. Não é muito difícil de ver que esse tipo de raciocínio pode ser generalizado para uma série de outros problemas. De fato, qualquer problema cuja solução envolva testar se um dado objeto matemático tem uma certa propriedade pode ser modelado usanddo uma linguagem.

2.2.2 Exercícios

Exercício 2.7 Seja Σ um alfabeto arbitrário. É verdade que os conjuntos Σ^*, $\varnothing$, $\{\varepsilon\}$ e Σ^4 são todos linguagens sobre Σ? Justifique. ∎

Exercício 2.8 Seja $\Sigma = \{0,1\}$. Forneça uma definição formal para a linguagem sobre Σ das strings que representam números múltiplos de 4 escritos em binário. ■

Exercício 2.9 Seja Σ um alfabeto qualquer. É verdade que a linguagem $\{w : \exists x \in \Sigma^* \text{ tal que } w = xx^R\}$ é a linguagem de todos os palíndromos construídos com símbolos de Σ? Em caso afirmativo, prove. Em caso negativo, forneça um contra-exemplo e, em seguida, forneça uma definição formal adequada para a linguagem dos palíndromos construídos com símbolos de Σ. ■

2.2.3 Operações com linguagens

Assim como podemos criar strings maiores a partir da operação de concatenação de strings menores, vamos definir agora uma operação análoga para linguagens, chamada de concatenação de linguagens.

Definição 2.2.2 A *concatenação de duas linguagens* L e M é o conjunto de todas as strings que podem ser formadas tomando-se uma string x de L e uma string y de M e fazendo a concatenação xy. Denotamos a linguagem resultante por LM ou $L \cdot M$.

■ **Exemplo 2.14** Considere as linguagens $L = \{00, 0\}$ e $L' = \{1, 111\}$. A concatenação destas duas linguagens é $LL' = \{001, 00111, 01, 0111\}$. ■

■ **Exemplo 2.15** Seja $L = \{a, aa, aaa, ...\}$ e $M = \{\varepsilon, x, xx, xxx, ...\}$. Para computarmos quais são as strings de LM, começamos com a primeira[3] string de L e a concatenamos com cada uma das strings de M, obtendo a, ax, axx, $axxx$,..., etc. Adicionalmente, tomamos a segunda string de L e também concatenamos com cada uma das strings de M, obtendo aa, aax, $aaxx$, $aaxxx$,..., etc. Seguimos fazendo isso com cada uma das (infinitas) strings de L. De maneira mais precisa, temos que $LM = \{a^i x^k \ : \ i \geq 1 \text{ e } k \geq 0\}$ ■

Exercício 2.10 (Resolvido) Seja $\Sigma = \{0,1\}$ e sejam L_3 e R as linguagens sobre Σ definidas da seguinte forma: $L_3 = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$ e $R = \{0\}$. Qual é a linguagem L_3R?

Solução: As strings contidas na linguagem da concatenção L_3R são as strings de L_3 adicionadas de um 0 ao final. Note que quando adicionarmos 0 ao final de um número binário o resultado é um novo número binário que é dobro do número original. Portanto a linguagem resultante é: $L_3R = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 6\}$. ■

Notação 2.5. *Usamos a notação L^i, para $i \geq 2$, para denotar a concatenação de uma linguagem L consigo mesmo $i-1$ vezes, isto é, $L^i = \underbrace{LL...L}_{i \text{ vezes}}$. Para o caso $i = 0$ e $i = 1$ a notação se refere, respectivamente, aos conjuntos $L^0 = \{\varepsilon\}$ e $L^1 = L$.*

[3] A rigor não existe ordem nos elementos de um conjunto, mas para simplificar a explicação, nos referimos aqui a a como a primeira string de L, aa como segunda string de L, e assim por diante.

Exercício 2.11 (Resolvido) Seja $\Sigma = \{0,1\}$. Considere a linguagem $R = \{0\}$ sobre Σ. Qual é a linguagem $\Sigma^* R$? E qual é a linguagem $\Sigma^* R^2$?

Solução: Lembrando que as strings binárias terminadas em 0 são precisamente os múltiplos de 2 em binário e a o multiplicarmos múltiplos de 2, temos múltiplos de 4, temos que:

- $\Sigma^* R = \{w : N(w)$ é um múltiplo de $2\}$.
- $\Sigma^* RR = \Sigma^* R^2 = \{w : N(w)$ é um múltiplo de $4\}$.

■

A operação de concatenação de uma linguagem com ela mesma pode ser feita infinitamente, como definido a seguir:

Definição 2.2.3 Seja L uma linguagem. O Fechamento (ou Fecho de Kleene) de L, denotado por L^*, é o conjunto de strings que podem ser formadas tomando-se qualquer número de strings de L (possivelmente com repetições) e as concatenando. Isto é,

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i.$$

■ **Exemplo 2.16** Seja $L = \{000, 111\}$. Então $L^* = \{\varepsilon$, 000, 111, 000000, 000111, 111000, 111111, 000000000, 000000111, 000111000, ... $\}$. ■

Observe que ao escrevermos A^*, devemos especificar exatamente o que significa A. Se A é um alfabeto, então A^* é a união infinita de conjuntos potência de A. Por outro lado se A é uma linguagem, então A^* é o fecho de A, ou seja, a sequência infinita de concatenações de A consigo mesma. Entretanto, note que em ambos os casos, note que A^* é uma linguagem. Mais precisamente, a linguagem de todas as strings construídas usando os elementos do conjunto A como "tijolos básicos". Caso A seja um alfabeto, estes tijolos básicos são símbolos, caso A seja uma linguagem, estes tijolos básicos são strings.

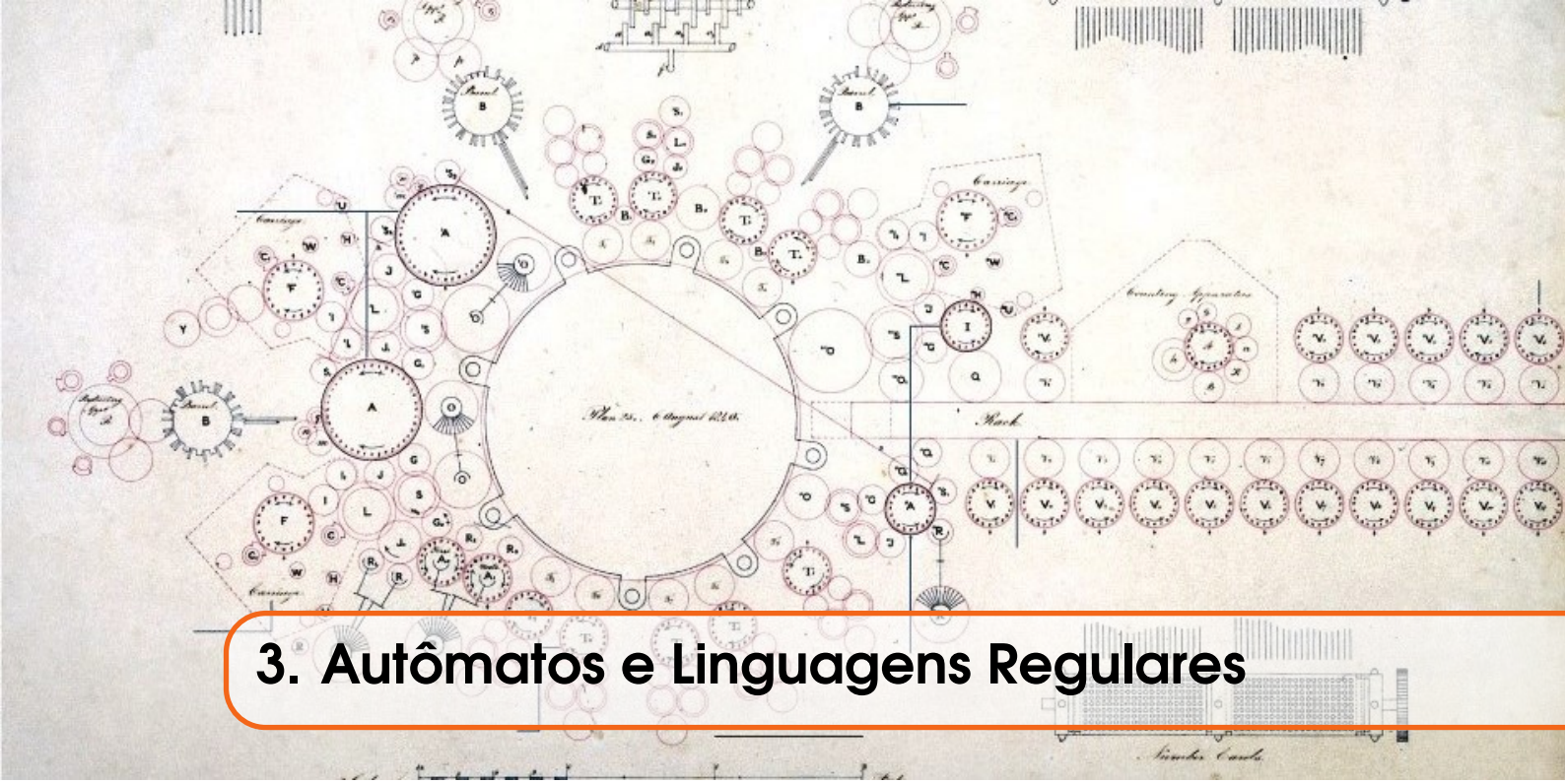
Exercício 2.12 (Resolvido) Sejam $L = \{1\}$ e $R = \{0\}$ linguagens. Qual é a linguagem LR^*?

Solução: A linguagem é $LR^* = \{w : N(w)$ é uma potência de $2\}$. ■

Exercício 2.13 Nas questões abaixo, A é sempre um alfabeto e L é sempre uma linguagem.

- Para todo A, é verdade que $A = A^*$?
- Existe A, tal que $A = A^*$?
- Para todo A, é verdade que $A^* = (A^*)^*$
- Para todo L, é verdade que $L^* = (L^*)^*$
- Para todo L e A tal que L é uma linguagem sobre A, é verdade que $A^* = L^*$
- Existe uma linguagem L sobre A tal que $A^* = L^*$.
- Seja L uma linguagem não vazia. Qual é a linguagem resultante da concatenação de L com o conjunto vazio?

■



3. Autômatos e Linguagens Regulares

Um dos objetivos que queremos alcançar neste livro é prover uma definição formal para o conceito de algoritmo. Nós alcançaremos este objetivo no Capítulo 5, com a definição das Máquinas de Turing. O que veremos agora é a definição de *autômatos finitos*, que é um modelo matemático com poder de expressão menor do que as Máquinas de Turing. Por poder de expressão menor, queremos dizer que apenas um subconjunto de todos os possíveis algoritmos podem ser representados por autômatos finitos. Entretanto, estudar este modelo será útil para nos familiarizarmos com os conceitos matemáticos que serão muito utilizados no Capítulo 5. Além disso, por si só, o assunto que veremos agora é bastante útil em aplicações práticas, como busca de padrões em textos e construção de analisadores léxicos para compiladores.

3.1 Autômatos Finitos Determinísticos (AFDs)

Considere uma máquina que vende chocolates que custam 6 reais. Abaixo mostramos uma figura ilustrando tal máquina juntamente com um diagrama que descreve o mecanismo de funcionamento interno desta máquina.

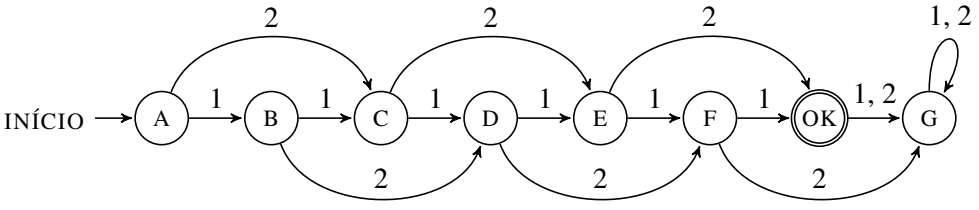


Figure 3.1: Uma máquina que vende chocolates de R$ 6 e aceita moedas de R$ 1 e R$ 2. Ao lado o diagrama simplificado descrevendo o seu mecanismo de funcionamento interno. Por exemplo, se inserirmos uma moeda de R$ 1 e uma moeda de R$ 2, a máquina, atingirá o estado D. A máquina atingirá o estado OK se for inserida uma sequência de moedas cuja soma seja exatamente R$ 6.

Diagramas como o da Figura 3.1 são conhecidos como *autômatos finitos determinísticos*. A ideia é entender que a entrada da máquina é uma sequência de moedas (podemos também pensar que a entrada é uma string cujos símbolos são moedas), que podem ser de 1 ou 2 reais. A máquina libera o chocolate se as moedas somarem exatamente 6 reais. Há uma indicação de INÍCIO no estado A, pois este é o estado que a máquina se encontra antes de todo processo começar. A partir do estado A, a máquina faz uma transição para cada moeda que é fornecida como entrada. A máquina libera o chocolate ao final do processo se, e somente se, ela atingir o *estado* OK. Caso a máquina termine a computação em qualquer outro estado, ela simplesmente devolve todo dinheiro sem liberar nenhum chocolate. Embora este seja um exemplo de máquina simples demais para ser útil, ele servirá muito bem para entendermos como funcionam autômatos.

REFLETINDO UM POUCO: MODELOS MATEMÁTICOS E OBJETOS FÍSICOS

No Capítulo 1 dissemos que podemos pensar em computadores como "instanciações de objetos abstratos e seus possíveis relacionamentos matemáticos em objetos físicos e seu conjunto de possíveis graus de movimento". Note que a Figura 3.1 apresenta exatamente isso, pois:

(1) A máquina de chocolates é um objeto físico. Observe que embora esta máquina não seja um computador de propósito geral, a máquina é a instanciação de um algoritmo, que é o algoritmo que testa se a soma das moedas de entrada é exatamente 6 reais.

(2) O diagrama é o modelo matemático. Em particular, trata-se de um objeto matemático definido por um conjunto de estados, um conjunto de símbolos (o conjunto $\{1, 2\}$ dos símbolos que aparecem nos rótulos das transições) e, além destes conjuntos, certas relações matemáticas, associando estados e símbolos, sendo estas relações indicadas pelas setas do diagrama. A definição exata destas relações ficará clara no decorrer desta seção.

O ponto central aqui é que *o objeto matemático e suas relações matemáticas estão em uma correspondência de um para um com o objeto físico e seus graus de liberdade de movimento*. Os graus de liberdade de movimento são os tipos de movimentações que os mecanismos internos da máquina de vender chocolate tem.

3.1.1 Modelando matematicamente autômatos

Nesta seção veremos uma definição precisa para diagramas como vistos na seção anterior.

Definição 3.1.1 — Autômato Finito Determinístico (AFD). Uma Autômato Finito Determinístico, também chamado de AFN, é uma 5-tupla $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tal que:

Q é o conjunto de *estados*;

Σ é o conjunto de *símbolos de entrada*;

δ é a *função de transição* $\delta : Q \times \Sigma \to Q$;

$q_0 \in Q$ é o *estado inicial*;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de *estados finais*.

Na maior parte dos casos diremos simplesmente *autômatos* ou *AFD's* para nos referirmos aos autômatos finitos determinísticos[1]. Algo importante de se observar é que esta Definição 3.1.1 se refere a um autômato genérico, ou seja, os conjuntos e a relação da 5-tupla podem ser qualquer coisa. Em muitos casos vamos apresentar definições particulares. Por exemplo, para modelar matematicamente a máquina de chocolates da Figura 3.1 precisamos apresentar uma *instância específica* da Definição 3.1.1. O exemplo a seguir ilustra isso.

[1] Algumas vezes usa-se o acrônimo *DFA*, que vem da expressão em inglês "*deterministic finite automata*."

■ **Exemplo 3.1 — Modelo matemático da máquina de vender chocolates.** Uma definição matemática para o exemplo da Figura 3.1 é o autômato finito determinístico $C = (Q_c, \Sigma_c, \delta_c, \text{A}, F_c)$, sendo que os componentes da 5-tupla são:

$Q = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{E}, \text{F}, \text{OK}, \text{G}\}$;
$\Sigma = \{1, 2\}$;
$\delta_c : Q \times \Sigma \to Q$ é a função definida caso a caso a seguir:

$\delta_c(\text{A}, 1) = \text{B}$, $\delta_c(\text{A}, 2) = \text{C}$, $\delta_c(\text{B}, 1) = \text{C}$, $\delta_c(\text{B}, 2) = \text{D}$, $\delta_c(\text{C}, 1) = \text{D}$, $\delta_c(\text{C}, 2) = \text{E}$,
$\delta_c(\text{D}, 1) = \text{E}$, $\delta_c(\text{D}, 2) = \text{F}$, $\delta_c(\text{E}, 1) = \text{F}$, $\delta_c(\text{E}, 2) = \text{OK}$, $\delta_c(\text{F}, 1) = \text{OK}$, $\delta_c(\text{F}, 2) = \text{G}$,
$\delta_c(\text{OK}, 1) = \text{G}$, $\delta_c(\text{OK}, 2) = \text{G}$, $\delta_c(\text{G}, 1) = \text{G}$, $\delta_c(\text{G}, 2) = \text{G}$.

O estado A é o estado inicial;
O conjunto unitário $\{\text{OK}\}$ é o conjunto de estados finais. ■

Definições genéricas e definições específicas

Uma habilidade que é muito importante para estudantes de teoria da computação é a distinção entre conceitos genéricos e instâncias particulares de tais conceitos. Na Definição 3.1.1 temos a definição para um AFD em geral e no no Exemplo 3.1, a 5-tupla $C = (Q_c, \Sigma_c, \delta_c, \text{A}, F_c)$ é a definição matemática do AFD especificamente correspondente a máquina de vender chocolates.

Vamos usar uma analogia com algo bastante familiar. Pense nas funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log x$. Temos aqui dois casos *específicos* e matematicamente bem definidos de funções. Entretanto, sabemos que é perfeitamente possível sermos mais *genéricos* e fornecermos uma definição para o conceito *genérico* de função[†] tal que as funções $f(x)$ e $g(x)$ anteriores são casos particulares (ou instanciações) de tal definição. Ou seja, podemos falar de objetos matemáticos específicos, como $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log x$, mas também do objeto matemático genérico que chamamos de *função*.

A analogia que queremos fazer aqui será particularmente importante para fazer a distinção entre a definição do conceito geral de um agoritmo (veremos isso no Capítulo 5 deste livro) e uma instância específica de um algoritmo. Em nossos estudos, a flexibilidade mental de entender esta distinção entre casos gerais e casos particulares é bastante importante.

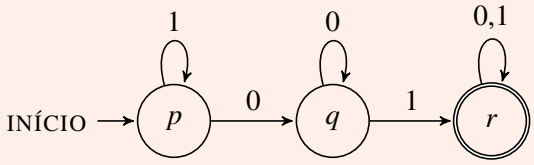
[†]Curiosamente, funções são definidas como casos particulares objetos matemáticos ainda mais genéricos, conhecidos como relações, mas não nos preocuparemos com isto aqui.

Exercício 3.1 (Resolvido) Desenhe o diagrama do autômato A definido a seguir:

$A = (Q, \Sigma, \delta, p, \{r\})$, tal que $Q = \{p, q, r\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ e a função δ é definida abaixo:

$\delta(p, 1) = p$, $\delta(p, 0) = q$, $\delta(q, 0) = q$,
$\delta(q, 1) = r$, $\delta(r, 0) = r$, $\delta(r, 1) = r$.

Solução:



■

A função δ do enunciado do Exercício 3.1 é um tipo de função que é definida ponto a ponto

(ou seja, ela não tem uma regra geral que descreve o comportamento da função, como é o caso de funções que estamos acostumados a estudar em cálculo, como, por exemplo, $f(x) = x^2$). Em teoria da computação, funções que não podem ser facilmente descritas por regras gerais serão bastante comuns. Para facilitar a nossa vida, vamos descrever δ usando uma tabela, como esta apresentada no exemplo a seguir:

	0	**1**
$\rightarrow$ ***p***	q	p
q	q	r
****r***	r	r

Table 3.1: Tabela de transições da função δ do AFD do Exercício 3.1.

Na primeira coluna da Tabela 3.1.1, em negrito, temos os estados p, q, r do autômato. A seta ao lado do estado p indica que ele é o estado inicial e o asterisco ao lado do estado r indica que ele é um estado final. No topo da tabela, também em negrito, temos os símbolos do alfabeto, ou seja, 0 e 1. Preenchemos a posição correspondente a linha do estado p e a coluna do símbolo 0 com o valor q, pois $\delta(p,0) = q$. As demais linhas da tabela são preenchidas de maneira semelhante.

No decorrer deste livro, ao nos referirmos à um AFD, estritamente falando, estaremos nos referindo à uma 5-tupla. Porém, por questões de conveniência, será bastante comum apresentarmos a tabela de transições ou mesmo o diagrama, para descrever o AFD em questão.

3.1.2 Aceitação e rejeição de strings: ideia intuitiva

Agora que nós já temos o nosso modelo matemático para autômatos finitos, vamos interpretá-lo mais precisamente como ele é um modelo de computação. Mas o que queremos dizer com "interpretá-lo"? O que vamos fazer é entender porque este modelo matemático é um *modelo de computação* e não como uma mera 5-tupla. Para que possamos formalizar isso, vamos analisar o processo computacional em questão com cuidado.

A ideia central é enxergar o AFD como um objeto que receba uma string $w = w_1 w_2 ... w_n$ como entrada, processe um a um os símbolos de w, e produza uma saída. Durante o processamento de w, cada passo consiste em ler um símbolo w_i, fazer uma mudança de estado e descartar w_i. O AFD irá, passo a passo, descartar símbolos de w e irá também mudando de estados neste processo. O ponto central é que podemos fazer a seguinte pergunta:

- Em que estado o AFD se encontra após o descarte do último símbolo de w?

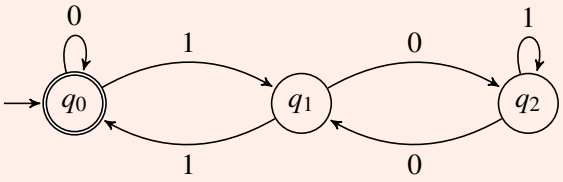
Digamos que depois da última transição de estados o AFD atinja um dado estado q. A ideia aqui é que se o estado q for um estado final, nós iremos dizer que o AFD *aceitou* a string w. Por outro lado, se q não for um estado final, nós iremos dizer que o AFD *rejeitou* a string w. Os estados finais também são chamados de estados de aceitação do autômato.

Exercício 3.2 (Resolvido) Seja $\Sigma = \{0,1\}$. Considere a linguagem binária L das strings que contém a substring 01, ou seja, $L = \{w : w \text{ é da forma } x01y, \text{ sendo que } x, y \in \Sigma^*\}$. Construa um AFD que aceite todas e somente as strings de L.

Solução: Podemos usar o mesmo AFD usado no Exercício 3.1. ■

Exercício 3.3 (Resolvido) Forneça um AFD com alfabeto binário que aceite as strings w tal que $N(w)$ é um múltiplo de 3.

Solução: O seguinte autômato resolve o problema:



■

Exercício 3.4 Seja $\Sigma = \{a,b,c\}$. Seja $L = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é da forma } xbbya, \text{ sendo que } x,y \in \Sigma^*\}$. Construa um AFD que aceite a string w fornecida como entrada se, e somente se, $w \in L$. ■

Exercício 3.5 Seja $\Sigma = \{0,1\}$. Construa AFDs que aceite a string fornecida como entrada se, e somente se, a string pertence a linguagem L, para cada um dos casos abaixo:

(a) $L = \{w : w \text{ tenha um número ímpar de 1's}\}$.
(b) $L = \{w : |w| \leq 3\}$.
(c) $L = \{w : w \text{ tem ao mesmo tempo um número par de 0's e um número par de 1's}\}$
(d) $L = \{w : \text{se } w' \text{ é uma substring de } w \text{ com } |w'| = 5, \text{ então } w' \text{ tem pelo menos dois 0's}\}$.
(e) $L = \{w : w \text{ é terminada em } 00\}$.
(f) $L = \{w : \text{o número de 0's em } w \text{ é divisível por 3 e o número de 1's é divisível por 5}\}$.
(g) $L = \{w : w \text{ contém a substring } 011\}$.
(h) $L = \Sigma^*$

■

O que precisamos fazer agora é transformar esta ideia intuitiva de que um AFD aceita algumas strings e rejeita outras strings em definições matemáticas precisas. Ou seja, queremos saber matematicamente o que significa um certo AFD $D = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ aceitar ou rejeitar uma dada string w.

3.1.3 Aceitação e rejeição de strings: definição formal

Voltando a nossa máquina de vender chocolates, considere o seguinte: Se a máquina estiver no estado B e receber 3 moedas de 1 real, em que estado a máquina vai parar? A resposta é que a máquina irá atingir o estado E. O mais importante aqui é obvervar a *pergunta* que fizemos: *dado um estado e uma sequência de moedas, qual é o estado resultante?* O que vamos fazer agora é formalizar esta idéia de que dado um estado q e uma sequência de símbolos w, obtemos o estado resultante é q'. O objeto matemático para modelar esta ideia é uma função $f : Q \times \Sigma^* \to Q$ de forma que $f(q,w) = q'$. Uma vez a definição de tal função depende da função δ original da máquina, vamos chamar esta nova função de $\hat{\delta}$.

Definição 3.1.2 — Função de trasição estendida. Dado um AFD $D = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, a *função de transição estendida* $\hat{\delta}$ de D é a função $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ definida indutivamente:

Caso base: $w = \varepsilon$.
$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$

Indução: $|w| > 0$.
Seja w uma string da forma $w = xa$, sendo que $x \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$. Então $\hat{\delta}(q,w) = \delta(\hat{\delta}(q,x),a)$.

A razão de termos apresentado a definição 3.1.2 é que agora temos uma maneira precisa de dizer o que significa um AFD D aceitar ou rejeitar uma string. A maneira precisa é a seguinte:

Definição 3.1.3 — Aceitação e rejeição de strings. Seja $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD e $w \in \Sigma^*$. Se $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$, então dizemos que D *aceita* a string w. Se $\hat{\delta}(q_0, w) \notin F$, então dizemos que D *rejeita* a string w.

Podemos generalizar a ideia de aceitação de string para a ideia de aceitação de uma linguagem. Se L é o conjunto de todas as strings aceitas por D, então dizemos que D aceita a linguagem L. Neste caso dizemos que L é a linguagem de D. Isto é definido formalmente a seguir.

Definição 3.1.4 — Linguagem de um AFD. A linguagem de um AFD D, denotada por $L(D)$, é definida como $L(D) = \{w : \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$.

Se L é a linguagem de um AFD D, dizemos que D *decide* a linguagem L. Dizemos também que D *aceita* a linguagem L[2]. Agora segue a definição mais importante deste capítulo:

Definição 3.1.5 — Liguagem Regular. Dada uma linguagem L, se existe um AFD D tal que $L = L(D)$, então L é dita uma *linguagem regular*.

3.1.4 Exercícios

Exercício 3.6 Seja um AFD com alfabeto Σ e conjunto de estados Q. Sejam $x, y \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ e $q \in Q$ quaisquer.

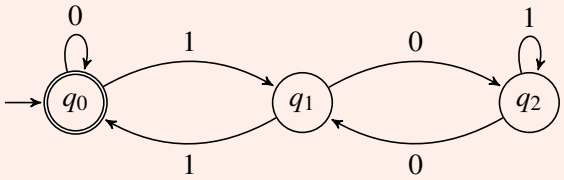
(a) Mostre que $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$.
(b) Mostre que $\hat{\delta}(q, ax) = \hat{\delta}(\delta(q, a), x)$. ■

Exercício 3.7 Considere o seguinte AFD $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, ..., q_6\}$
- $\Sigma = \{0, 1, 2, ..., 6\}$
- $F = \{q_0\}$
- Função de transição δ definida a seguir:
  $\delta(q_j, i) = q_k$, sendo que $k = (j + i) \bmod 7$

Qual é a linguagem aceita por D? ■

Exercício 3.8 No Exercício Resolvido 3.3, mostramos que o autômato abaixo aceita a linguagem $L_3 = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$.



Prove formalmente que a solução está correta correta. ■

[2] Alguns textos utilizam também a expressão "L é reconhecida por D"

Exercício 3.9 Seja uma linguagem L sobre o alfabeto Σ. O complemento da linguagem L, denotado por $\overline{L}$, é defindo da seguinte maneira: $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$. Prove que se L é regular, então $\overline{L}$ também é regular. ■

Exercício 3.10 Considere os seguintes AFDs: $D_Q = (Q, \Sigma, \delta_Q, q_0, F_Q)$ e $D_P = (P, \Sigma, \delta_P, p_0, F_P)$ sendo $Q = \{q_0, q_1, ..., q_k\}$ e $P = \{p_0, p_1, ..., p_h\}$.

Construiremos agora um terceiro AFD D_A a partir dos dois AFDs anteriores. A ideia é que dada qualquer string w, o AFD D_A vai simular ao mesmo tempo a computação de D_Q com w e D_P com w. Por exemplo, se na terceira transição D_Q estiver no estado q_1 e D_P estiver no estado p_5, então na terceira transição o AFD D_A estará em um estado chamado (q_1, p_5). A definição formal dos componentes de $D_A = (A, \Sigma, \delta_A, a_0, F_A)$ segue abaixo:

- $A = Q \times P$ (ou seja, para cada $q_i \in Q$ e $p_j \in P$, temos um estado $(q_i, p_j) \in A$)
- $a_0 = (q_0, p_0)$
- $F_A = \{$"conjunto de todos os elementos (q_i, p_j) tal que $q_i \in F_Q$ e $p_j \in F_P$"$\}$.
- Definição de δ_A: Para todo $q_i, q_j \in Q$ e todo $p_r, p_t \in P$ e todo símbolo $s \in \Sigma$ temos que: Se $\delta_Q(q_i, s) = q_j$ e $\delta_P(p_r, s) = p_t$, então $\delta_A((q_i, p_r), s) = (q_j, p_t)$.

Sendo $L_Q = L(D_Q)$ e $L_P = L(D_P)$, responda: Qual é a linguagem aceita por D_A? ■

3.2 Autômatos Finitos não Determinísticos (AFNs)

A computação com AFDs é completamente determinística, ou seja, para cada par (q, a), sendo q um estado e a um símbolo, temos exatamente uma transição definida no ponto (q, a). E se quiséssemos definir um modelo abstrato de autômato que em certos momentos possa escolher uma entre várias transições possíveis de maneira não determinística? E se este autômato tivesse uma habilidade "mágica" de advinhar qual é a transição correta a ser executada no momento? Um exemplo de um diagrama de um autômato com as propriedades que queremos é o seguinte:

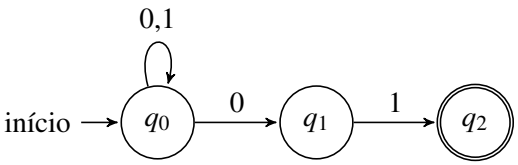


Figure 3.2: Um autômato finito não determinístico.

Imediatamente notamos uma diferença no autômato da Figura 3.2 em relação aos autômatos da seção anterior. Neste exemplo, se o autômato estiver no estado q_0 e o símbolo lido for 0, existem duas possibilidades: (1) o autômato pode continuar no estado q_0; (2) o autômato pode mudar para o estado q_1. A pergunta chave é a seguinte: dado um autômato com estas características, quais são as strings que o autômato aceita?

Para responder esta pergunta, vamos agora ser mais precisos sobre o que queremos dizer com "o autômato advinha" qual transição fazer. A ideia é que, dada uma string w, se existe uma sequência de passos que leve o autômato a atingir um estado final ao finalizar o processamento de w, então o autômato irá escolher, a cada momento, uma transição que leve a computação em um caminho correto. Em tais casos, dizemos que string pertence a linguagem do autômato.

Mesmo com esta habilidade nova, pode ocorrer que não exista nenhuma sequência de transições

que leve o autômato a aceitar certas strings. Por exemplo, o autômato da Figura 3.2 não "consegue" aceitar a string 100. Neste caso diremos que tais strings não estão na linguagem do autômato.

Se prestarmos atenção no autômato da Figura 3.2, veremos que ele tem a habilidade de aceitar exatamente as strings terminadas em 01. Dada uma string da forma $x01$, tal que x é uma substring qualquer, o autômato pode processar toda a substring x usando o "laço" sobre o estado q_0. Quando faltarem apenas os dois símbolos finais, o autômato utiliza a transição que vai ao estado q_1 e depois a transição que vai ao estado q_2. Observe que se a string não é terminada em 01, o autômato não conseque atingir o estado final em hipótese alguma.

Observe que a habilidade do autômato poder escolher entre duas transições possíveis não é a única diferença que este novo modelo tem em relação aos autômatos determinísticos da seção anteriror. Uma outra situação que pode ocorrer neste modelo e que não ocorria no caso determinístico é aquela em que o autômato não tenha nenhuma transição definida para um determinado par (estado, símbolo). Por exemplo, se o autômato da Figura 3.2 estiver no estado q_1 e próximo símbolo a ser lido for 0, o autômato não terá nenhuma opção de transição para realizar. Em tal caso, diremos que o autômato *morre*.

> NÃO DETERMINISMO?
>
> Claramente, do ponto de vista prático, um autômato não determinístico não parece ser um modelo realista de computação correspondendo a algo concreto do mundo real. Ainda assim, o estudo deste modelo matemático será bastante útil.
>
> Em teoria da computação este tipo de situação é bastante comum. O ponto chave é que estes modelos "não realistas" podem ser pensados, em última análise, como *ferramentas matemáticas úteis*, inclusive úteis para nos ajudar a entender modelos "realistas" de computação. No Capítulo 8, veremos que Máquinas de Turing não derminísticas podem ser usadas para definir um conjunto de linguagens conhecido como *NP*, que é parte da famoso (e concreto) problema *P vs NP*. Em um curso mais aprofundado de complexidade computacional a definição de modelos "irreais" de computação, mas que ainda assim sejam matematicamente úteis para lidar com problemas ou modelos concretos de computação, acontece com muita frequência.

3.2.1 Definição formal para autômatos finitos não determiníticos

Autômatos finitos não determinísticos tem uma definição formal muito parecida com a definição dos AFDs. A única diferença é que dado um par (q,a), sendo q um elemento do conjunto Q de estados do autômato e a um símbolo, pode ser que exista zero, um, ou mais estados possíveis de serem atingidos por uma transição com rótulo a. Mais precisamente, a função de transição tem a forma $\delta(q,a) = S$, sendo que S é um conjunto qualquer de estados. Por exemplo, a função δ do autômato da Figura 3.2, quando aplicada a $(q_0,0)$, deve ter a forma $\delta(q_0,0) = \{q_0,q_1\}$. Note que, como os elementos da imagem de δ são conjuntos, o contradomínio da função δ é conjunto de todos os subconjuntos de Q, ou seja, o conjunto potência $\mathscr{P}(Q)$.

Definição 3.2.1 — Autômato Finito não Determinístico (AFN). Um Autômato Finito não Determinístico, também chamado de AFN, é uma 5-tupla $A = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, tal que:

Q é o conjunto de *estados*;

Σ é o conjunto de *símbolos de entrada*;

δ é a *função de transição* $\delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$;

$q_0 \in Q$ é o *estado inicial*;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de *estados finais*.

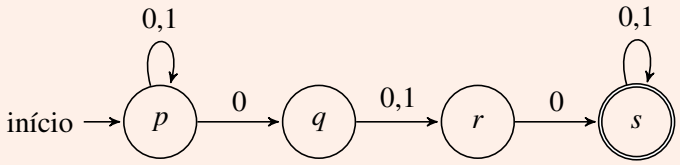
■ **Exemplo 3.2** A definição formal para o diagrama da Figura 3.2 é o AFN $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tal que $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ e a função δ é definida abaixo:

$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
$\delta(q_0, 1) = \{q_0\}$
$\delta(q_1, 1) = \{q_2\}$
$\delta(q_1, 0) = \delta(q_2, 0) = \delta(q_2, 1) = \emptyset$ ■

Exercício resolvido 3.1 Desenhe o diagrama do AFN definido pela seguinte tabela de transições:

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\varnothing$
$*s$	$\{s\}$	$\{s\}$

Solução:



■

Uma maneira bastate útil para se descrever os ramos possíveis de computação de um AFN A com uma string w é a utilização de uma ávore, chamada de *árvore de computações possíveis de A com w*. Antes de definir este conceito, vamos apresentar a definição um pouco mais geral.

Definição 3.2.2 — (A,q,w)-árvores. Seja (A, q, w) uma tripla tal que A é um AFN, q um é estado de A e w um string do alfabeto de A. Uma (A, q, w)-*árvore* é uma árvore enraizada em q definida da seguinte maneira:

Base: $w = \varepsilon$

A árvore contém apenas o nó raíz q

Indução: $w \neq \varepsilon$

Suponha que w é uma string da forma ax, sendo que $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$ e seja δ a função de transição do AFN. Se $\delta(q, a) = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$, então então a árvore contém o nó q e, além disso, q possui os filhos $p_1, p_2, ..., p_k$ que são raízes de uma (A, p_i, x)-árvore.

Definição 3.2.3 — Árvore de computações possíveis. Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN, $w \in \Sigma^*$. Uma *árvore de computações possíveis de A com w* é uma (A, q_0, w)-árvore.

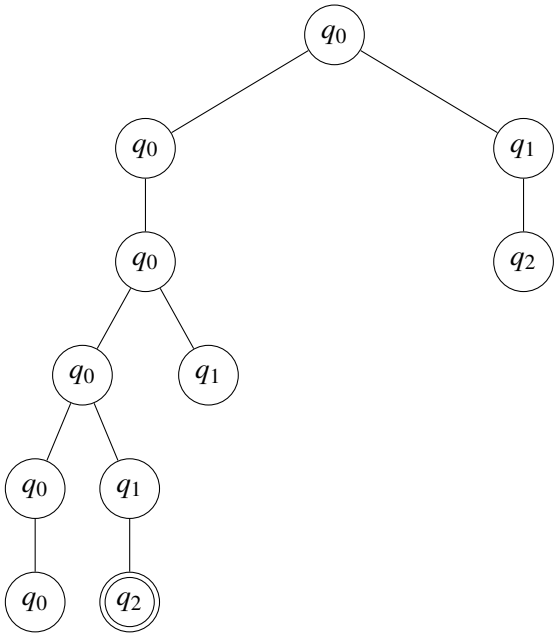


Figure 3.3: A árvore de computações possíveis do AFN N da Figura 3.2 com a string 01001.

Observe que o *nível 0* da árvore (i.e., a raiz) é o estado inicial do AFN e o nível i contém todos os estados que o AFN pode estar depois de i transições do autômato ao processar os i primeiros símbolos da string de entrada. Em particular, dada uma string de tamanho n, o AFN aceita a string se e somente se o n-ésimo nível da árvore contém pelo menos um estado final. No exemplo da Figura 3.3 o nível 5 da árvore contém o estado q_2. O fato de que neste nível existe apenas um nó que é um estado final significa que o AFN tem exatamente uma computação possível que aceita a string 01001. A computação é definida pela sequência de estados do caminho ligando a raíz ao estado final em questão.

Exercício 3.11 (Resolvido) Apresente uma definição formal para um AFN cujo diagrama seja idêntico ao diagrama do AFD obtido na solução do Exercício 3.1.

Solução: Relembramos que o AFD do Exercício 3.1 é definido pela seguinte tabela:

	0	1
$\rightarrow p$	q	p
q	q	r
$*r$	r	r

Para obtermos um AFN cujo diagrama seja idêntido ao diagrama do AFD definido pela tabela acima, basta fazer o seguinte: se no AFD a função de transição é $\delta(x,y) = z$, defina o AFN de maneira que sua função de transição seja $\delta(x,y) = \{z\}$. A definição formal do AFN é dada pela seguinte tabela:

	0	1
$\rightarrow p$	$\{q\}$	$\{p\}$
q	$\{q\}$	$\{r\}$
$*r$	$\{r\}$	$\{r\}$

■

A Figura 3.4 mostra o diagrama do AFN do Exercício 3.11. Note que apenas olhando o diagrama, não é possível dizer se trata-se de um autômato é determinístico ou não determinístico[3].

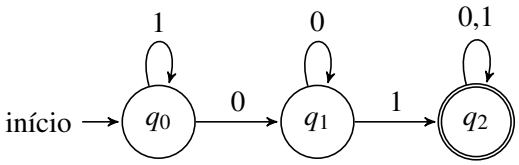


Figure 3.4: Um caso particular em que um AFN que se comporta de maneira determinística.

Exercício 3.12 Desenhe a árvore de computações possíveis para o AFN do Exercício 3.11 com a string de entrada 111010. ■

3.2.2 Aceitação e rejeição de strings por AFNs

A definição da função de transição estendida de um AFN é um pouco mais complicada que a definição que vimos no caso dos AFDs. A ideia básica é a seguinte: dado um estado q e uma string x, queremos saber qual é o conjunto de estados que o autômato pode estar após o processamento da string x se a computação começou no estado q.

Definição 3.2.4 Dado um AFN $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, definimos $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$:

Base: $w = \varepsilon$.
$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$

Indução: $|w| > 0$.
Seja $w \in \Sigma^*$ da forma xa, onde $x \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$. Suponha $\hat{\delta}(q,x) = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Então
$\hat{\delta}(q,w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$

Exercício 3.13 Calcule $\hat{\delta}(q_0, 00101)$ do AFN do Exemplo 3.2. ■

Definição 3.2.5 — Linguagem de um AFN. Se $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ é um AFN, então $L(N) = \{w \ : \ \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$ é a linguagem de N.

Se L é a linguagem de um AFN N, dizemos que N *decide* a linguagem L. Dizemos também que N *aceita* a linguagem L.

Exercício resolvido 3.2 Seja $D{=}(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD. Apresente um AFN N, tal que $L(D){=}L(N)$.

Solução: A ideia é generalizar o que fizemos no Exercício Resolvido 3.11. O AFN N que aceita a mesma linguagem de D é o seguinte: $N = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$, tal que a função δ' é definida da seguinte for: se $\delta(x,y) = z$, então defina $\delta'(x,y) = \{z\}$. ■

[3] Este é um exemplo em que um desenho pode ser ambíguo e, não a toa, normalmente não consideramos desenhos como objetos matemáticos formais. Por outro lado, note que na solução do Exercício 3.11 a definição formal do AFN não há ambiguidade, pois fica claro que trata-se de um autômato não determinístico (a imagem da função de transição contém conjuntos de estados ao invés de estados). Ainda assim, é comum e prático usar diagramas para representar autômatos.

3.2.3 Exercícios

Exercício 3.14 Suponha que queiramos mudar a definição de AFNs para que a *função de transição* tenha a seguinte forma: $\delta : Q \times \Sigma \to (\mathscr{P}(Q) \setminus \varnothing)$. Observe que autômatos segundo esta nova definição nunca morrem. Prove que dado um AFN N, podemos construir um AFN N' segundo nossa nova definição que aceita a mesma linguagem de N. ∎

Exercício 3.15 Considere o caso particular de AFNs que são determinísticos (i.e., AFNs que podem ser obtidos de AFDs, como o AFN do Exercício 3.2). Qual é o formato de sua árvore de computações possíveis? ∎

3.3 Equivalência entre AFDs e AFNs

Algo que vamos lidar com frequência neste curso é a diferença de expressividade entre diferentes modelos de computação. Veremos no Capítulo 4 que existem algoritmos que, embora não possam ser expressos na forma de um AFD, podem ser expressos em outros modelos matemáticos que generalizam AFDs. Em tais casos normalmente dizemos que estes outros modelos são mais poderosos (ou mais expressivos) que o modelo de AFD.

> EXPRESSIVIDADE DE MODELOS DE COMPUTAÇÃO
>
> A ideia de expressividade de um modelo de computação é central em Teoria da Computação. Embora AFDs sejam capazes de realizar tarefas interessantes, como testar se um dado número é divisível por um inteiro positivo k qualquer (desde que k seja fixado *a priori*), veremos no Capítulo 4 que AFDs não são capazes de "testar primalidade" de números. De maneira formal, provaremos que não existe um AFD D tal que $L(D) = L_P$ (lembrando que é a linguagem dos primos em binário, do Exemplo 2.10). Como sabemos que podemos escrever algoritmos (expressando eles em linguagem C, por exemplo) para testar primalidade de números, concluímos que o formalismo de AFD não é o formalismo mais geral possível para expressar algoritmos.
>
> A limitação de AFDs, neste momento do curso, não é o mais importante aqui. O que queremos observar aqui é que sempre que apresentamos um novo modelo de computação, como o modelo de AFNs, algo que sempre nos preocuparemos é como tal modelo se compara com outros modelos de computação já conhecidos, com AFDs.

No *Exercício Resolvido* 3.2 o objetivo foi mostrar que qualquer linguagem que um AFD reconheça, também pode ser reconhecida por um AFN. Isso significa que AFNs são pelo menos tão poderosos como AFDs. Isso é natural, pois AFNs são generalizações de AFDs. A pergunta óbvia que devemos fazer é: AFNs são *estritamente* mais poderosos que AFDs? Veremos nesta seção que a resposta é **não**. Ou seja, podemos mostrar que se uma linguagem pode ser aceita por um AFN, então existe algum AFD que aceita a mesma linguagem. Isso pode parecer um pouco surpreendente, pois AFNs, em algumas situações, tem a capacidade de advinhar qual transição deve fazer, uma capacidade que AFDs não tem.

3.3.1 Algoritmo de construção de conjuntos

O Algoritmo 1 apresentado a seguir recebe um AFN $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ como entrada e retorna um AFD $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ como saída tal que $L(N) = L(D)$. A ideia central é construir um AFD D que possa "simular" N usando a seguinte ideia: No momento em que o AFN N vai processar o i-ésimo símbolo da string de entrada $w = w_1 \ldots w_i \ldots w_n$, os possíveis estados que N

pode estar em tal instante são dados pelos nós do i-ésimo nível da árvore de computações possíveis de N com w. Seja P_i o conjunto dos estados do i-ésimo nível desta árvore e P_{i+1} o conjunto de nós do $(i+1)$-ésimo nível desta mesma árvore. O AFD D contruído pelo algoritmo, terá uma transição de um estado chamado P_i para outro chamado P_{i+1} (tais estados correspondem aos conjuntos de estados P_i e P_{i+1} da árvore de computações possíveis mencionados anteriormente), e esta transição terá o rótulo w_i. Em outras palavras, $\delta_D(P_i, w_i) = P_{i+1}$. O que o algoritmo faz é usar força bruta e aplicar a função δ_N em todas as combinações possíveis de pares (P_i, a), tal que $P_i \subseteq Q$, $a \in \Sigma$ para que possa determinar P_{i+1}.

Algorithm 1 Construindo um AFD a partir de um AFN.

AFN_AFD $(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$

1: $Q_D = \mathscr{P}(Q_N)$
2: **for all** $S \subseteq Q_D$ **do**
3: **for all** $a \in \Sigma$ **do**
4: Defina a função δ_D no par (S,a) da seguinte maneira: $\delta_D(S,a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p,a)$
5: $F_D = \{S \in \mathscr{P}(Q_N) : S \cap F_N \neq \varnothing\}$
6: $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$
7: **Return** D

Vamos aplicar o algoritmo no autômato da Figura 3.2, cuja tabela de transições é a seguinte.

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

Ao aplicarmos o Algoritmo 1 no AFN da tabela anterior, obtemos como saída o AFD definido pela seguinte tabela de transições:

	0	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$^*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$^*\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Observe que os estados do AFD obtido são conjuntos. Isso não é um problema, pois os estados de um AFD podem ser qualquer coisa, desde que os elementos da imagem da função δ sejam do mesmo tipo que os estados do AFD (note que neste caso os próprios estados são conjuntos). O que não devemos fazer é confundir com o caso dos AFNs em que os elementos da imagem da função δ são de natureza diferente dos estados.

3.3.2 Algoritmo de construção de conjuntos: versão melhorada

Alguns alunos mais observadores devem ter notado que não precisamos de todos os estados do AFD resultante. Precisamos apenas dos estados *alcançáveis* a partir do estado inicial $\{q_0\}$. Olhando a tabela, notamos que na linha do estado inicial $\{q_0\}$, atingimos o estado $\{q_0,q_1\}$ e o próprio estado $\{q_0\}$, dependendo do símbolo lido. Ao olharmos a tabela, na linha do estado $\{q_0,q_1\}$, vemos que atingimos o estado $\{q_0,q_2\}$ se o símbolo lido for 1. Se o autômato estiver no estado $\{q_0,q_2\}$, independente do símbolo lido, os únicos estados alcançáveis são estados que já mencionamos (i.e., $\{q_0\}$, $\{q_0,q_1\}$ e $\{q_0,q_2\}$). Portanto, como a computação sempre começa no estado $\{q_0\}$, os únicos três estados atingíveis para qualquer string de entrada são $\{q_1\}$, $\{q_0,q_1\}$ e $\{q_0,q_2\}$. Com isso, podemos eliminar os estados desnecessários e simplificar a tabela da seguinte maneira:

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$^*\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$

Não vamos nos preocupar tanto com formalismo neste ponto, mas se quiséssemos fornecer uma definição formal para o coneceito de estado alcançável poderíamos usar a ideia de um vértice alcançável por uma busca em largura em um grafo direcionado. Pense no AFD obtido pela saída do Algoritmo 1 como um grafo direcionado em que os vértices são os estados e as arestas direcionadas do grafo ligam o vértice p ao vértice q caso ocorra que para algum símbolo a, $\delta(p,a) = q$. Com isso, os *estados alcançáveis* são os vértices alcançáveis por algum caminho direcionado a partir do vértice correspondente ao estado inicial.

Convenção: A partir de agora, sempre que formos construir um AFD equivalente a um dado AFN, vamos construir o AFD passo a passo, mantendo apenas os estados alcançáveis.

Teorema 3.3.1 Se o AFD $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ é obtido pelo Algoritmo 1 a partir de um AFN $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$, então $L(N) = L(D)$.

Exercício 3.16 Prove o Teorema 3.3.1
(Dica: prove por indução que $\forall w \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}_D(q_0,w) \in F_N \Leftrightarrow \hat{\delta}_N(\{q_0\},w) \cap F_N)$ ■

O próximo teorema enuncia a equivalência entre AFDs e AFNs.

Teorema 3.3.2 Uma linguagem L é aceita por um AFD se e somente se L é aceita por um AFN.

Prova: Consequência do Teorema 3.3.1 e do *Exercício Resolvido* 3.2.

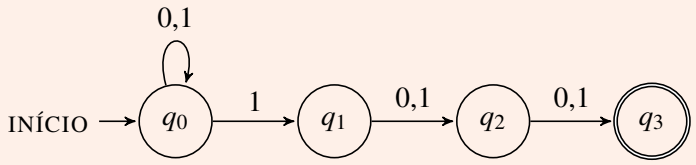
3.3.3 Exercícios

Exercício 3.17 Considere o o AFN dado pela tabela abaixo:

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p,q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\varnothing$
$*s$	$\{s\}$	$\{s\}$

Apresente um AFD que aceite a mesma linguagem do AFN acima. ■

Exercício 3.18 Qual a linguagem aceita pelo AFN abaixo?



■

Exercício 3.19 Forneça um AFD equivalente ao AFN do Exercício 3.18. ■

3.4 Autômatos Finitos não Determinísticos com transições ε

Vamos considerar agora um diagrama de um AFN que contém algumas transições com o rótulo ε. Estas transições são chamadas de *transições* ε e um autômato que tenha tais transições será chamado de ε-AFN.

A ideia é tentar incrementar ainda mais o poder do nosso modelo de computação. A nova habilidade que vamos incluir em nosso autômato é a possibilidade de arbitrariamente fazer certas mudanças de estado sem que nenhum símbolo seja consumido. Para apresentar este conceito vamos usar um exemplo do livro de Hopcroft, Motwani e Ullman [HMU06]. A ideia é construir um ε-AFN que aceita strings que representam números decimais que estejam na forma descrita a seguir:

(1) O número pode ter sinal "+" ou "−", mas este sinal é opcional;
(2) Em seguida, há um string de dígitos (os dígitos da parte inteira do número), que também é opcional;
(3) Após esta sequência de dígitos há um ponto decimal "." obrigatório;
(4) Opcionalmente, há outra string de dígitos (os dígitos da parte decimal do número);
(5) Faz-se a restrição extra de que pelo menos uma das strings de dígitos de (2) e (4) é não seja vazia.

Observe que o alfabeto do autômato é $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\cdot,+,-\}$. Alguns exemplos de strings aceitas são 5.72, +5.72, -12., -1. e -.5 enquanto alguns exemplos de strings não aceitam são +-5.72, -12, 8.0- e ..56. O autômato é o seguinte:

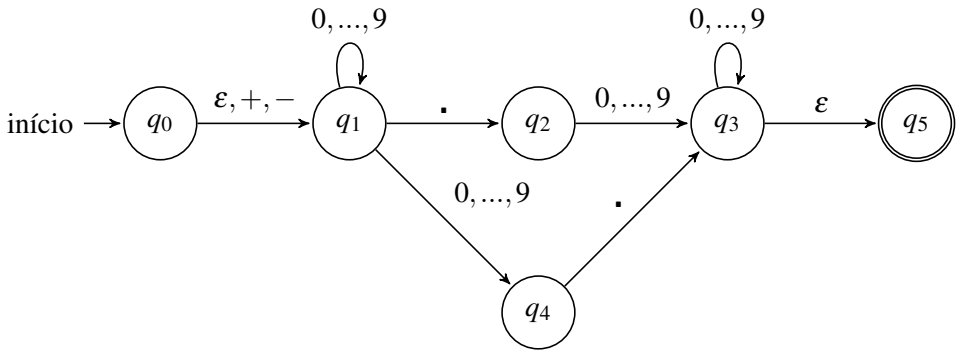


Figure 3.5: Um ε-AFN que aceita números decimais.

A definição formal para ε-AFNs é bastante semelhante a definição dos AFNs:

Definição 3.4.1 — ε-AFN. Um ε-AFN é uma 5-tupla $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que cada um dos componentes tem a mesma interpretação que um AFN, exceto pelo fato que δ é uma função do tipo $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathscr{P}(Q)$, sendo que $\varepsilon \notin \Sigma$.

■ **Exemplo 3.3** O ε-AFN do exemplo anterior é $E = (\{q_0, ..., q_5\}, \{., +, -, 0, ..., 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$ tal que a tabela de transições de δ é a seguinte:

	ε	*sinal*	·	dígito
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\varnothing$
$^*q_5$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

■

Observe que no Exemplo 3.3, se quiséssemos ser rigorosos, a tabela de transições teria que ter 14 colunas: exatamente 13 colunas para o alfabeto do autômato (uma coluna para cada um dos 10 dígitos, duas colunas para os sinais e uma para o ponto) além de uma coluna extra para ε). Entretanto, para simplificar, agrupamos todos os dígitos em apenas uma coluna e os dois possíveis sinais em uma outra coluna, pois transições para cada elemento destes grupos são as mesmas.

O nosso próximo passo agora é definir o conceito de função de transição estendida. Para que possamos apresentar tal definição, vamos antes definir o que é o ε-*Fecho* de um estado. A ideia é que o fecho de um estado q é o conjunto de todos os possíveis estados que podem ser atingidos a partir de q (incluindo o próprio q) utilizando-se uma quantidade arbitrária de trasições ε.

Definição 3.4.2 — ε-Fecho de estados. Seja um ε-AFN com conjunto de estados Q e seja $q \in Q$. Vamos definir o conjunto ε-Fecho(q) de maneira indutiva:

Base: $q \in \varepsilon$-Fecho(q)

Indução: se $p \in \varepsilon$-Fecho(q) e $r \in \delta(p, \varepsilon)$, então $r \in \varepsilon$-Fecho(q).

Agora que temos a Definição 3.4.2 em mãos, podemos definir o conceito de função de transição estendida de um ε-AFN. A ideia é parecida com a definição de função de transição estendida de

um AFN, com o cuidado extra de adicionar os estados que podem ser atingidos por trasições ε.

Definição 3.4.3 — Função de transição estendida em ε-AFNs. Dado um ε-AFN $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, definimos $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$ indutivamente:

Base: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon\text{-Fecho}(q)$

Indução: Seja $w \in \Sigma^*$ da forma xa, onde $x \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$. Suponha $\hat{\delta}(q,x) = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$.

Suponha $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$

Então

- $\hat{\delta}(q,w) = \bigcup_{j=1}^{m} \varepsilon\text{-Fecho}(r_j)$

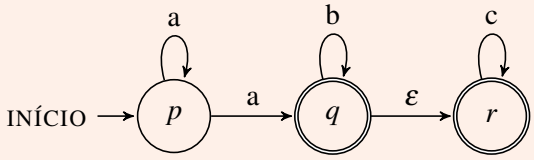
O próximo passo é definir o que é a linguagem de um ε-AFN.

Definição 3.4.4 — Linguagem de ε-AFNs. Seja $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um ε-AFN. Definimos $L(E) = \{w \ : \ \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$ como sendo a linguagem de E.

Dada uma linguagem L, se existe um ε-AFN tal que $L = L(E)$, então dizemos que E aceita L.

Exercício resolvido 3.3 Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$. Apresente um ε-AFN para a linguagem das strings sobre Σ que têm a forma $a^n b^m c^l$, tal que $n > 0$, $m \geq 0$, $l \geq 0$.

Solução:



■

3.5 Equivalência entre AFDs e ε-AFNs

Nesta seção vamos construir um AFD D a partir de um ε-AFN $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$. A ideia aqui é praticamente a mesma da que vimos na seção 3.3. A única diferença é que temos que tomar cuidado com as transições ε.

Convenção: De maneira semelhante ao Algoritmo 1, a partir de agora sempre que formos construir um AFD equivalente a um dado ε-AFN, vamos construir o AFD passo a passo, mantendo apenas os estados alcançáveis.

Teorema 3.5.1 Se o AFD $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ é obtido pelo Algoritmo 2 quando toma como entrada o ε-AFN $E = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$, então $L(D) = L(N)$.

Teorema 3.5.2 Uma linguagem é aceita por um AFD se e somente se é aceita por um ε-AFN.

Vamos construir um AFD equivalente ao ε-AFN da Figura 3.5 usando o Algoritmo 2. A tabela

Algorithm 2 Construindo um AFD a partir de um ε-AFN

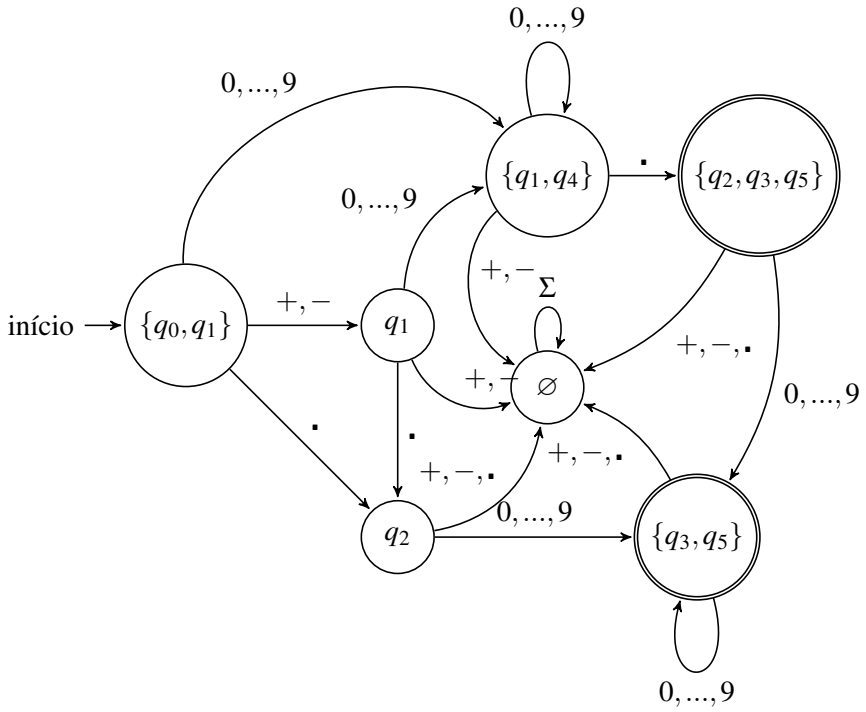
AFN_AFD $(Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$

1: $Q_D = \mathscr{P}(Q_E)$
2: $q_0 = \varepsilon$-Fecho(q_0)
3: **for all** $S \subseteq Q_N$ **do**
4: **for all** $a \in \Sigma$ **do**
5: $R = \bigcup_{q_i \in S} \delta_E(q_i, a)$
6: Defina a função δ da seguinte maneira: $\delta_D(S,a) = \bigcup_{r_j \in R} \varepsilon$-Fecho$(r_j)$
7: $F_D = \{S \in Q_D \ : \ S \cap F_E \neq \varnothing\}$
8: Elimine os estados não alcançáveis
9: **Return** $(Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

do AFD que o algoritmo retorna é o seguinte:

	$+,-$	$0,...,9$	.
$\to \{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_1,q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1,q_4\}$	$\varnothing$	$\{q_1,q_4\}$	$\{q_2,q_3,q_5\}$
$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_3,q_5\}$	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$*\{q_2,q_3,q_5\}$	$\varnothing$	$\{q_3,q_5\}$	$\varnothing$
$*\{q_3,q_5\}$	$\varnothing$	$\{q_3,q_5\}$	$\varnothing$

O diagrama do AFD obtido pelo Algoritmo 2 é o seguinte:



3.5.1 Exercícios

Exercício 3.20 Considere o ε-AFN dado pela tabela abaixo:

	ε	a	b	c
$\to p$	$\varnothing$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varnothing$
$*r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varnothing$	$\{p\}$

(a) Desenhe o diagrama do ε-AFN
(b) Calcule o ε-fecho de cada estado.
(c) Forneça todas strings w tal que $|w| \leq 2$ aceitas pelo autômato.
(d) Converta o ε-AFN em um AFD.

■

Exercício 3.21 Repita a questão 1 para o ε-AFN dado pela tabela abaixo:

	ε	a	b	c
$\to p$	$\{q,r\}$	$\varnothing$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\varnothing$	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{p,q\}$
$*r$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

■

Exercício 3.22 Apresente um AFD que decida a mesma linguagem do ε-AFN do Exercício Resolvido 3.3 ■

3.6 Expressões Regulares (ERs)

Uma *Expressão Regular* é uma expressão matemática que representa uma linguagem. O nosso objetivo agora é definir indutivamente quais expressões matemáticas são consideradas expressões regulares válidas. Algo bastante importante em nossa definição é que no mesmo momento tivermos estabelecido que uma certa expressão regular R é válida, também vamos estabelecer exatamente qual linguagem $L(R)$ corresponde a tal expressão.

Definição 3.6.1 — Expressões Regulares (ER).
Seja Σ um alfabeto qualquer. Uma expressão matemática consistindo de símbolos de Σ, parêntesis e '$+$' e '$*$' é uma expressão regular se tem forma descrita recursivamente a seguir:

Base:
(1) As expressões $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\varnothing}$ são expressões regulares que correspondem, respectivamente, às linguagens $L(\underline{\varepsilon}) = \{\varepsilon\}$ e $L(\underline{\varnothing}) = \varnothing$.
(2) Para todo símbolo a de Σ, a expressão $\underline{a}$ é uma expressão regular correspondente a linguagem $L(\underline{a}) = \{a\}$.

Passo indutivo:
(1) Se E e F são expressões regulares, então $E+F$ é uma expressão regular representando a união de $L(E)$ e $L(F)$. Isto é, $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$.
(2) Se E e F são expressões regulares, então EF é uma expressão regular denotando a concatenação de $L(E)$ e $L(F)$. Isto é, $L(EF) = L(E)L(F)$.
(3) Se E é uma expressão regular, então E^* é uma expressão regular que representa o fechamento de $L(E)$. Isto é, $L(E^*) = (L(E))^*$.
(4) Se E é uma expressão regular, então (E) também é uma expressão regular, representando a mesma linguagem que E representa. Isto é, $L((E)) = L(E)$.

Terminologia 3.1. *As expressões regulares definidas na base da definição são chamadas de expressões regulares elementares. As expressões regulares definidas no passo indutivo são chamadas de expressões regulares compostas.*

Exercício resolvido 3.4 A expressão regular para a linguagem L das "strings contendo 0's e 1's alternados" é $\underline{(01)^* + (10)^* + 0(10)^* + 1(01)^*}$. Justifique isto passo a passo.

Solução: Vamos ser bastante cuidadosos e resolver passo a passo.

Passo 1: Segundo a Base da Definição 3.6.1 (item 2), se $0 \in \Sigma$, então $\underline{0}$ é uma expressão regular válida. Ainda segundo esta definição, a expressão $\underline{0}$ representa a linguagem $\{0\}$.

Passo 2: Usando o mesmo argumento do Passo 1, concluímos que $\underline{1}$ é uma expressão regular válida que representa a linguagem $\{1\}$.

Passo 3: Até este ponto já sabemos que $\underline{0}$ e $\underline{1}$ são expressões regulares válidas que representam as linguagens $\{0\}$ e $\{1\}$, respectivamente. Segundo a Definição 3.6.1 (Indução, item 2), concluímos que $\underline{01}$ também é uma expressão válida. A linguagem que esta expressão representa é $L(\underline{01}) = \{0\} \cdot \{1\} = \{01\}$.

Passo 4: A partir da expressão obtida no passo Passo 3, podemos aplicar a Definição 3.6.1 (Indução, item 3) e concluir que $\underline{(01)^*}$ é uma expressão válida, e $L(\underline{(01)^*}) = \{\varepsilon, 01, 0101, 010101, ...\}$.

Passo 5: Usando argumentos semelhantes aos anteriores, concluímos que $\underline{(10)^*}$ também é uma expressão válida, e $L(\underline{(10)^*}) = \{\varepsilon, 10, 1010, 101010, ...\}$.

Passo 6: Pelos Passos 4 e 5, $(01)^*$ e $(10)^*$ são expressões válidas que representam as linguagens $\{\varepsilon, 01, 0101, 010101, ...\}$ e $\{\varepsilon, 10, 1010, 101010, ...\}$, respectivamente. Pela Definição 3.6.1 (Indução, item 1), $(01)^* + (10)^*$ é uma expressão válida e $L((01)^* + (10)^*) = \{\varepsilon, 01, 0101, 010101, ...\} \cup \{\varepsilon, 10, 1010, 101010, ...\} = \{\varepsilon, 01, 10, 0101, 1010, 010101, 1010101, ...\}$.

Passo 7: Podemos concluir que $0(10)^*$ é uma expressão regular a partir do fato que 0 e $(10)^*$ são expressões válidas (concluímos isso nos Passos 1 e 5) e a linguagem que expressão representa é $\{0, 010, 01010, 0101010, ...\}$. Usando argumentos semelhantes, podemos concluir que $1(01)^*$ é uma expressão regular válida e $L(1(01)^*) = \{1, 101, 10101, 1010101, ...\}$. Com isso, podemos aplicar a Definição 3.6.1 (Indução, item 1) nas expressões $0(10)^*$ e $1(01)^*$ para concluir que $0(10)^* + 1(01)^*$ é uma expressão regular válida representando a linguagem $\{0, 010, 01010, 0101010, ...\} \cup \{1, 101, 10101, 1010101, ...\}$.

Passo 8: Aplicando a Definição 3.6.1 (Indução, item 1) nas expressões obtidas no Passo 6 e 7, concluímos que $E = (01)^* + (10)^* + 0(10)^* + 1(01)^*$ é uma expressão regular válida e $L(E) = \{\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 010, 101, 0101, 1010, 010101, ...\}$. ■

Assim como ocorre em expressões aritméticas, operadores em expressões regulares obedecem regras de precedência. As regras são as seguintes:

- O operador * tem precedência mais alta e, portanto, deve ser o primeiro a ser aplicado. Com isso, por exemplo, a expressão 01^* é equivalente a $0(1)^*$;
- O operador com segunda maior precedência é o operador de concatenação. Com isso, por exemplo, a expressão $a + bc$ é equivalente a $a + (bc)$;
- O operador de menor precedência é o operador $+$;
- Como de custume, usamos parentesis para alterar a precedência de operadores.

Exercício 3.23 Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$. Apresente a expressão regular para a linguagem das strings sobre Σ que começam e terminam com a e têm pelo menos um b. ■

Exercício 3.24 Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Apresente a expressão regular para a linguagem das strings sobre Σ que tem tamanho ímpar. ■

Algo importante a ser mencionado é que, embora seja verdade que dada uma expressão regular, existe exatamente uma linguagem que corresponde a tal expressão, o oposto não é verdade. Isto é, dada uma linguagem L, não é verdade que existe exatamente uma expressão regular para L. De fato, dada uma linguagem L pode existir mais de uma expressão regular R tal que $L(R) = L$ (ou mesmo pode não existir nenhuma expressão regular para L). A exata relação entre expressões regulares e linguagens é estabelecida pelo seguinte teorema, que é central em teoria de linguagens regulares:

Teorema 3.6.1 Uma linguagem L é regular se e somente se existe uma expressão regular R tal que $L = L(R)$.

Para demonstrar o Teorema 3.6.1, precisamos demonstrar que as afirmações (1) e (2) abaixo são verdadeiras:

(1) Se L é uma linguagem regular, então existe uma expressão regular R tal que $L = L(R)$.
(2) Se R é uma expressão regular qualquer, então $L(R)$ é uma linguagem regular.

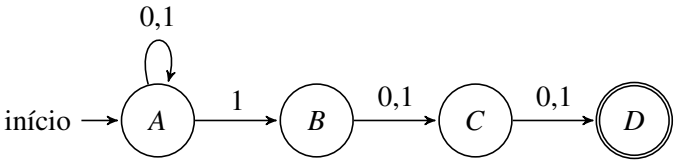
Apresentamos as provas das Afirmações (1) e (2) nas Seções 3.6.1 e 3.6.2, repectivamente.

3.6.1 Expressões regulares para linguagens de autômatos

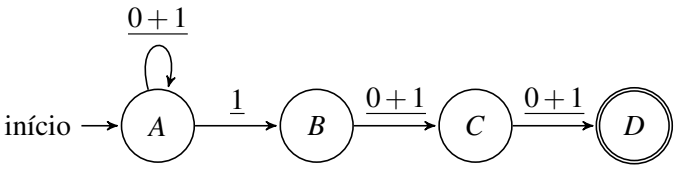
Nesta seção vamos demonstrar a seguinte afirmação: *se L é uma linguagem regular, então existe uma expressão regular R tal que $L = L(R)$*. Por definição, uma linguagem regular é uma linguagem aceita por um AFD. Entretanto, já vimos que AFDs e ε-AFNs aceitam exatamente o mesmo conjunto de linguagens (ver Teorema 3.5.2) e, portanto, para demonstrarmos a afirmação acima, basta que provemos o seguinte teorema:

Teorema 3.6.2 Seja $L(E)$ a linguagem de um $\varepsilon-$AFN E qualquer. Então existe uma expressão regular R tal que $L(R) = L(E)$.

Para provar o teorema acima, o que faremos é apresentar um algoritmo que, dado como entrada um $\varepsilon-$AFN E qualquer é capaz de produzir como saída uma expressão regular R tal que $L(R) = L(E)$. Para que possamos entender como funciona tal algoritmo, vamos, incialmente, considerar um caso simples. Seja E o autômato não determinístico abaixo:

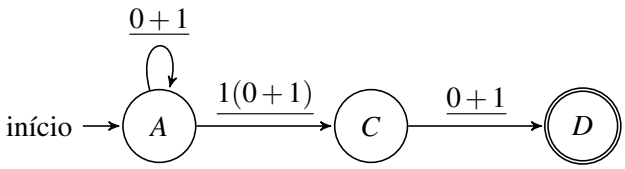


A partir de E, vamos apresentar um *autômato generalizado* E_0. Um autômato generalizado é uma variação dos autômatos que já conhecemos, mas que tem expressões regulares ao invés símbolos em suas transições. O autômato generalizado E_0 é apresentado abaixo:



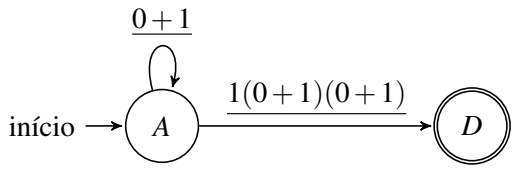
Observe que agora temos expressões regulares como rótulos das transições. Por exemplo, observe o conjunto de símbolos $\{0,1\}$ que figuravam como rótulo da transição do estado C para o estado D foram trocados pela expressão regular $\underline{0+1}$. Note, em particular, que $L(\underline{0+1}) = \{0,1\}$.

A ideia chave agora é produzir sequência de autômatos generalizados $E_0, E_1, E_2, ...$ de forma que todos sejam equivalentes, mas que tenham cada vez menos estados. Por exemplo, considere o autômato generalizado E_1 abaixo:



Observe que obtemos E_1 a partir de E_0 da seguinte forma: removemos o estado B e todas as transições que envolviam este estado (ou seja, $A \to B$ e $B \to C$) e incluímos a transição $A \to C$ com uma nova expressão como rótulo: $\underline{1(0+1)}$. A ideia é que a expressão $\underline{1(0+1)}$ é a concatenação das expressões $\underline{1}$ e $\underline{(0+1)}$. A ideia fundamental é que o conjunto de strings que faziam E_1 sair de A e chegar em C é representado pela expressão $\underline{1(0+1)}$, que agora figura no rótulo de $A \to C$, ou seja, strings de dois bits, tal que o primeiro bit é obrigatoriamente 1.

Agora o próximo passo é remover o estado C de E_1 e obter o autômato generalizado E_2 abaixo:

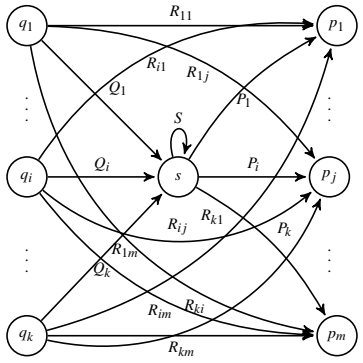


No caso do autômato acima, fica claro que as strings aceitas, isto é, as que fazem o autômato sair de A e atingir D são da forma xy, onde $x \in \{0,1\}^*$ e $y \in L(\underline{1(0+1)(0+1)})$. A ideia é que o autômato processe x fazendo transições do tipo $A \to A$ e, quando faltarem os três últimos símbolos da string de entrada, use a transição $A \to B$ para processar a string y restante.

Fazendo a simplificação dos autômatos generalizados

No exemplo visto anteriormente, as "atualizações" que fazemos para obter um autômato generalizado E_{i+1} a partir de um autômato E_i são razoavelmente simples. O caso geral pode ser mais complicado. Ao removermos um estado s de E_i, precisamos observar todo par de estados (q_i, p_j) tal que ambas $p_i \to s$ e $s \to p_j$ sejam transições para poder obter autômato resultante E_{i+1}.

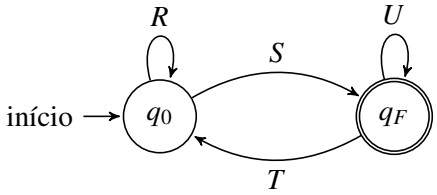
De acordo com a figura abaixo, suponha que os rótulos das transições $p_i \to s$ e $s \to p_j$ no autômato E_i são, respectivamente, Q_1 e P_1. Suponha também que o rótulo da transição $p_i \to q_j$ seja R_{ij} e da transição $s \to s$ seja S (lembrando que se alguma transição não existe no autômato, podemos pensar que ela tem rótulo $\underline{\varnothing}$). Com isso, ao remover o estado s o rótulo da transição de $p_i \to q_j$ no autômato E_{i+1} passa a ser $R_{ij} + Q_i S^* P_j$.



Usando a ideia acima para fazer as atualizações das transições, vamos ver o algoritmo. Entretanto, precisamos antes tomar cuidado como o estado inicial e os estados finais do autômato. Vamos começar apresentando o algoritmo para o caso que o autômato em questão tenha apenas um estado final. Vamos considerar dois casos: no primeiro caso, o estado inicial não é o estado final e no segundo caso o estado inicial e o estado final coincidem.

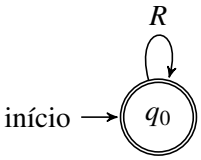
Caso 1: Algoritmo para obter ER a partir de um ε-AFN $(Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_F\})$, com $q_0 \neq q_F$:

1. Troque os rótulos das transições de E por expressões regulares equivalentes de forma que agora E seja um autômato generalizado
2. A cada passo remova um estado $q \in Q \setminus \{q_0, q_F\}$ e atualize as transições e as espressões regulares dos rótulos do autômato
3. Quando restar apenas o estado inicial q_0 e o estado final q_F, como o da figura abaixo, a expressão regular final é $(R + SU^*T)^*SU^*$



Caso 2: Algoritmo para obter ER a partir de ε-AFN (Q,Σ,δ,q_0,F) com $|F|=1$ e $q_0 \in F$:

1. Troque os rótulos das transições de E por expressões regulares equivalentes de forma que agora E seja um autômato generalizado
2. A cada passo remova um estado $q \in Q \setminus \{q_0\}$ e atualize as transições e as espressões regulares dos rótulos do autômato
3. Quando restar apenas o estado inicial (e final) q_0, como o da figura abaixo, a expressão regular final é R^*.



A ideia agora é usar o algoritmos vistos para os dois casos anteriores e apresentar um algoritmo que funciona para qualquer autômato.

Caso geral: Algoritmo para obter ER a partir de ε-AFN $E=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ qualquer

Suponha que $F=\{f_1,f_2,...,f_k\}$. Agora tome uma string $w \in L(E)$ e seja f_i o estado atingido pelo autômato quando w é aceita, tomando i o menor possível[4]. A ideia chave é que o autômato $E_i=(Q,\Sigma,\delta,q_0,\{q_i\})$ tem a seguinte propriedade:

(1) E_i também aceita a string w;

(2) E_i não aceita nenhuma string que não seja aceita por E.

Usando essa ideia, o algoritmo para obter a expressão regular de E é o seguinte:

- A partir de E, crie k autômatos $E_1,E_2,...,E_k$, onde E_i é o o autômato $(Q,\Sigma,\delta,q_0,\{q_i\})$
- Encontre as expressões regulares $R_1,R_2,...,R_k$ para cada autômato E_1 usando os algoritmos para os casos especiais de autômatos com apenas um estado final
- A partir daí, e ER para E é $R_1+R_2+...+R_k$

3.6.2 Autômatos para linguagens de expressões regulares

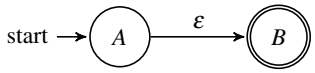
Nesta seção, nosso objetivo é demonstrar a seguinte afirmação: *Se R é uma expressão regular qualquer, então $L(R)$ é uma linguagem regular.* Isto é enunciado de maneira precisa abaixo:

Teorema 3.6.3 Seja $L(R)$ é a linguagem representada por uma expressão regular R qualquer. Então existe um $\varepsilon-$AFD E tal que $L(E)=L(R)$.

Para provarmos o teorema, vamos mostar que o $\varepsilon-$AFD com alfabeto Σ que aceita a linguagem de R, de mesmo alfabeto, pode ser construído recursivamente a partir da própria definição recursiva para as expressões regulares (Definição 3.6.1).

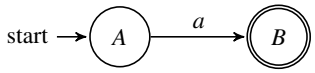
- Se R é uma expressão regular elementar, então $\varepsilon-$AFD tem uma das três formas abaixo:

[4]Note que como o autômato não é determinístico, podem haver vários estados de aceitação possível, mas precisamos de apenas um deles e, arbitrariamente, tomamos o estado f_i para o menor índice i possível.



Se $R = \underline{\varepsilon}$, então o autômato acima aceita a linguagem $L(\underline{\varepsilon}) = \{\varepsilon\}$.

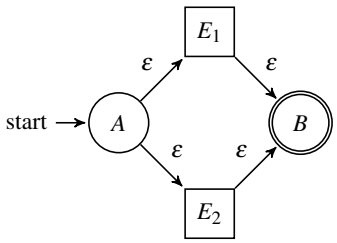
Se $R = \underline{\emptyset}$, então o autômato acima aceita a linguagem $L(\underline{\emptyset}) = \emptyset$.



Se $R = \underline{a}$, para algum $a \in \Sigma$, então o autômato acima aceita $L(\underline{a}) = \{a\}$.

- Se R é uma expressão regular composta, então $\varepsilon-$AFD pode ser construído recursivamente usando a seguinte estratégia:

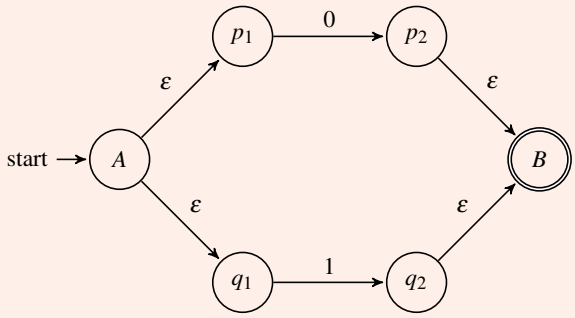
Caso 1. Suponha que e a expressão regular tem a forma composta $R = R_1 + R_2$. Suponha por indução que os $\varepsilon-$AFDs E_1 e E_2 aceitam, respectivamente, $L(R_1)$ e $L(R_2)$. O diagrama abaixo descreve a forma para o $\varepsilon-$AFD E que aceita a expressão composta R:



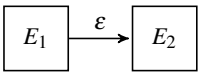
Observe o seguinte na construção acima: Os nós E_1 e E_2 representam autômatos para as linguagens $L(R_1)$ e $L(R_2)$. A transição $A \to R_1$ deve ser entendida como saindo do estado A e tendo destino o estado inicial do autômato E_1 e a transição $E_1 \to B$ deve ser entendida como saindo do estado final de E_1 e tendo como destino B. A mesma ideia vale para as transições $A \to R_2$ e $E_2 \to B$. Note também que nesta construção os estados que originalmente eram iniciais em E_1 e E_2 não são mais iniciais no autômato composto resultante.

Exercício resolvido 3.5 Apresente um autômato para aceitar a linguagem da expressão regular $R = \underline{0+1}$ sabendo que os dois autômatos E_1 e E_2 abaixo aceitam as linguagens das expressões $\underline{0}$ e $\underline{1}$, respectivamente:

Solução: Usando a construção para o Caso 1, obtemos abaixo o autômato E que aceita a linguagem da expressão $\underline{0+1}$:



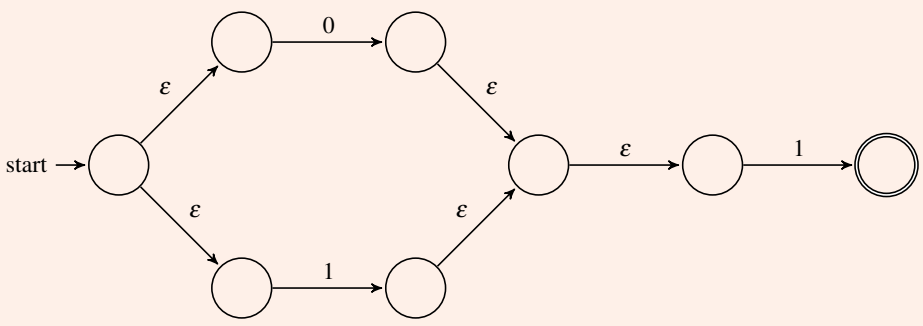
Caso 2. Suponha que e a expressão regular tem a forma composta $R = R_1R_2$. Suponha por indução que os $\varepsilon-$AFDs E_1 e E_2 aceitam, respectivamente, $L(R_1)$ e $L(R_2)$. O diagrama abaixo descreve a forma para o $\varepsilon-$AFD E que aceita a expressão composta R:



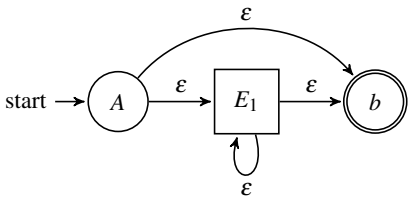
Observe o seguinte no esquema da construção acima: Os nós E_1 e E_2 representam autômatos para as linguagens $L(R_1)$ e $L(R_2)$. A transição $E_1 \to E_2$ deve ser entendida como saindo do final do autômato E_1 e tendo destino o estado inicial do autômato E_2. Note também que nesta construção o estado que originalmente era inicial em E_2 não é mais inicial no autômato composto resultante.

Exercício resolvido 3.6 Apresente um autômato para aceitar a linguagem de $R = \underline{(0+1)1}$.

Solução: Sabendo que os autômatos E e E_1 apresentados no Exercício Resolvido 3.5 aceitam as linguagens das expressões $\underline{(0+1)}$ e $\underline{1}$ obtemos o seguinte autômato para R:



Caso 3. Suponha que e a expressão regular tem a forma composta $R = R_1^*$. Suponha por indução que o $\varepsilon-$AFD E_1 aceita $L(R_1)$. O diagrama abaixo descreve a forma para o $\varepsilon-$AFD E que aceita a expressão composta R:

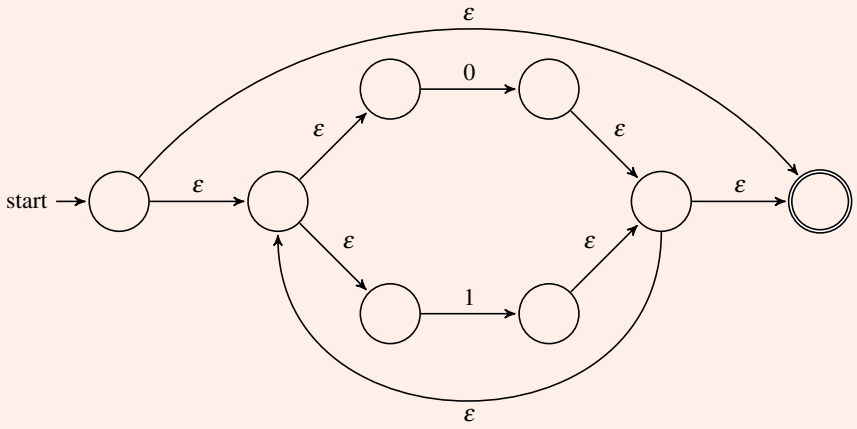


Observe o seguinte no esquema da construção acima: O nó E_1 representa o autômato para a linguagem $L(R_1)$. A transição $E_1 \to E_1$ deve ser entendida como saindo do final do autômato E_1 e tendo destino o estado inicial do autômato E_1. A transição $A \to E_1$ sai de A e chega no estado inicial de E_1 e a transição $E_1 \to B$ sai do estado final de E_1 e chega em B. Note também que nesta construção o estado que originalmente era inicial em E_1 não é mais inicial no autômato composto resultante.

Exercício resolvido 3.7 Apresente um autômato para aceitar a linguagem de $R = \underline{(0+1)^*}$.

Solução: Sabendo que o autômato E apresentados na solução do Exercício Resolvido 3.5 aceita a linguagem da expressão $\underline{(0+1)}$ obtemos o seguinte autômato composto para R:

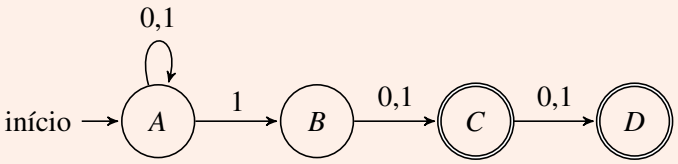
Solução:



■

3.6.3 Exercícios

Exercício 3.25 Obtenha uma expressão regular que represente a linguagem do seguinte ε-AFN:



Exercício 3.26 Obtenha um ε-AFN cuja linguagem seja a mesma representada pela expressão regular $(0+1)^*1(0+1)$.

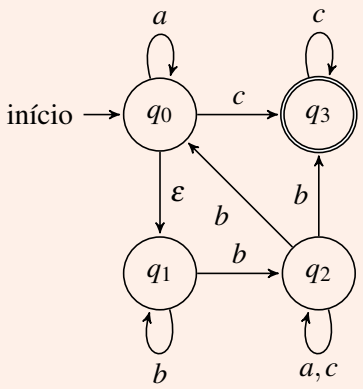
Exercício 3.27 Considere os alfabetos $\Sigma_1 = \{a,b,c\}$ e $\Sigma_2 = \{0,1\}$. Forneça expressões regulares para as seguintes linguagens:

(a) $L \subseteq \Sigma_1^*$ tal que toda string de L tem pelo menos um a e um b.
(b) Conjunto de strings sobre Σ_2 tal que o terceiro símbolo de trás para frente é 1.
(c) $L \subseteq \Sigma_2^*$ definido por $L = \{w \mid w$ tenha um número par de 0's e um número par de 1's$\}$.

Exercício 3.28 Dado o AFD abaixo, encontre uma expressão regular equivalente. Você deve mostrar o desenvolvimento passo a passo de solução.

	0	1
$\rightarrow^* p$	s	p
q	p	s
r	r	q
s	q	r

Exercício 3.29 Considere o ε-AFN $E = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\{a,b,c\},\delta,q_0,\{q_3\})$ abaixo:

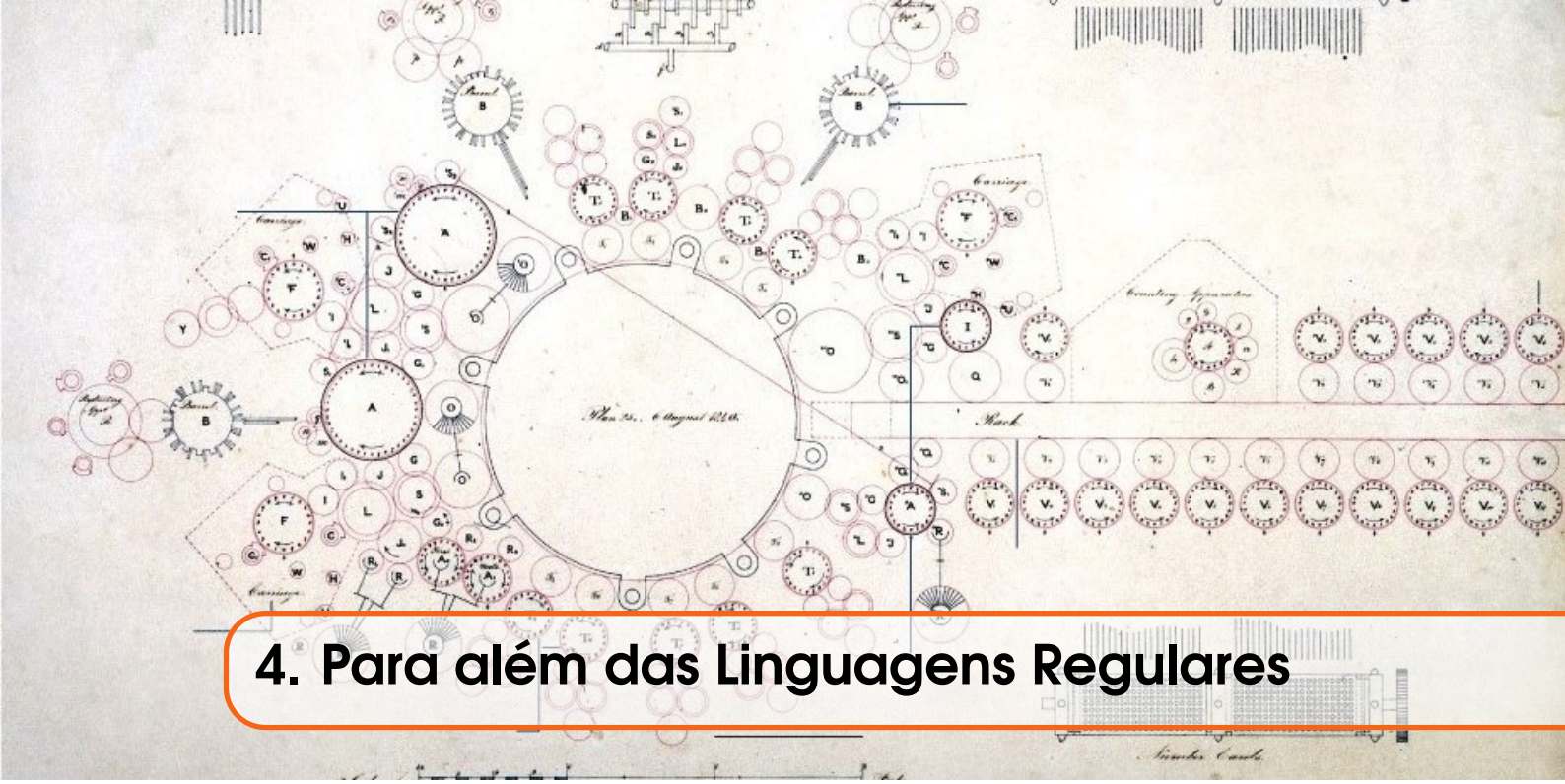


(a) Apresente a tabela de transições da função δ do autômato E.

(b) Forneça uma expressão regular R tal que $L(R) = L(E)$. Mostre passo a passo o desenvolvimento da sua solução. ■

Exercício 3.30 Forneça um ε-AFN que aceite a mesma linguagem da expressão regular $(00+11)^* + (111)^*0$. ■

Exercício 3.31 Construa um ε-AFN que aceite a mesma linguagem da expressão regular $00(0+1)^*$. ■



4. Para além das Linguagens Regulares

Existem linguagens não regulares? Nas seções anteriores nós já antecipamos que a resposta é sim. Veremos neste capítulo que algumas linguagens extremamente simples como, por exemplo, $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$, não são regulares.

Dada uma linguagem L, se quisermos mostrar que L é regular, basta explicitamente apresentarmos um AFD a aceite. Entretanto, se quisermos mostrar que L não é regular, temos que provar que não existe nenhum AFD que aceite L. Ou seja, precisamos usar um argumento que exclua logicamente a possibilidade de que cada um dos infinitos possíveis AFDs tenha a propriedade de ser um AFD que aceite L. A demonstração deste tipo de afirmação tende a ser mais difícil de se obter. Nosso primeiro objetivo neste capítulo é apresentar uma ferramenta matemática, conhecida como *Lema do Bombeamento*, que será extremamente útil para demonstrarmos que certos AFDs não existem.

4.1 O Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

O seguinte lema será bastante útil para provarmos que certas linguagens não são regulares:

Lema 4.1.1 — Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares (LBLR). Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante inteira $t \geq 1$ tal que $\forall w \in L$, com $|w| \geq t$, o seguinte é verdadeiro:

$\exists x, y, z \in \Sigma^*$ tal que $w = xyz$ e as três condições abaixo são satisfeitas:

(1) $y \neq \varepsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^k z \in L$

No decorrer deste capítulo nos referiremos ao Lema 4.1.1 como Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares (LBLR) ou, de maneira mais curta, Lema do Bombeamento (LB). Agora vamos mostrar como podemos fazer uso do LB para mostrar que uma linguagem não é regular. A vantagem de se usar o LB é que não precisamos mostrar explicitamente que um certo AFD não existe. O que acontece aqui é que todo trabalho da prova de inexistêcia do AFD fica "encapsulada"

dentro da demonstração do LB. Segue um exemplo de como fazer uso do Lema do Bombeamento para provar que uma determinada linguagem não é regular.

Teorema 4.1.2 $L_{01} = \{0^i 1^i \mid i \geq 1\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{01} é regular. Portanto, usando o LB, sabemos que existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se tomaramos uma string w de L "grande o suficiente" ou seja, tal que $|w| \geq t$, deve existir $x, y, z \in \Sigma^*$ tal que w pode ser escrita como $w = xyz$ de maneira que as três afirmações abaixo são verdadeiras:

(1) $y \neq \varepsilon$ *(2)* $|xy| \leq t$ *(3)* $\forall k \geq 0, xy^k z \in L_{01}$.

Considere a string $w = 0^t 1^t$. Note que $w \in L_{01}$ e $|w| \geq t$. Portanto podemos aplicar o LB e, com isso, w pode ser escrita na forma $w = xyz$ tal que as três afirmações acima são verdadeiras.

Pela condição *(2)*, temos que $|xy| \leq t$ e portanto a string xy contém apenas 0's. Portanto, todos os símbolos 1 da string w estão contidos em z (note não **necessariamente** z contém apenas símbolos 1, mas isso não é relevante aqui).

Pela condição *(3)*, a string $xy^k z$ deve pertencer a L_{01} para qualquer $k \geq 0$. Portanto, em particular, $xy^0 z \in L_{01}$. Com isso, temos que $xz \in L_{01}$.

Note que $|xyz| = 2t$. Pela condição *(1)*, $|xz| < |xyz|$ e portanto $|xz| < 2t$. Como z tem t símbolos 1, a string xz pode ter no máximo t-1 símbolos 0. Isso é uma contradição, pois $xz \in L_{01}$. Logo L_{01} não é regular. □

Vamos utilizar agora o LB em uma linguagem um pouco mais interessante:

Teorema 4.1.3 $L_p = \{1^p \mid p \text{ é um número primo }\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_p é regular. Então o LB nos diz que existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se tomaramos uma string w de L_p tal que $|w| \geq t$, então $\exists x, y, z \in \Sigma^*$ tal que w pode ser escrita como $w = xyz$ e:

(1) $y \neq \varepsilon$ *(2)* $|xy| \leq t$ *(3)* $\forall k \geq 0, xy^k z \in L_p$.

Considere a string $w = 1^p$ para algum primo $p \geq t$. Note que w é uma string para a qual podemos aplicar o LB, pois $w \in L_P$ e $|w| \geq t$. Portanto w pode ser escrita na forma $w = xyz$ satisfazendo condições acima.

Pela condição *(3)*, a string $xy^k z$ deve pertencer a L_p para qualquer $k \geq 0$. Em particular, para $k = p+1$, podemos concluir que $xy^{p+1} z \in L_p$.

Note que $|xy^{p+1} z| = |xz| + |y^{p+1}|$. Seja $|y| = n$. Com isso temos:

$$\begin{aligned} |xy^{p+1} z| &= |xz| + |y^{p+1}| \\ &= (p-n) + n \cdot (p+1) \\ &= p - n + n + tp \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1+n) \end{aligned}$$

Como p é primo, $p \geq 2$. Além disso, a condição *(1)* diz que $n \geq 1$, e portanto $(1+n) \geq 2$. Como ambos p e $(1+n)$ são maiores ou iguais a dois, o produto $p \cdot (1+n) = |xy^{p+1} z|$ não é um número primo. Isso contradiz o fato que $xy^{p+1} z \in L_p$. □

O Teorema 4.1.3 mostra que o problema de reconhecer se um determinado número é primo não pode ser solucionado usando um algoritmo (ou uma máquina) cujo funcionamento possa ser

descrito por um autômato finito. Entretanto, observe que aqui estamos permitido que o alfabeto contenha apenas símbolos 1, de maneira que os números primos são representados pelas strings 1^p, onde p é um primo. Também podemos provar algo mais "natural", que é supor que o alfabeto de entrada é $\Sigma = \{0,1\}$ e os primos são as strings binárias que representem números primos. Embora a prova disto seja um pouco complicada (veja o Exercício Opcional 4.3), vamos enunciar este teorema abaixo. No enunciado do teorema, relembramos que $N(w)$ é o número natural que a string binária w representa.

Teorema 4.1.4 $L_{\text{P}} = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Exercício 4.1 Prove que as seguintes linguagens não são regulares:

- A linguagem L_{RR} das strings binárias da forma ww^R
- A linguagem L_{EQ} das strings binárias que tem a mesma quantidade de 0's e 1's.
- A linguagem $L_{\text{DB}} = \{w : \text{o número de 0's em } w \text{ é o dobro do número de 1's}\}$.
- A linguagem $L_{+0} = \{0^i 1^j \ : \ i > j\}$
- A linguagem $L_{\text{SQ}} = \{1^s : s \text{ é um quadrado perfeito}\}$.

■

Exercício 4.2 (OPCIONAL) Prove que a seguinte versão mais forte do Lema do Bombeamento é verdadeira:

> Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante t tal que $\forall w \in L$, com $|w| \geq t$, o seguinte é verdadeiro:
>
> $\exists u,x,y,z,v \in \Sigma^*$ tal que $w = xw'z = uxyzv$ e as três condições abaixo são satisfeitas:
>
> (1) $y \neq \varepsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, ux(w')^k zv \in L$

■

Exercício 4.3 (OPCIONAL) Prove que $L_{\text{P}} = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$ não é regular. Dica: Use a versão do Lema do Bombeamento do Exercício 4.2. Além disso, para resulver esse exercício também podem ser úteis o Teorema de Dirichlet e o Pequeno Teorema de Fermat. ■

Exercício 4.4 Considere o alfabeto $\{0,1,M\}$ e a seguinte linguagem sobre este alfabeto: $L_{\text{RMR}} = \{wMw^R \ : \text{tal que } w \in \{0,1\}^*\}$. Use o Lema do Bombeamento para mostrar que L_{RMR} não é uma linguagem regular. ■

Exercício 4.5 Considere o alfabeto $\{0,1,M\}$ e a seguinte linguagem sobre este alfabeto: $L_{0\text{M}1} = \{0^i M 1^i \ : \text{tal que } i \geq 1\}$. Use o Lema do Bombeamento para mostrar que $L_{0\text{M}1}$ não é regular. ■

4.2 Autômatos com Pilha (AP)

No capítulo 3 nós apresentamos a definição de AFDs e definimos conjunto das linguagens regulares como sendo exatamente o conjunto de linguagens aceitas por AFDs. Depois disso, modificamos a nossa definição de autômatos: primeiro incluímos a habilidade do autômato "advinhar" qual transição fazer e, em seguida, adicionamos a possibilidade do autômato fazer transições ε.

Entretanto, o conjunto de linguagens aceitas por tais autômatos continua sendo as linguagens regulares. Agora apresentar um cenário diferente: Vamos dar aos ε-AFNs uma habilidade que os tornarão mais poderosos, isto é, os tornarão capazes de aceitar linguagens que não são regulares.

A habilidade que vamos dar ao autômato agora é a possibilidade de armazenar informação e recuperar informação em uma memória. Entretanto, o tipo de memória que o autômato terá é bastante restrito: uma pilha de dados (veja Figura 4.1). O ponto chave aqui é que, embora o autômato tenha acesso a um tipo de memória bastante restrito, este fato será suficiente para aumentar o seu poder de computação.

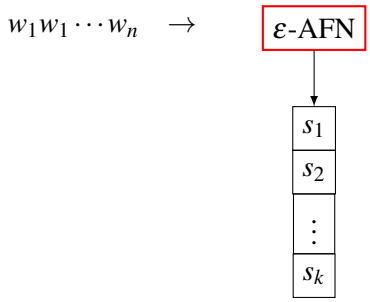


Figure 4.1: Esquema conceitual de autômatos com pilha.

Primeiramente, observamos que este novo modelo é capaz de realizar tarefas que um ε-AFN já realizava, ou seja, reconhecer linguagens regulares, pois podemos fazer computação com o autômato simplesmente ignorando a pilha de dados. Entretanto, usando a pilha de dados este modelo de computação é capaz de resolver problemas que não podem ser resolvidos com ε-AFNs.

4.2.1 O modelo matemático para autômatos com pilha

Nesta seção apresentaremos a definição matemática para um autômato com pilha. Para tal, precisamos esclarecer antes como este autômato funciona. Note primeiamente que durante a computação, um ε-AFN executa duas ações em cada um de seus passos:

(1) Processa um ou zero símbolos da string de entrada;
(2) Faz uma transição de estado.

Relembre que a quantidade de símbolos processados na ação (1) depende da transição efetuada (um símbolo nas transições comuns e zero símbolos nas transições ε). Quanto a ação (2), relembre também que a transição pode ser fazer com o autômato fique no mesmo estado que já se encontra. Autômatos com pilha, por sua vez, executam quatro ações a cada passo:

(1) Consome um ou zero símbolos da string de entrada;
(2) Desempilha o símbolo do topo da pilha;
(3) Faz uma transição de estado;
(4) Empilha uma quantidade finita de símbolos na pilha.

No caso dos ε-AFNs, as ações executadas a cada passo da dependem de um par (*estado atual*, *símbolo consumido*) e por isso, tem o domínio da função de transição igual a $Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. No caso dos APs[1], as ações executadas a cada passo da computação do AP é determinado por uma tripla

[1] Estamos usando "AP" para nos referir aos autômatos com pilha. Entretanto, em alguns textos usa-se o acrônimo PDA, que vem do ingês *Pushdown Automata*.

com a seguinte forma: (*estado atual, símbolo consumido, símbolo desempilhado*). Por este motivo, o domínio da função de transição δ do autômato com pilha deve ser $Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times \Gamma$. A cada passo, um autômato com pilha, além de mudar de estado, também empilha símbolos na pilha de dados (formalmente, empilham uma string de símbolos). Mais precisamente, como estamos lidando com um modelo de computação não determinístico, dado (*estado, símbolo da entrada, símbolo da pilha*) a função δ devolve um conjunto de possíveis ações a serem executadas pelo autômato, onde cada elemento é do tipo (*novo estado, string empilhada*).

Definição 4.2.1 — Autômatos com Pilha (AP). Um autômato com pilha P é uma 7-tupla $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ tal que:

Q, Σ, q_0, F: Tem a mesma interpretação que em um ε-AFN.

Γ é o alfabeto da pilha.

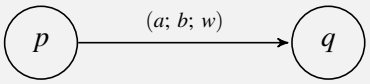
$Z_0 \in \Gamma$ é o *símbolo inicial da pilha*. Adicionalmente, temos que $Z_0 \notin \Sigma$.

$\delta : Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times \Gamma \to \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2), ..., (q_k, \gamma_k)\}$, tal que $q_i \in Q$ e $\gamma_i \in \Gamma^*$.

Na definição acima, o símbolo Z_0 é, por convenção, o único símbolo presente na pilha no início da computação, marcando o "fundo" da pilha. Assim como fazemos com os demais autômatos vistos anteriormente, vamos usar diagramas para representar APs. Nos diagramas, o rótulo de uma transição do tipo $p \to q$ contém, além do símbolo de Σ processado na transição, o símbolo de Γ e a string que deve ser empilhada quando a transição é efetuada.

RÓTULOS NOS DIAGRAMAS DE AUTÔMATOS COM PILHA

Os rótulos nas transições de um diagrama de um AP tem a forma $(a; b; w)$, como abaixo:



Neste caso, a e b são símbolos e w uma string. Neste caso, a transição é executada se o próximo símbolo da string de entrada for a e se o topo da pilha for b. Após a execução da transição empilha-se a string w. A sequência da símbolos de w é empilhada de trás para frente. Por exemplo, se $w = w_1 w_2 ... w_k$, o símbolo w_k é empilhado por primeiro, depois o símbolo w_{k-1}, e assim por diante, até que o símbolo w_1 é empilhado e fica no topo da pilha do autômato.

A seguir vamos apresentar um diagrama de um AP para a linguagem L_{RR} das strings binárias da forma ww^R, ou seja, palíndromos de tamanho par. Observamos que esta linguagem não é regular (a demonstração disto é o objetivo do Exercício 4.1). O AP P_{RR} da Figura 4.2 decide L_{RR}.

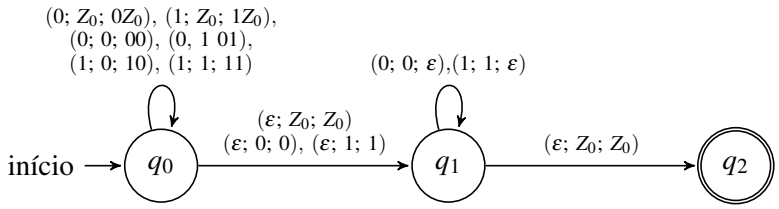


Figure 4.2: Diagrama do autômato com pilha para a linguagem dos palíndromos de tamanho par.

A 7-tupla que define o autômato é $P_{\text{RR}} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$, onde a função δ é definida da seguinte forma: Para todo $a \in \{0,1\}$ e para todo $B \in \{0,1,Z_0\}$, a função está definida nos seguintes casos:

- $\delta(q_0, a, B) = \{(q_0, aB)\}$.
- $\delta(q_0, \varepsilon, B) = \{(q_1, B)\}$.
- $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$.
- $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$.

O funcionamento do autômato éo seguinte: A primeira metade da string de entrada é processada executando-se a transição do tipo $\textcircled{q_0} \to \textcircled{q_0}$. Observe que esta transição está definida para todas as possibilidades de símbolos a da entrada e B no topo da pilha (no Diagrama, trata-se do "laço" sobre o estado q_0). Quando o autômato chega na metade da string, sendo não determinístico, ele "advinha" que deve fazer a transição ε e mudar para o estado q_1. Depois disso, o autômato processa a segunda metade da string fazendo as trasições do tipo $\textcircled{q_1} \to \textcircled{q_1}$ desde que o símbolo lido na entrada seja idêntico ao símbolo no topo da pilha. Caso a string de entrada seja um palíndromo de tamanho par, isso funciona até que todo símbolo da segunda metade da string de entrada seja consumido e pilha seja toda esvaziada, exceto pelo símbolo especial Z_0, que marca o fundo da pilha. Para finalizar a computação, o autômato faz a transição do tipo $\textcircled{q_0} \to \textcircled{q_1}$.

Quando projetamos um AP para realizar uma tarefa é comum tomar cuidado para que o símbolo Z_0 sempre esteja no "fundo" da pilha para que possamos saber que a pilha está vazia. Isso não é obrigatório, mas é uma boa prática no projeto de APs, pois o AP, a cada passo, sempre remove um símbolo da pilha por padrão. Mas o que acontece quando algum AP tenta fazer uma trasição, mas a pilha está vazia? Aqui temos uma situação que não é muito diferente ε-AFNs tentando realizar uma transição que não está definida: o autômato morre e a string é rejeitada.

Como já observamos, o modelo da Definição 4.2.1 não é determinítico, pois ele é uma generalização de um modelo que já não era determinístico. Uma pergunta importante é se este não determinismo faz diferença, ou seja, se seria possível apresentar uma versão determinística de um AP que aceite as mesmas linguagens que APs não determinísticos. Na Seção 4.2.4 daremos uma definição para APs determinísticos e veremos que estes **não** aceitam as mesmas linguagens aceitas por APs não determinísticos, embora ainda aceitem um conjunto maior de linguagens do que as linguagens regulares.

Exercício 4.6 Apresente a definição formal e também o diagrama de um autômato com pilha que decida a linguagem $L_3 = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$. ■

Exercício 4.7 Mostre que toda linguagem regular é aceita por um autômato com pilha. ■

Exercício 4.8 Apresente a definição formal e o diagrmaa de um AP que aceite a linguagem $L = \{0^n 1^n \ : \ n \geq 1\}$. ■

Exercício 4.9 Apresente o diagrama de um AP que aceite a linguagem $L = \{0^i 1^j \ : \ i > j\}$. ■

Exercício 4.10 Considere o alfabeto Σ que contém os símbolos de "abertura" e "fechamento" de parêntesis, ou seja $\Sigma = \{(,)\}$. Apresente o diagrama de um AP que aceite a linguagem das strings de parêntesis balanceados sobre σ. Por exemplo, a string $(()(()))$ deve ser aceita, enquanto a string $())($ não deve ser aceita. ■

4.2.2 Definição formal de computação com autômatos com pilha

A computação de um autômato com pilha a computação começa com o autômato no estado inicial q_0 com a string de entrada ainda sem ter sido processada e com a pilha do autômato contendo apenas o símbolo Z_0. A partir daí, a cada passo, a "situação" que a computação se encontra, será chamada de *configuração* da computação, pode ser sempre descrita dado:

(1) O estado q em que o AP se encontra;
(2) A string w de símbolos ainda não processada pelo AP;
(3) A string γ de símbolos que está armazenada na pilha de dados.

A configuração do autômato (q, w, γ) pode ser vista como uma "fotografia" do autômato, capturando a situação da computação naquele momento do tempo[2]. Formalizamos isso a seguir.

Definição 4.2.2 — Configuração de um AP. Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ um AP e $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $\gamma \in \Gamma^*$. Uma tripla (q, w, γ) é chamada de uma configuração de P.

O símbolo $\vdash_P$, usado para representar um passo que leva a computação de certa configuração para uma outra configuração, é definido da seguinte maneira:

Definição 4.2.3 — Um passo computacional. Seja um AP $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Escrevemos $(q, aw, X\beta) \vdash_P (p, w, \alpha\beta)$ se $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$, onde w é uma string qualquer de Σ^* e β é uma string qualquer de Γ^*.

■ **Exemplo 4.1** Sabemos que o AP P_{RR} da Figura 4.2 ao tomar a 010010 como entrada sai da configuração $(q_0,\ 010010,\ Z_0)$ e atinge a configuração $(q_0,\ 10010,\ 0Z_0)$. Usando a notação da Definição 4.2.3, escrevemos $(q_0,\ 010010,\ Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_0,\ 10010,\ 0Z_0)$.

■

Dadas configurações C_i e C_j de P, a expressão $C_i \vdash_P C_j$ é lida "C_i *produz* C_j com um passo computacional". A seguir vamos definir o símbolo $\vdash_P^*$ para generalizar esta ideia para um número arbitrário de passos:

Definição 4.2.4 — Sequência de passos computacionais. O símbolo $\vdash_P^*$, usado para representar uma sequência de passos que leva a computação de certa configuração C_i para uma outra configuração C_j é definido recursivamente:

Base: Se C_i é uma configuração de um AP, então $C_i \vdash_P^* C_i$.

Indução: $C_i \vdash_P^* C_j$ se $\exists C_k$ tal que $C_i \vdash_P C_k$ e $C_k \vdash_P^* C_j$.

A expressão $C_i \vdash_P^* C_j$ é lida "C_i *produz* C_j".

■ **Exemplo 4.2** Sabemos que o AP P_{RR} da Figura 4.2 aceita a string 010010, pois trata-se de um palíndromo de tamanho par. A computação passo a passo é a seguinte: $(q_0,\ 010010,\ Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_0,\ 10010,\ 0Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_0,\ 0010,\ 10Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_0,\ 010,\ 010Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_1,\ 010,\ 010Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_1,\ 10,\ 10Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_1,\ 0,\ 0Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_1,\ \varepsilon,\ Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}} (q_2,\ \varepsilon,\ Z_0)$. Usando a notação da Definição 4.2.4 podemos escrever: escrever $(q_0, 010010, Z_0) \vdash_{P_{\text{RR}}}^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$. ■

[2] A tripla contendo estes três elementos também é chamada em alguns textos de *descrição instantânea* do autômato.

Vimos no Exemplo 4.2 que o $(q_0, 010010, Z_0) \vdash^*_{P_{\text{RR}}} (q_2, \varepsilon, Z_0)$, o que significa que P_{RR} aceita 010010. A ideia agora é usar a notação $\vdash^*$ para formalizar a ideia de aceitação de uma string w qualquer por um AP P:

Definição 4.2.5 — Aceitação e rejeição de strings. Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ um AP. Dado $w \in \Sigma^*$, dizemos que P *aceita* w se $(q_0, w, Z_0) \vdash^*_P (q, \varepsilon, \alpha)$ para $q \in F$ e $\alpha \in \Gamma^*$ qualquer. Caso contrário, dizemos que P *rejeita* w.

Definição 4.2.6 — Árvore de computações possíveis de APs. Dado um AP P e uma string w. A árvore de computações possíveis de $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ com a string $w \in \Sigma^*$ é definida indutivamente:

Base: Inclua na árvore o nó raíz correspondente à configuração $C_0 = (q_0, w, Z_0)$.

Indução: Seja C_i um nó da árvore. Se $C_i \vdash_P C_j$, então inclua o nó C_j como filho de C_i na árvore.

O autômato P_{RR} aceita a string 1111. A seguir apresentamos a árvore de computações possíveis:

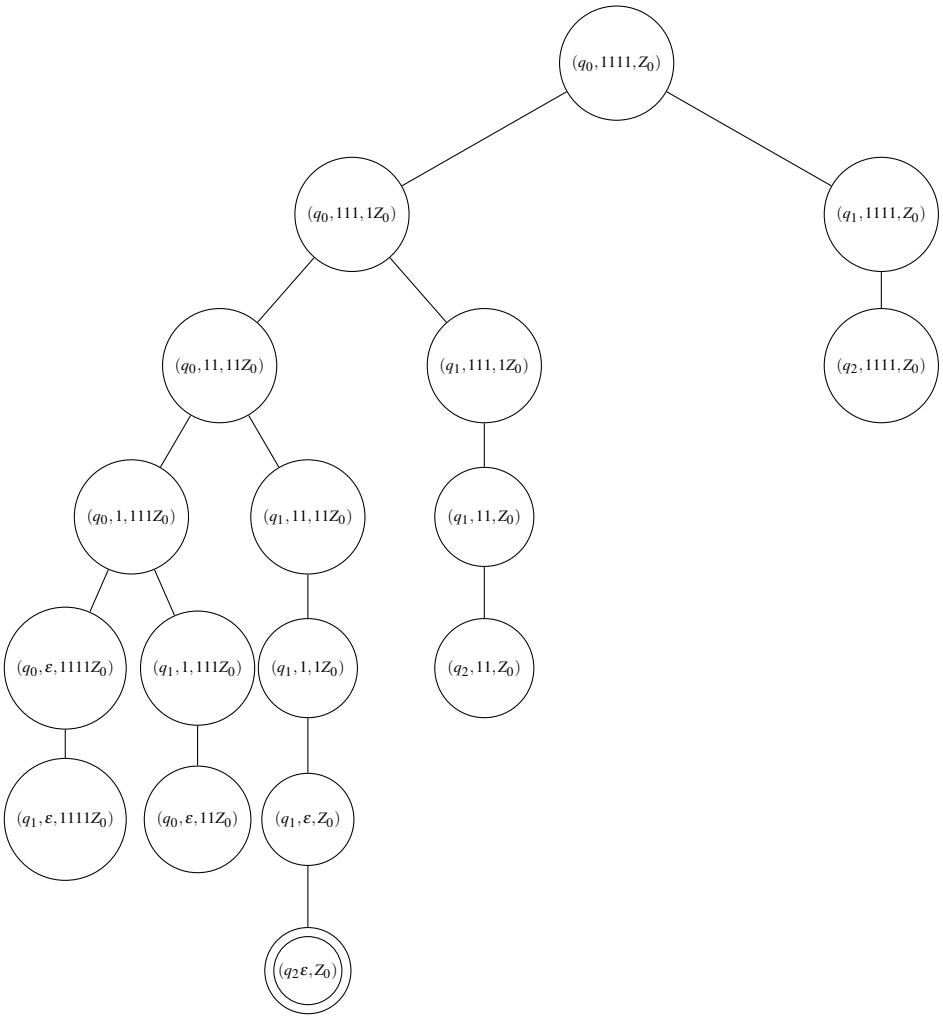


Figure 4.3: A árvore de computações possíveis do AP P_{RR} da Figura 4.2 com a string 1111. O nó marcado com dois círculos concêntricos é um nó que corresponde a uma configuração em que o AP aceita a string de entrada.

A linguagem de um AP é conjunto de strings que ele aceita, conforme a definição a seguir.

Definição 4.2.7 — Linguagens de APs. Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ um AP. Definimos a linguagem de P como sendo $L(P) = \{w \in \Sigma^* : (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \alpha)$ para $q \in F$ e $\alpha \in \Gamma^*$ qualquer$\}$.

Definição 4.2.8 — Liguagem Livre de Contexto. Dada uma linguagem L, se existe um AP P tal que $L = L(P)$, então L é dita uma *linguagem livre de contexto*.

Exercício 4.11 O conjunto das linguagens regulares está estritamente contido no conjunto das linguagens livres de contexto? Justifique sua resposta. ■

Exercício 4.12 Para responder as questões abaixo assuma que o alfabeto é $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Forneça um AP P tal que $L(P) = \{a^m b^n c^n : m, n \geq 0\}$.

(b) Forneça um AP P tal que $L(P) = \{a^n b^n c^m : m, n \geq 0\}$.

■

Exercício 4.13 (OPCIONAL) No Seção 4.1 aprendemos a usar o *Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares* para provar que certas linguagens não são regulares. Para o caso de Linguagens Livre de Contexto também existe um *Lema do Bombeamento para Linguagens Livre de Contexto (LBLLC)* (veja os livros [HMU06] e [Sip06], por exemplo). Use o LBLLC para provar que $L = \{a^n b^n c^n; n \geq 0\}$ não é livre de contexto. ■

Exercício 4.14 A interseção de duas linguagens regulares também é uma liguagem regular. Por ter esta propriedade, as linguagens regulares são ditas *fechadas sob interseção*. Nesta questão você deve provar que esta propriedade de ser fechada sob interseção não vale para linguagens livre de contexto, ou seja, você deve provar que existem linguagens livre de contexto L_1 e L_2 tal que $L_1 \cap L_2$ não é uma linguagem livre de contexto. Dica: Tente usar o fato de que a linguagem da questão 4.13 não é livre de contexto. ■

4.2.3 Aceitação por pilha vazia

Relembramos que quando projetamos um AP, normalmente tomamos cuidado para que o fundo da pilha sempre contenha o símbolo Z_0, pois o AP morre quando tenta fazer uma trasição com a pilha vazia. O que vamos fazer agora é mudar completamente como entendemos a computação feita pelo AP. Vamos projetar APs de maneira que eles morram exatamente quando terminarem de ler a string de entrada.

Neste contexto, a pergunta chave que queremos fazer agora é a seguinte: quais são as strings que fazem com que um determinado AP esvazie completamente sua pilha (e por consequência morra no passo seguinte)? Dado um AP P, vamos definir a seguir $N(P)$ como sendo o conjunto contendo toda string que faz o AP morrer com a pilha vazia. Observe que o conjunto $N(P)$ não é a linguagem do AP, embora, em algumas situações, este possa ser o caso.

Definição 4.2.9 Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ um AP. Então $N(P) = \{w \ ; \ (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ para $q \in Q$ qualquer$\}$.

■ **Exemplo 4.3** Como o AP P_{RR} da Figura 4.2 nunca esvazia a pilha, então $N(P_{\text{RR}}) = \varnothing$. ■

Observe que as strings de entrada de um dado AP P caem em dois casos: as strings que esvaziam a pilha de P e as strings que não esvaziam a pilha de P. Assim como temos pensado no AP P como tendo um certo *poder de computação* capaz de distinguir se uma dada string pertence ou não pertence a $L(P)$, podemos também pensar que P também tem um certo poder de computação para distinguir se a dada string pertence ou não pertence a $N(P)$. A partir de agora, vamos formalizar esta ideia e dizer que as strings de $N(P)$ são as strings que P *aceita por pilha vazia*. Observe que o fato de que P aceite por pilha vazia uma dada string w, não implica necessariamente que P aceite (no sentido da string estar na linguagem do AP) esta mesma string w. Entretanto, os seguintes teoremas mostram há uma certa equivalência entre os dois modos de aceitação de strings.

Teorema 4.2.1 Seja L a linguagem de um AP P. Então existe um AP P' tal que $N(P') = L$.

Teorema 4.2.2 Seja $N(P)$ o conjunto de strings aceitas por pilha vazia de AP P. Então existe um AP P' tal que $L(P') = N(P)$.

4.2.4 Autômatos com pilha determinísticos (APDs)

Vamos finalizar esta seção sobre APs seguindo a direção oposta que vínhamos fazendo desde o Capítulo 3. Até agora vínhamos, pouco a pouco, *generalizando* o nosso modelo de computação. Agora, vamos dar "um passo para trás" e definir um modelo de computação um pouco mais restrito. Chamaremos este modelo de *Autômato com Pilha Determinístico (APD)*.

Definição 4.2.10 — Autômatos com Pilha Determinísticos (APDs). Um *Autômato com Pilha Determinístico (APD)* é um Autômato com Pilha $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ cuja função de transição δ tem as seguintes restrições:

1. Para quaisquer, $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e $X \in \Gamma$, temos $|\delta(q, a, X)| \leq 1$,
2. Se existe $q \in Q$, $a \in \Sigma$ e $X \in \Gamma$ tal que $\delta(q, a, X) \neq \varnothing$, então $\delta(q, \varepsilon, X) = \varnothing$.

Exercício 4.15 Mostre que toda linguagem regular pode ser decidida por um APD. ■

Exercício 4.16 Considere o alfabeto $\{0,1,M\}$ e a seguinte linguagem sobre este alfabeto: $L_{\text{RMR}} = \{wMw^R \mid \text{tal que } w \in \{0,1\}^* \}$. Mostre um APD que decida L_{RMR}. ■

Teorema 4.2.3 O conjunto de linguagens decididas por APs é estritamente maior do que o conjunto das linguagens regulares.

Prova: A demonstração é consequência direta dos Exercícios 4.5, 4.15 e 4.16. □

Teorema 4.2.4 Toda linguagem decidida por um APD também é decidida por um AP.

Prova: Como APDs são casos particulares de APs, trivialmente toda linguagem decidida por um APD também é decidida por um AP. □

A pergunta natural agora é se toda linguagem decidida por AP também pode ser decidida por um APD. O teorema a seguir enuncia que isto não é verdadeiro.

Teorema 4.2.5 Não existe APD que decida a linguagem L_{RR}.

4.3 Gramáticas Livre de Contexto

Na Seção 3.6 nós vimos que podemos usar expressões regulares para reprentar linguagens. Mais precisamente, vimos que as linguagens representáveis por expressões regulares são exatamente as linguagens aceitas por autômatos finitos. Neste seção vamos fazer algo semelhante. Vamos apresentar um outro formalismo matemático, chamado de *Gramáticas Livres de Contexto* (GLC), que também pode ser usado para representar linguagens. Na sequência veremos que as linguagens representáveis por GLCs são precisamente as linguagens aceitas por APs.

4.3.1 Definição formal de gramáticas livre de contexto

O objeto matemático que usaremos para representar linguagens nesta seção é uma quádrupla. Vamos primeiramente apresentar a definição matemática deste objeto e, em seguida, explicaremos como associamos uma linguagem a estas quádruplas.

Definição 4.3.1 Uma *Gramática Livre de Contexto* é uma quádrupla $G = (V,T,P,S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais*.
- P é o conjunto de *regras de produção*, sendo que cada elemento de P é uma expressão da forma $X \to W$, onde $X \in V$ e W é uma string de $(V \cup T)^*$.
- S é a variável inicial, onde $S \in V$.

Para simplificar, muitas vezes diremos apenas “gramáticas”, ao invés de gramáticas livres de contexto e apenas “regras” ao invés de regras de produção.

■ **Exemplo 4.4** $G_P = (\{P\}, \{0,1\}, A, P)$ é uma gramática onde A contém as seguintes regras:

$P \to \varepsilon$
$P \to 0$
$P \to 1$
$P \to 0P0$
$P \to 1P1$ ■

Na Seção 4.3.2 veremos como formalmente podemos associar linguagens a gramáticas, como a que acabamos de ver no Exemplo 4.4. Por enquanto vamos apenas nos certificar que entendemos exatamente que tipo de objeto matemático é uma gramática. Vamos a mais um exemplo:

■ **Exemplo 4.5** $G_1 = (\{I,E\}, \{a,b,0,1,+,*,(,)\}, A_1, E)$ onde as regras de A_1 são:

$E \to I$
$E \to E + E$
$E \to E * E$
$E \to (E)$
$I \to a$
$I \to b$
$I \to Ia$
$I \to Ib$
$I \to I0$
$I \to I1$ ■

Mais uma vez, para simplificar, em vez de escrever a lista completa de regras de um dado conjunto de regras, vamos utilizar uma notação mais compacta. No caso do Exemplo 4.5, ao invés de gastar dez linhas para descrever o conjunto de regras A_1, poderíamos ter usado apenas duas linhas e o descrito da seguinte maneira:

$E \to I|E+E|E*E|(E)$
$I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$

De maneira semelhante, o conjunto de regras do Exemplo 4.4 é descrito por $P \to \varepsilon|0|1|0P0|1P1$.

4.3.2 Derivações de uma gramática

Dada uma gramática G, veremos agora qual é a linguagem $L(G)$ que esta gramática representa. Para chegarmos a tal definição, vamos definir o conceito de *derivação* de strings. A ideia é que as strings deriváveis de G são as strings que pertencem a linguagem $L(G)$.

Definição 4.3.2 Seja $G = (V,T,P,S)$ uma gramática e seja uma string $\alpha A\beta$ onde $A \in V$ e $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$. Seja $A \to \gamma$ uma regra de P. Então dizemos que $\alpha A\beta \Rightarrow_G \alpha\gamma\beta$

No exemplo acima, dizemos que a string $\alpha\gamma\beta$ pode ser *derivada* da string $\alpha A\beta$ na gramática G. Alternativamente a a string $\alpha A\beta$ *produz* a string $\alpha\gamma\beta$ na gramática G. Observe que tanto $\alpha\gamma\beta$ quanto $\alpha A\beta$ são strings cujos símbolos pertencem ao conjunto $V \cup T$. Estas strings são chamadas de *termos sentenciais*. As strings cujos símbolos pertencem apenas ao conjunto T são chamadas de *strings terminais*. Note que uma derivação pode ser aplicada apenas a strings que são termos sentenciais. Por outro lado, quando formos definir quais são as strings que pertencem a uma dada gramática, estaremos interessados apenas em strings terminais.

Antes de seguir em frente, vamos mostrar como usar a Definição 4.3.2 dizer formalmente que a $a*(a+b00)$ pode ser derivada da gramática G_1 do Exemplo 4.5.

■ **Exemplo 4.6** A string $a*(a+b00)$ pode ser derivada da gramática G_1, pois:

$E \Rightarrow E*E \Rightarrow I*E \Rightarrow a*E \Rightarrow a*(E) \Rightarrow a*(E+E) \Rightarrow a*(I+E) \Rightarrow a*(a+E) \Rightarrow a*(a+I) \Rightarrow a*(a+I0) \Rightarrow a*(aI00) \Rightarrow a*(a+b00)$ ■

A próxima definição será útil para indicar que uma string pode derivada de uma dada gramática usando uma ou mais derivações.

Definição 4.3.3 Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in (V \cup T)^*$, definimos indutivamente $\Rightarrow_G^*$:

BASE: $\alpha \Rightarrow_G^* \alpha$
INDUÇÃO: se $\alpha \Rightarrow_G^* \beta$ e $\beta \Rightarrow_G \gamma$, então $\alpha \Rightarrow_G^* \gamma$

No Exemplo 4.6 vimos que podemos derivar $a*(a+b00)$ de G_1. Usando uma série de derivações. Agora temos uma maneira formal de dizer isso: $E \Rightarrow_G^* a*(a+b00)$. Com isso podemos definir qual é linguagem associada a uma dada gramática.

Definição 4.3.4 — A Linguagem de uma Gramática. Dada uma gramática $G = (V,T,P,S)$, a linguagem de G é $L(G) = \{w \in T^* \ : \ S \Rightarrow_G^* w\}$. Neste caso dizemos também que a linguagem $L(G)$ é *gerada* pela gramática G.

Exercício 4.17 Forneça um GLC que gere a linguagem $L = \{0^n 1^n \ : \ n \geq 1\}$. ■

Exercício 4.18 Forneça um GLC que gere a linguagem $L = \{0^i 1^j \ : \ i > j\}$. ■

Exercício 4.19 Considere o alfabeto Σ que contém os símbolos de "abertura" e "fechamento" de parêntesis, ou seja $\Sigma = \{(,)\}$. Forneça um GLC que gere a linguagem das strings de parêntesis balanceados sobre σ. Por exemplo, a string $(()(()))$ deve ser derivável, enquanto a string $())($ não deve ser derivável. ■

Exercício 4.20 Para responder as questões abaixo assuma que o alfabeto é $\Sigma = \{a,b,c\}$.
(a) Forneça uma gramática G tal que $L(G) = \{a^m b^n c^n : m,n \geq 0\}$.
(b) Forneça uma gramática G tal que $L(G) = \{a^n b^n c^m : m,n \geq 0\}$. ■

Exercício 4.21 Seja $\Sigma = \{a,b,c,d\}$. Forneça uma GLC para a seguinte linguagem:
$L = \{a^n b^n c^m d^m \ : \ n > 0, m > 0\} \cup \{a^n b^m c^m d^n ; n > 0, m > 0\}$. ■

4.3.3 Derivação mais a direita e mais a esquerda

Em algumas situações pode ser útil fixarmos que em uma derivação de uma string α nós sempre escolhemos aplicar a regra de produção à variável mais a esquerda presente em α (caso haja mais de uma variável na string α). Tal derivação é dita *mais a esquerda*. Escrevemos $\Rightarrow_{lm}$ e $\Rightarrow_{lm}^*$ (assumindo que G é conhecida). Similarmente temos *derivações mais a direita* e podemos representá-las usando os símbolos $\Rightarrow_{rm}$ e $\Rightarrow_{rm}^*$.

Exercício 4.22 Verifique que a derivação de G_1 do Exemplo 4.6 é mais a esquerda ■

Exercício 4.23 Forneça uma derivação mais a direita para a gramática G_1 do Exemplo 4.5. ■

■ **Exemplo 4.7** As linguagens $L(G_p)$ e $L(G_1)$ das gramáticas dos Exemplos 4.4 e 4.5 são linguagens livre de contexto, pois são geradas por gramáticas livre de contexto. ■

4.3.4 Árvores de análise sintática

Definição 4.3.5 — Árvore de derivação. Seja $G = (V,T,P,S)$ uma gramática livre de contexto e seja $w = w_1w_2...w_k$ uma string de $L(G)$. Seja $\mathscr{D}$ uma derivação w para G. Uma árvore de derivação para $\mathscr{D}$ é uma árvore com raíz S com a seguintes relações entre os nós:

- Se o passo $\alpha A\beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$ aparece na derivação $\mathscr{D}$ e $\gamma = \gamma_1\gamma_2...\gamma_l$, então o nó A é pai dos nós $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_l$, da esquerda para a direita.

Observe que, pela Definição 4.3.5, se $G = (V,T,P,S)$ é uma gramática e $w = w_1w_2...w_k$ é uma string de $L(G)$ então existe uma árvore de alguma derivação de w tal que a raíz seja S e as folhas sejam $w_1, w_2, ..., w_k$, da esquerda para a direita.

4.3.5 Ambiguidade de Gramáticas

Seja $G = (V,T,P,S)$ uma gramática e $w \in L(G)$. Se existem duas árvores de derivação diferentes para w, então dizemos que G é ambígua. Se existe exatamente uma árvore de derivação para cada string $w \in L(G)$, então G é uma gramática *não ambígua*.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Mesmo que uma string tenha várias derivações diferentes, isso não necessariamente quer dizer que a gramática seja ambígua. A gramática somente é ambígua se existir uma string que admita mais do que uma árvore de derivação.
- Por outro lado, no caso de apenas permitirmos derivações mais a esquerda e ainda assim pudermos obter mais do que uma derivação de uma dada string, podemos concluir que a gramática é ambígua. O mesmo pode ser dito no caso em que permitimos apenas derivações mais a direita.

Considere uma liguagem L tal que exista uma gramática livre de contexto G tal que $L(G) = L$. Podemos nos perguntar se sempre é possível obter G de forma que G não seja ambígua. A resposta é não, pois pois existem linguagens que são ditas *inerentemente ambíguas*. Mais precisamente, isso quer dizer que existem linguagens L que podem ser geradas por gramáticas, porém toda gramática G tal que $L(G) = L$, tem-se que G é ambígua. Um exemplo de tal linguagem é $L = \{a^nb^nc^md^m \ : \ n > 0, m > 0\} \cup \{a^nb^mc^md^n; n > 0, m > 0\}$ (relembramos que no Exercício 4.21 pedimos para o aluno apresentar uma gramática que gere esta linguagem), conforme o teorema enunciado abaixo:

Teorema 4.3.1 Seja $L = \{a^nb^nc^md^m \ : \ n > 0, m > 0\} \cup \{a^nb^mc^md^n; n > 0, m > 0\}$. Então toda gramática G tal que $L = L(G)$ é ambígua.

A demonstração do Teorema 4.3.1 pode ser vista em [HMU06] ou [Sip06]).

4.3.6 Equivalência entre APs e gramáticas livre de contexto

Enunciamos abaixo o teorema mais importante a respeito de APs e gramáticas:

Teorema 4.3.2 Uma linguagem L é livre de contexto $\Leftrightarrow$ existe um AP que aceita L.

4.3.7 APDs e ambiguidade de gramáticas

O Teorema 4.3.2 mostra que o conjunto de linguagens aceitas por APs é exatamente o mesmo conjunto das linguagens expressa por gramáticas. Por outro lado, vimos anteriormente que o conjunto das linguagens aceitas por APs não é o mesmo que o conjunto de linguagens aceitas por APDs. Além disso, vimos que algumas gramáticas são inerentemente ambíguas. Em outras palavras, o mundo das linguagens livres de contexto é bem mais sutil do que o mundo das linguagens regulares. Enunciamos a seguir dois teoremas que mostram a relação entre ambiguidade de gramáticas e APDs.

Teorema 4.3.3 Se $L = L(P)$ para algum APD P, então existe uma gramática livre de contexto não ambígua G tal que $L(G) = L$.

Teorema 4.3.4 Existe uma gramática livre de contexto não ambígua G tal que não existe nenhum APD que aceite G.

4.3.8 Exercícios

Exercício 4.24 Seja $A = \{a,b,c\}$ e seja L a linguagem $\{a^n bc^n \mid n \geq 1\}$ sobre o alfabeto A. Forneça um AP que aceite a linguagem L. ■

Exercício 4.25 Apresente um AP para a linguagem das strings palíndromas sobre o alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$. ■

Exercício 4.26 Observe que a linguagem da expressão regular $\underline{0^*1(0+1)^*}$ é a mesma linguagem da *gramática regular* $G = (V,T,P,S)$ com as regras abaixo:

$$S \to A1B$$
$$A \to 0A \mid \varepsilon$$
$$B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon$$

Forneça uma derivação mais a direita e uma derivação mais a esquerda da string 00101. ■

Exercício 4.27 Forneça uma gramática que tem como linguagem expressões bem formadas em lógica proposicional. Lembre que em uma expressão bem formada em lógica proposicional pode ter variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots$, operadores binários $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, operador unário $\neg$ e abertura e fechamento de parênteses. ■

Exercício 4.28 Considere a gramática $G = (V, T, P, S)$, onde

- $V = \{$ [STMT], [IF-THEN], [IF-THEN-ELSE], [ASSIGN] $\}$
- $T = \{$ $a = 1$, if, condition, then, else $\}$
- $S =$ [STMT]

Onde as regras são:

[STMT] → [IF-THEN] | [IF-THEN-ELSE] | [ASSIGN]

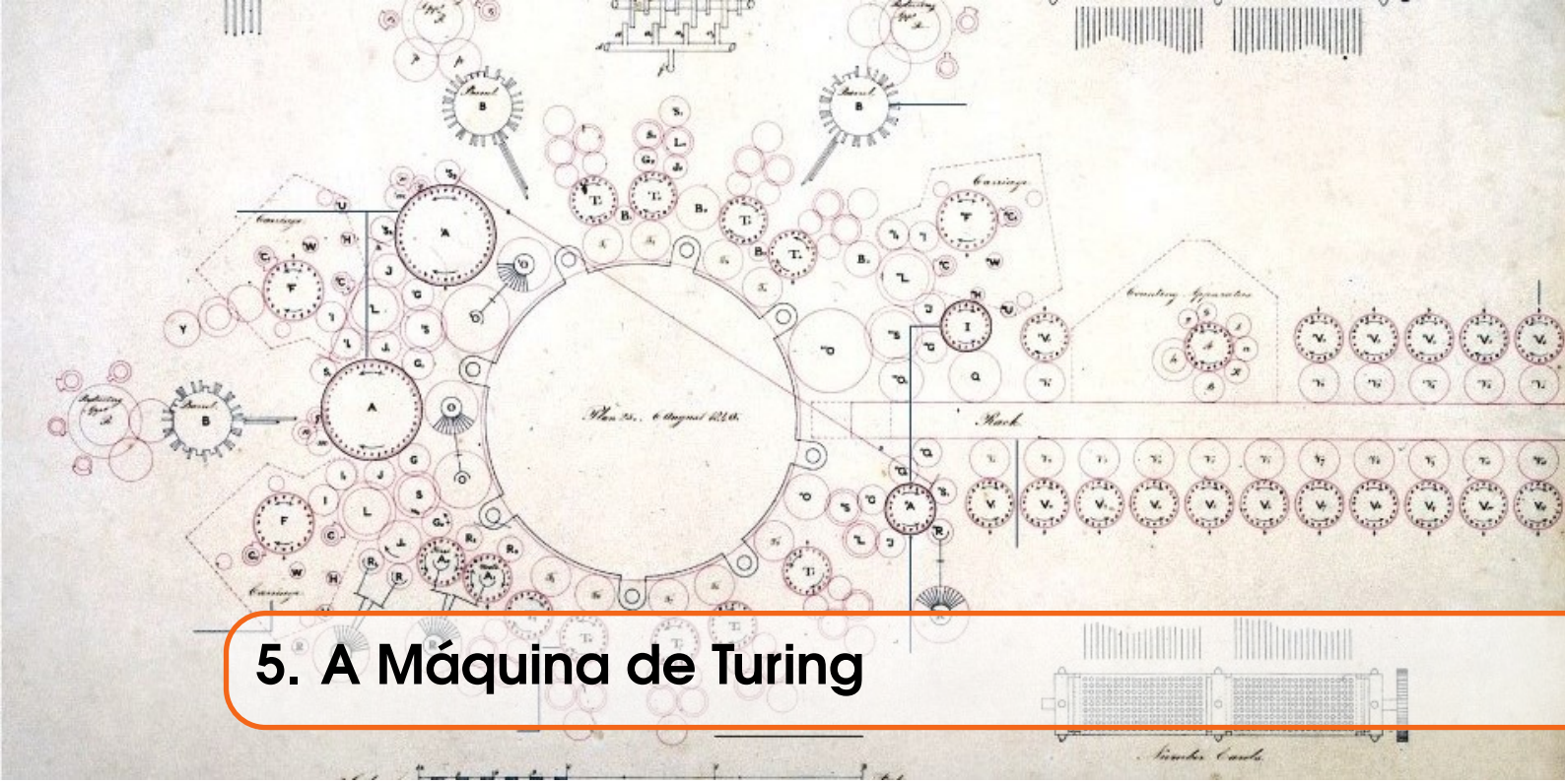
[IF-THEN] → if condition then [STMT]

[IF-THEN-ELSE] → if condition then [STMT] else [STMT]

[ASSIGN] → a=1

A gramática G acima é naturalmente o fragmento de uma linguagem de programação, entretanto G é ambígua. Mostre que a gramática é ambígua e forneça uma outra gramática não ambígua equivalente. ■

Parte 2: Máquinas de Turing e Computabilidade



5. A Máquina de Turing

Neste capítulo iremos apresentar a definição do modelo matemático proposto por Alan Turing em 1936, conhecido como Máquina de Turing. Este modelo matemático é a base tanto para a definição formal de algoritmo quanto para a definição formal para o que entendemos por um computador.

5.1 Problemas computacionais

Antes de falarmos de Máquinas de Turing, vamos brevemente relembrar algo que discutimos na Seção 2.2.1, que é a ideia de que problemas computacionais podem ser vistos como linguagens. Para citar alguns exemplos básicos, vimos que o problema da divisibilidade por 3, o problema de testar por palíndromos e o problema de testar primalidade podem ser modelados, respectivamente, pelas linguagens $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$, $L_{\text{PAL}} = \{w \in \{0,1\}^* : w = w^R\}$ e $L_{\text{P}} = \{w \in \{0,1\}^* : N(w) \text{ é um número primo}\}$.

> **REFLETINDO UM POUCO: PROBLEMAS SÃO SEMPRE LINGUAGENS?**
>
> Uma simplificação que estamos fazendo aqui é que sempre estamos lidando com problemas para os quais a resposta é SIM ou NÃO, ou seja, problemas para os quais as respostas consistem de apenas um bit de informação (afinal, SIM ou NÃO podem ser vistos como 1 ou 0). Problemas com estas características são conhecidos como *problemas de decisão*.
>
> Nós sabemos perfeitamente que nem todo problema computacional é um problema de decisão. Considere o problema, bastante elementar, que de multiplicar dois números naturais a e b. A resposta para este problema é o produto $a \cdot b$. Neste caso, novamente, podemos pensar que a resposta desejada é uma string, mais precisamente a string w tal que $N(w) = a \cdot b$. Nos capítulos subsequentes lidaremos com tais tipos de problemas mais gerais (i.e., problemas para os quais a resposta pode ser uma string com mais de um bit de informação), entretanto, é importante salientar que mesmo no cenário restrito a problemas de decisão já seremos capazes de explorar fundamentos e limites da computação.

A seguir, vamos formalizar a correspondência entre linguagens e problemas:

Definição 5.1.1 Um *problema de decisão* é uma linguagem sobre o alfabeto binário.

Do ponto de vista formal, dizemos que encontramos uma solução para um problema de decisão L quando apresentamos um "objeto matemático" que possa ser usado para determinar sistematicamente se uma dada string pertence ou não pertence à linguagem L. Em um vocabulário mais direto, dizemos que **solucionamos** o problema quando apresentamos um algoritmo para resolver o problema. Por exemplo, sabemos que para o problema L_3 existe um AFD que é capaz de distinguir números divisíveis por 3 de números que não são divisíveis por 3. Ou seja, para apresentarmos uma solução algorítmica para L_3, não precisamos do poder computacional de um AP e, menos ainda, do poder computacional de linguagens de programação modernas, uma vez que um mero AFD é o suficiente para dar uma descrição algorítmica para a solução do problema em questão.

No Capítulo 4 nós estudamos APs, que são modelos matemáticos capazes de expressar algoritmos que AFDs não são capazes, como algoritmos que testam se uma string é palíndroma. Entretanto, é possível demonstrar existem vários problemas que também não podem ser resolvidos por APs, incluindo o problema de testar a primalidade de um número. Entretanto, mesmo quem tem pouca experiência com programação, sabe que é fácil escrever um programa para se testar se um dado número é primo. Em outras palavras, **existem algoritmos** que não podem ser escritos na forma de AFDs ou APs, mas que podem ser expressos de maneira formal (afinal, linguagens de programação são formais e precisas). Uma conclusão, talvez não muito surpreendente, disso é que AFDs e APs sãos modelos matemáticos que não são capazes de expressar todos os algoritmos possíveis e imagináveis.

Na próxima seção veremos a definição de Máquinas de Turing, um modelo capaz de expressar qualquer algoritmo que possamos escrever em qualquer linguagem de programação conhecida. No Capítulo 6 discutiremos a tese científica que afirma que Máquinas de Turing não são apenas equivalentes a qualquer linguagem de programação conhecida, mas que são objetos matemáticos "corretos" para modelar o que entendemos intuitivamente por algoritmos.

> CONTEXTO HISTÓRICO: AFDS, APS E MÁQUINAS DE TURING
>
> Neste texto nós fomos introduzindo modelos de computação que são incrementalmente mais poderosos. Começamos com AFDs (que são equivalentes a AFNs e ε-AFNs), seguidos por APs e, neste capítulo, vamos introduzir Máquinas de Turing. Apresentar estes modelos nesta sequência é interessante do ponto de vista pedagógico, mas não reflete a sequência histórica em que estes modelos foram aparecendo na literatura científica. Curiosamente, Alan Turing propôs seu modelo na década de 30, enquanto que os modelos de computação vistos nos Capítulos anteriores apareceram na literatura por volta da década de 50 e 60.

O modelo que veremos nesta seção, chamado de Máquina de Turing, é semelhante a um AFD adicionado de uma fita de dados. A Figura 5.1 ilustra abstratamente o funcionamento de um AFD, um AP e uma Máquina de Turing. Embora, conceitualmente, uma Máquina de Turing seja bastante simples, precisamos esclarecer algum detalhes de "baixo nível" do modelo. Por exemplo, no modelo em que vamos trabalhar aqui, por conveniência, vamos assumir que a computação já inicia com a string x posicionada na fita de memória (ao invés de ser fornecida externamente, como ocorre com AFDs e APs). Na Seção 5.2, veremos tudo isso em detalhes.

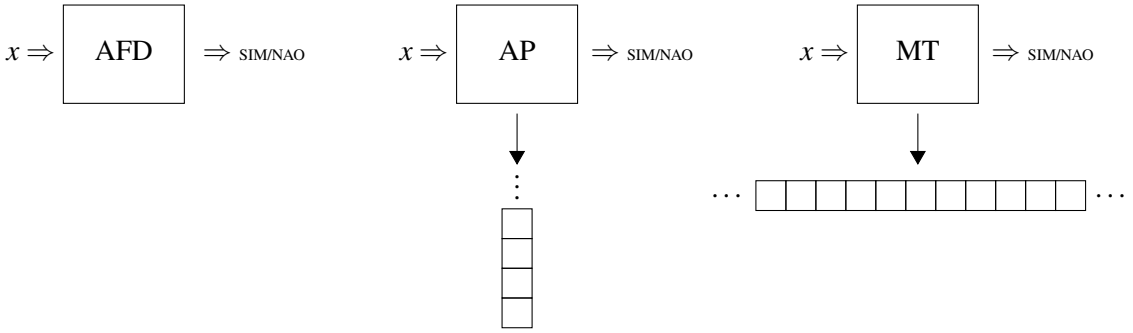


Figure 5.1: Comparação entre um AFD, um AP e uma Máquina de Turing. Os AFDs são máqinas de estados e APs são máquinas de estados com acesso a uma memória em forma de pilha de dados. A Máquina de Turing é essencialmente uma máquina de estados com uma memória em forma de *fita* de dados. A máquina pode acessar diferentes posições desta fita e ler/escrever um símbolos em tais posições.

5.2 Definição da Máquina de Turing

Primeiramente, vamos assumir que a string x de entrada no início da computação encontra-se localizada na fita de dados[1]. Isso simplifica um pouco a nossa definição da função δ. Para entender como Máquinas de Turing funcinam, vamos compará-las com com Autômatos com pilha:

Autômatos com pilha: o domínio da função δ de APs era uma tripla (estado, símbolo, símbolo), pois a cada momento a máquina se encontra em um dado estado lendo símbolos de dois lugares diferentes: string de entrada e topo da pilha;

Máquinas de Turing: o domínio da função δ de MTs é apenas um par (estado, símbolo), pois a cada momento a máquina estará em um determinado estado lendo uma posição específica da fita de dados.

Definição 5.2.1 — Máquina de Turing (MT). Uma *Máquina de Turing* é uma 7-tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, tal que:

- Q é o conjunto finito de estados
- Σ é o alfabeto de entrada. Quando não especificado, $\Sigma = \{0,1\}$
- Γ é o alfabeto da fita, tal que $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times D$ é uma função parcial e $D = \{L, R, S\}$.
- q_0 é o estado inicial
- B é o símbolo especial chamado de *símbolo branco*.
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

Figure 5.2: Alan Turing

O vocabulário que usaremos para descrever os passos computacionais de uma MT é o seguinte: a *cabeça de leitura* da máquina está *escaneando* uma determinada *célula* da fita de dados.

5.2.1 O funcionamento de uma Máquina de Turing

Vamos agora interpretar em detalhes o modelo matemático para entender como o processo de computação ocorre. Suponha que a função $\delta(q, X)$ retorna (q', X', d). Neste caso, o que acontece é

[1] Na literatura podemos encontrar algumas variações de modelos de Máquinas de Turing diferentes do definido aqui. O importante é que todas estas variações acabam tendo o mesmo poder de computação do nosso modelo.

que a se máquina estiver no estado q com o símbolo X na célula sendo escaneada na fita, então ela fará uma transição para o estado q', sobreescrevendo X na fita pelo símbolo X' e moverá sua cabeça de leitura da seguinte maneira: (1) Se $d = L$, então a cabeça de leitura se moverá para a esquerda (ou seja, no próximo passo a máquina estará escaneando a célula da fita do lado esquerdo da célula atual); (2) Se $d = R$, então a cabeça de leitura se moverá para a direita; (3) Se $q = S$, então a cabeça de leitura continuará na posição corrente.

Se a string de entrada é $x = x_1x_2...x_n$, assumiremos que no início da computação x se encontra na fita e a cabeça de leitura da máquina esta posicionada sobre x_1. Além disso, por definição, todos os demais símbolos da fita (antes de x_1 depois de x_n) são símbolos B. A Figura 5.3 exemplifica isso.

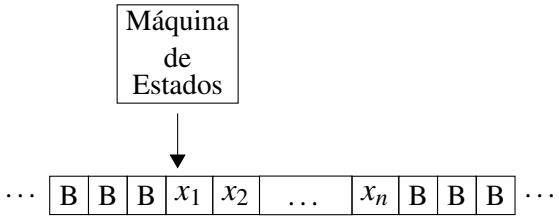


Figure 5.3: Máquina de Turing escaneando o primeiro símbolo da string $x = x_1x_2...x_n$ armazenada na fita.

Observe que os conceitos de fita e de cabeça de leitura da máquina não estão aparentes na definição da MT, que é apenas uma 7-tupla de objetos matemáticos, como conjuntos e elementos, e uma função "amarrando" estes objetos de determinada maneira específica. As ideias de fita e cabeça de leitura podem ser vistas como parte da interpretação de como o modelo computa ou como intuições do que seria um objeto físico que o modelo matemático descreve. Algo importante de observar a respeito de Máquinas de Turing, é que o objeto físico correspondente ao objeto matemático é extremamente simples: máquina de estados finita com uma fita de memória.

> VACAS ESFÉRICAS NO VÁCUO
>
> Uma frase que físicos bem humorados gostam de usar é a seguinte: "Considere uma vaca esférica no vácuo". A ideia é brincar um pouco com a ideia de que muitos argumentos da física são propostos usando objetos exageradamente simples em condições ideais. Um objeto simples como uma máquina de estados adicionada de uma fita de dados não deixa de parecer com a vaca esférica no vácuo dos cientistas da computação. A verdade é que, de fato, a simplicidade é um dos atrativos das Máquinas de Turing.
>
> Entretanto, o que torna este objeto idealizado realmente útil não é apenas a sua simplicidade (afinal, AFDs são ainda mais simples!), mas o fato de que ele, **apesar** da simplicidade, é tão poderoso quanto qualquer outro modelo conhecido para respresentar algoritmos.

Dissemos que MTs são "semelhantes" a AFDs (ao invés dizer "exatamente" AFDs) com a adição de uma fita de dados. O que ocorre é que há uma pequena diferença na máquina de estados de MTs em relação de AFDs. Em Máquinas de Turing, a função δ não precisa estar definida em todos os pares (q,X). Entretanto, é importante ressaltar que vamos tratar MTs como modelos determinísticos de computação (ao contrário de alguns outros modelos, como AFNs, por exemplo, em que a função δ poderia não estar definida para algumas entradas).

No caso de MTs, quando a função δ não está definida em um elemento de (q,X), a MT irá finalizar sua execução. Neste caso, diremos que a MT *para*. Observe que uma máquina "parar" pode ser visto como um passo puramente determinístico, i.e., a computação terminou, independente da entrada ter sido lida inteiramente ou não[2].

Algo importante de lembrarmos é que a causa do comportamento não determinístico de AFNs era a possibilidade de haver mais do que uma transição definida em algumas pares (q,a) e não o fato de algumas transições estarem indefinidas (este fato é explorado no Exercício 3.14). O que ocorre em nossa definição de MTs é que não há mais de uma transição definida em um certo par (q,X), tornando o comportamento da máquina determinístico. Dada uma MT $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$, a cada aplicação da função $\delta(q,X)$ ocorre exatamente um dos dois casos abaixo:

(1) A função δ é definida em (q,X). Neste caso o comportamento da MT é unicamente determinado pela tripla de $Q \times \Gamma \times D$ que a função δ retorna;

(2) A função δ não é definida em (q,X). Neste caso o comportamento da MT também é unicamente determinado, pois a máquina só tem uma escolha, que é parar sua execução. Na Seção 5.2.3 veremos que o estado em que MT parou sua execução (final ou não) é que vai definir se M aceita a string de entrada.

5.2.2 Diagrama de estados de uma Máquina de Turing

Podemos representar uma MT usando diagramas semelhantes aos diagramas de autômatos vistos anteriormente neste curso. A Figura 5.4, apresenta um exemplo de um diagrama de uma MT.

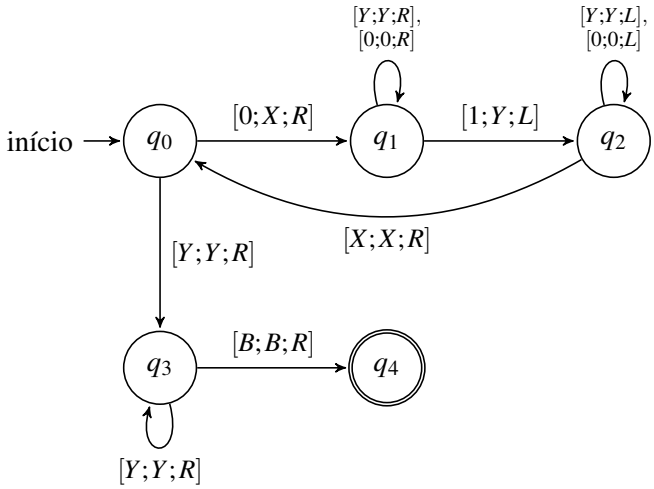


Figure 5.4: Diagrama de estados de uma Máquina de Turing.

Notação 5.1. *No diagrama de uma Máquina de Turing, uma transição de q_i para q_j com rótulo $[A;\ B;\ d]$ indica que se a máquina estiver no estado q_i com a cabeça de leitura escaneando um símbolo A na fita de dados, a máquina muda para o estado q_j, reescreve o símbolo A com o símbolo B e faz o seguinte com a cabeça de leitura: (1) Se $d = R$, então move a cabeça para a direita; (2) Se $d = L$, então move a cabeça para a esquerda; (3) Se $d = S$, então deixa a cabeça de leitura não se move neste passo da computação.*

[2]Isso é diferente do que ocorre com AFNs em que pensamos em termos de ramos que "morrem", dentre os muitos ramos de computações possíveis. Mais adiante, usaremos também o termo *morrer* no contexto de Máquinas de Turing *não* determinísticas (em tais casos o conceito de morrer terá uma interpretação semelhante ao conceito visto em AFNs).

Observe que neste diagrama há uma transição ligando q_0 à q_1 com o rótulo $[0;\ X;\ R]$. Isto significa que se a máquina estiver no estado q_0 com a cabeça de leitura lendo um símbolo 0 na fita, então a máquina muda para o estado q_1, reescreve o símbolo 0 com o símbolo X e move a cabeça de leitura para direita.

Ainda não definimos o exatamente o que é a linguagem de uma dada MT e o que significa uma MT "aceitar" ou "rejeitar" uma string, mas antecipamos que daremos definições semelhantes às definições de outros modelos de computação. Ainda assim, observe que as únicas strings que fazem a MT da Figura 5.4 atingir seu estado final são as strings que pertencem a linguagem $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$. Adicionalmente, note que uma vez que a máquina atinge o estado final, ela **obrigatoriamente** para sua execução (afinal, não há transições definidas no estado final).

Exercício 5.1 O exemplo da MT da Figura 5.4 é didático por ser simples. Entretanto, ele pode não ser tão interessante pelo seguinte motivo: A linguagem $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ é Livre de Contexto, ou seja, não precisaríamos de todo poder de uma Máquina de Turing para decidí-la. Por outro lado, é possível demonstrar que a linguagem $L_{abc} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ não é livre de contexto (a demonstração deste fato está fora do escopo deste curso) sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$. Apresente uma MT que decida a linguagem L_{abc}. ■

5.2.3 Linguagem de uma Máquina de Turing

De maneira semelhante ao que fizemos com APs, veremos o processo de computação de uma Máquina de Turing como uma sequência de configurações.

Definição 5.2.2 — Configuração. Dada uma Máquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, uma *configuração* de M é uma string $\alpha q \beta$ tal que $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ e $q \in Q$.

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ uma Máquina de Turing, $X_1 \ldots X_n \in \Gamma^*$ e $q \in Q$. A configuração[3] $X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n$ indica que M, depois de fornecida alguma certa string de entrada e a computação ter ocorrido algum certo número de passos, encontra-se no estado q, com a string $X_1 \ldots X_n$ em sua fita e com a cabeça de leitura posicionada sobre o símbolo X_i. Além disso, a fita contém uma sequência infinita de símbolos B tanto à esquerda de X_1 e quanto à direita de X_n. Note que alguns símbolos X_i podem ser eventualmente iguais a B.

A ideia agora é definir o símbolo $\vdash_M$ que, de maneira semelhante ao caso dos APs, representa um *passo computacional* de uma MT M. Entretanto, precisamos apresentar antes três casos particulares, que são os passos computacionais à esquerda, à direita ao centro:

Definição 5.2.3 — Passo computacional à esquerda. Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ uma Máquina de Turing e $X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n$ uma configuração de M. Se $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, então escrevemos

$$X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n \vdash_M^l X_1 X_2 \ldots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \ldots X_n.$$

Exceto no caso em que $i = 1$ e no caso em que $i = n$ e $Y = B$. Nestes casos temos o seguinte.

(1) Se $i = 1$, então escreveremos $qX_1 \ldots X_n \vdash_M^l pBYX_2 \ldots X_n$
(2) Se $i = n$ e $Y = B$, então escreveremos $X_1 X_2 \ldots X_{n-1} q X_n \vdash_M^l X_1 X_2 \ldots X_{n-2} p X_{n-1}$

Note que a definição acima reflete um passo da computação da MT com o movimento do cabeçote da máquina para a esquerda. Precisamos definir também os casos em que é válido sair de

[3] Em alguns livros usa-se o termo "descrição instantânea", ao invés de configuração.

uma dada configuração para alguma outra nos casos em que $\delta(q,X_i) = (p,Y,R)$ e $\delta(q,X_i) = (p,Y,S)$. Este é o objetivo do exercício a seguir.

Exercício 5.2 Apresente definições para os símbolos $\vdash_M^r$ e $\vdash_M^s$ de forma que eles se refiram a passos computacionais à esquerda e de centro, para os casos em que $\delta(q,X_i) = (p,Y,R)$ e $\delta(q,X_i) = (p,Y,S)$, respectivamente. ■

Definição 5.2.4 — Passo computacional $\vdash_M$. Dada uma MT M, um passo computacional de M, denotado $\vdash_M$, se refere a qualquer um dos três casos de passos computacionais $\vdash_M^l$, $\vdash_M^r$ ou $\vdash_M^s$.

De maneira semelhante a APs, podemos definir o símbolo $\vdash_M^*$ da seguinte maneira:

Definição 5.2.5 Dada uma MT M, o símbolo $\vdash_M^*$ é definido indutivamente:

Base: $I \vdash_M^* I$ para qualquer configuração I de M.

Indução: $I \vdash_M^* J$ se $\exists K$ tal que $I \vdash_M K$ e $K \vdash_M^* J$.

A seguinte definição será útil várias situações.

Definição 5.2.6 — Configurações iniciais e finais. Seja $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ e $w \in \Sigma^*$. A configuração q_0w é chamada de *configuração inicial de M com w*. Se $p \in F$, então qualquer configuração da forma $\alpha p \beta$, tal que α, β são strings de Γ^* quaisquer, é chamada de *configuração final de M*.

Exercício 5.3 Seja M a MT apresentada na Seção 5.2.2 e considere as strings $w_1 = 000111$ e $w_2 = 011$. Responda as seguintes questões:

(a) Qual é a configuração inicial de M com w_1?

(b) Apresente a sequência de configurações definida obtida pelos passos computacionais M quando a string w_1 é fornecida como entrada. Faça o mesmo para M com a string w_2 fornecida como entrada.

(c) Existe uma configuração final de M com w_1?

(d) Existe uma configuração final de M com w_2?

(e) Existe mais do que uma configuração final de M com w_1?

■

O próximo passo é definir o conceito de aceitação de strings por Máquinas de Turing.

Definição 5.2.7 — Strings aceitas e strings não aceitas por MTs. Seja $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ uma Máquina de Turing. Dizemos que uma string $w \in \Sigma^*$ é *aceita* por M se $q_0w \vdash_M^* I_F$, tal que I_F é uma configuração final de M. Caso contrário, dizemos que M *não aceita* w.

Definição 5.2.8 — Strings rejeitadas por MTs. Seja $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ uma Máquina de Turing. Dizemos que uma string $w \in \Sigma^*$ é *rejeitada* por M se $q_0w \vdash_M^* I_N$, tal que I_N não é uma configuração final de M e máquina para ao atingir a configuração I_N.

STRINGS NÃO ACEITAS E STRINGS REJEITADAS

Considere a computação de uma MT M quando uma string w é fornecida como entrada. Observe que se w é rejeitada por M, também podemos dizer que w não é aceita por M. Entretanto, se w não é aceita por M, não podemos concluir imediatamente que w é rejeitada por M, pois pode ocorrer da MT continuar executando indefinidamente sem nunca parar.

Exercício 5.4 Apresente a definição formal e o diagrama de uma MT M tal que, para qualquer strings w fornecida como entrada, a máquina M não aceita nem rejeita w. ■

Definição 5.2.9 — Aceitando linguagens com MTs. Dada uma MT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, a linguagem $L(M) = \{w \in \Sigma^* : q_0 w \vdash_M^* I_F$, tal que I_F é uma configuração final de $M\}$ é chamada de *linguagem de M* ou linguagem *aceita* por M.

Definição 5.2.10 — Decidindo Linguagens com MTs. Seja L uma linguagem. Se existe uma *Máquina de Turing que sempre para M* tal que $L(M) = L$, dizemos que M *decide* L.

Definição 5.2.11 — Linguagens Recursivas. Se existe MT que decide uma dada linguagem L, dizemos que L é uma *Linguagem Recursiva*. O conjunto de todas as linguagens recursivas é denotado por $\mathscr{R}$. Usaremos também o termo *Linguagem Decidível* para ser referir a a uma Linguagem Recursiva.

Definição 5.2.12 — Linguagens Recursivamente Enumeráveis. Se L é uma linguagem aceita por alguma Máquina de Turing, então a linguagem L é dita *Recursivamente Enumerável*. O conjunto de todas as linguagens recursivamente enumeráveis é denotado por $\mathscr{RE}$.

Neste momento é bom parar para refletir um pouco sobre os seguintes pontos:

- Ao contrário de AFDs e APs, na computação com Máqinas de Turing não existe o conceito de que a computação termina quando a máquina terminar de ler a string de entrada. Pode ocorrer de que algumas máquinas possam parar (seja aceitando ou rejeitando) antes de que terminem de ler a entrada. Pode também ocorrer que algumas máquinas continuem computando indefinidamente, ou seja, elas podem ficar em *loop infinito* (por exemplo, veja o Exercício 5.4).

- Mais precisamente, como a função δ é sempre indefinida para estados finais (note que F é excluído do domínio de δ na Definição 5.2.1), a máquina sempre para quando a string é aceita. Uma consequência disso é que se $L \in \mathscr{RE}$, então existe uma MT M tal que $\forall w \in L$, a máquina M *aceita w e para*. Por outro lado, observe que se uma dada string $w \notin L$ que não é aceita por M, então isso pode significar duas coisas: M pode ter parado sua execução em um estado que não é final (i.e., M rejeitou w) ou M pode ter ficado em loop infinito.

- A nossa busca por uma definição matemática formal para um algoritmo é essencialmente uma busca por uma definição genérica do o que seja um procedimento determinístico que retorne a solução para qualquer instância de um dado problema em um número **finito** de passos. Com isso, essa possibilidade das MTs continuarem computando indefinidamente em alguns casos não parece desejável. Da fato, estaremos particularmente interessado no conjunto das MTs que sempre param depois de uma quantidade finita de passos. Entretanto, a possibilidade deste nosso modelo matemático ser capaz de expressar procedimentos que possam rodar indefinidamente será útil adiante.

5.3 Um Algoritmo é uma Máquina de Turing que sempre para

A partir de agora passaremos usar os termos *MT que sempre para* e *Algoritmo* como sinônimos. Entretanto, como podemos especificar MTs fiquem em loop infinito, vamos tomar o seguinte cuidado: quando usarmos o apenas o termo "Máquina de Turing", sem especificamente dizer que a máquina sempre para, não *necessariamente* estaremos nos referindo a um algoritmo.

Definição 5.3.1 — Algoritmo. Um *Algoritmo* é uma Máquina de Turing que sempre para.

Observe conjunto das Linguagens Recursivas é o conjunto dos Problemas (de decisão) Decidíveis por Algoritmos.

Exercício 5.5 Considere a linguagem $L = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$. Seja M a MT da Figura 5.2.2.

(a) Prove que M decide L.
(b) Apresente uma MT M' que tenha o seguinte comportamento: Se $x \notin L$, então M' deve rejeitar x e se $x \in L$, M' deve entrar em *loop infinito*.
(c) Apresente uma MT M' que tenha o seguinte comportamento: Se $x \in L$, então M' deve aceitar x. Se $x \notin L$, M' deve entrar em *loop infinito*.
(d) Considere a máquina M' do item (c). É verdade que $L(M) = L(M')$?
(e) Ainda a respeito da máquina M' do item (c), é verdade que M' aceita L? É verdade também que M' decide L?

■

Exercício 5.6 Mostre que $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{RE}$. ■

Máquinas de Turing e Algoritmos

No Capítulo 6 veremos que o poder computacional de uma Máquina de Turing é equivalente ao poder computacional de um programa escrito por qualquer linguagem de programação como as que usamos cotidianamente, ou seja, qualquer programa já escrito, ou que venha a ser escrito, em linguagens como as que usamos hoje, poderia ser escritos neste modelo matemático proposto em 1936.

Algo importante que devemos nos antentar é que, quando usamos Máquinas de Turing na definição de algoritmos, não estamos dizendo a Máquina de Turing é o formalismo mais conveniente para se escrever algoritmos (caso não esteja convencido disto, pegue um algoritmo escrito em uma linguagem de alto nível, como Python e tente reescrevê-lo em forma de Máquina de Turing!), mas, ao invés disso, estemos dizendo que MTs são capazes de expressar o que queremos dizer como algoritmos.

A vantagem de trabalharmos com Máquinas de Turings é precisamente o fato de que podemos provar teoremas genéricos sobre algoritmos usando uma mera 7-tupla (independente do fato de que existem infinitos algoritmos longos e complicados, e que podem fazer chamadas recursivas disparando *threads* em paralelo e diversas outras complicações que poderíamos ter que lidar, se estivéssemos usando uma linguagem de alto nível). Em outras palavras, todos os programas concebíveis, independente de quão complicado podem ser, são instâncias particulares de uma 7-tupla da Definição 5.2.1.

Uma pergunta que responderemos no Capítulo 7 é a seguinte. Será que existe uma linguagem que esteja em $\mathscr{RE}$, mas que não esteja em $\mathscr{R}$? Uma outra pergunta próxima a esta é a seguinte: existe alguma linguagem qualquer que não esteja contida em $\mathscr{RE}$?

5.3.1 Exercícios

Exercício 5.7 Forneça uma MT $M_{\text{COPY}} = (C, \Sigma, \Gamma, \delta_{\text{COPY}}, c_0, B, F_{\text{COPY}})$ que tenha o seguinte comportamento quando uma string x é fornecida como entrada. A máquina deve adicionar ao fim da string x mais uma cópia de x (ou seja, a fita deverá conter xx), retornar a cabeça de leitura para a posição inicial. Em seguida a máquina deve aceitar e parar. ■

Exercício 5.8 Observe que a M_{COPY} a MT da Questão 5.7 não é o tipo máquina que normalmente vínhamos trabalhando nos capítulos anteriores do livro. Mais precisamente, M_{COPY} não é uma máquina projetada par se resolver um problema de decisão. Ainda assim, observe que a definição matemática do conjunto $L(M_{\text{COPY}})$ continua sendo aplicável. Com isso, responda qual é linguagem $L(M_{\text{COPY}})$ da máquina M_{COPY} da Questão 5.7. ■

Exercício 5.9 Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ uma MT que decida uma dada linguagem L qualquer. Mostre que é possível construir uma MT $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', B, F')$ tal que:

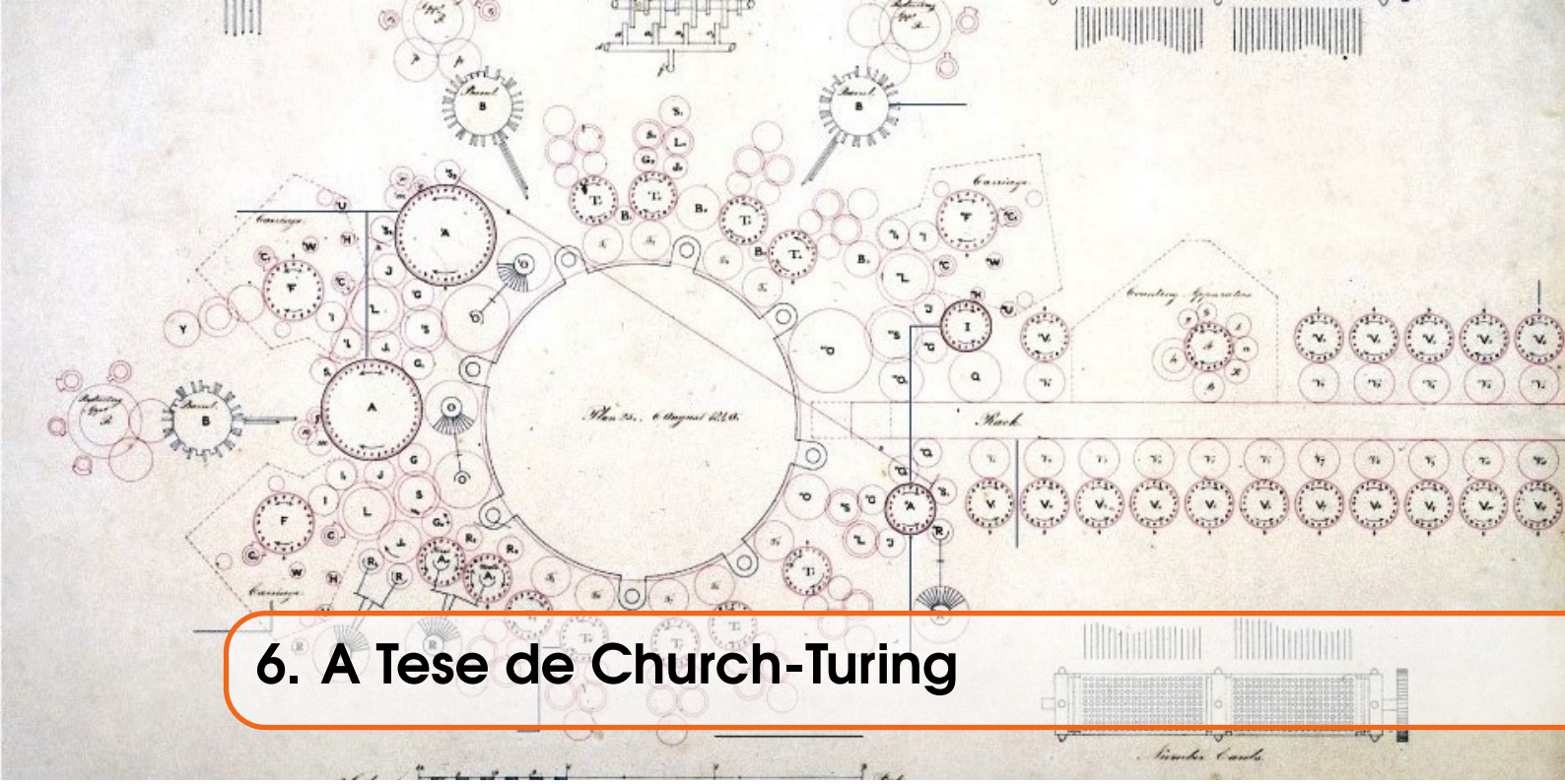
- M' também decide L
- Quando a máquina M' para, ela deixa na fita apenas um bit 1 ou 0, dependendo do caso de aceitar ou rejeitar a string. De maneira mais precisa, a máquina se comporta da seguinte maneira:
  - Se M' aceita w, então $q_0' w \vdash_M^* q_F 1$, onde $q_F \in F'$
  - Se M' rejeita w, então $q_0' w \vdash_M^* q_N 0$, onde $q_N \notin F'$

■

Exercício 5.10 Forneça uma definição formal para uma MT com 3 fitas. ■

Exercício 5.11 Forneça uma definição formal para uma MT com 1 fita "read only" onde a string de entrada é posicionada e 1 fita "read/write" que a MT pode utilizar como memória. ■

Exercício 5.12 Forneça uma definição formal para uma MT com 1 fita "read only" onde a string de entrada é posicionada e 1 fita "read/write" que a MT pode utilizar como memória e uma fita "read/right" onde a MT pode, por exemplo, escrever alguma string de "resposta". ■



6. A Tese de Church-Turing

Neste capítulo vamos discutir duas afirmações que, embora relacionadas, não são idênticas. A primeira delas é a afirmação de que a Máquina de Turing é uma *definição matemática* que captura a noção intuitiva do que entendemos um processo computacional. A segunda é a afirmação de que qualquer processo computacional *fisicamente realizável*, pode ser modelado matematicamente por uma Máquina de Turing. As duas afirmações são comumente chamadas de Tese de Church-Turing.

6.1 Perspectiva histórica

No início do século XX, alguns matemáticos observaram que o processo de demonstrar um teorema assemelhava-se a um procedimento mecânico: Dada uma afirmação, o que fazemos é aplicar certos axiomas e regras válidas de inferência para, passo a passo, concluir que a afirmação é verdadeira (ou refutá-la, caso seja falsa). Em outras palavras, alguns matemáticos começaram a especular se o raciocínio matemático poderia ser completamente definido em termos de um processo mecânico.

Isso motivou o matemático David Hilbert a propor, em 1928, um problema à comunidade matemática: encontrar um algoritmo que, ao receber como entrada uma afirmação matemática, responda SIM, se a afirmação é verdadeira, ou NÃO, se a afirmação é falsa[1]. Note que, da forma como Hilbert propôs o problema, ele sequer considerava a possibilidade de que tal algoritmo pudesse não existir.

Resolver o problema proposto por Hilbert, conhecido como *Entscheidungsproblem* (“problema da decisão”, em alemão), era uma tarefa ambiciosa, pois o objetivo era encontrar um algoritmo extremamente poderoso, capaz de automatizar todo o processo de demonstração matemática. Qualquer pessoa seguindo tal algoritmo seria, em princípio, capaz de provar qualquer teorema[2]. Em 1931, Kurt Gödel demonstrou que o projeto de Hilbert esta fadado ao fracasso, provando os famosos

[1] Ou seja, SIM se a afirmação é um *teorema* ou NÃO, se é uma uma afirmação falsa. Observamos que o que chamamos aqui de afirmação matemática pode ser formalmente definida usando algum sistema lógico formal, usando certos axiomas e certas regras de inferência definidas a priori.

[2] O matemático Gottfried Leibniz também já havia refletido sobre esse mesmo problema no século XVII; no entanto, àquela época, ainda não se dispunha do ferramental matemático necessário para formular a questão com precisão.

teoremas da incompletude, que afirmam que nem todo teorema verdadeiro pode ser provado dentro de um sistema axiomático consistente e suficientemente expressivo[3]. Ainda assim, a esperança de Hilbert permanecia válida em um cenário mais restrito: talvez existisse um algoritmo que, ao menos, decidisse se uma afirmação era ou não demonstrável dentro de um sistema formal fixado.

Em 1936 Alonzo Church e, logo em seguida, Alan Turing mostraram que mesmo essa expectativa era inalcançável, ou seja, mesmo no âmbito delimitado por Gödel, o algoritmo proposto por Hilbert não poderia existir. Um ponto fundamental que devemos destacar é que, para demonstrar a inexistência de um algoritmo, o primeiro passo necessário era tornar preciso o que se entende por *algoritmo*. Alonzo Church utilizou um formalismo matemático chamado *cálculo* λ, enquanto Alan Turing desenvolveu um outro modelo, conhecido hoje como Máquina de Turing. Ambos os modelos são equivalentes em poder computacional, mas o modelo de Turing se destacou por sua simplicidade e intuição, oferecendo uma interpretação "física" do conceito de algoritmo que tornava mais convincente a ideia de representar qualquer processo mecânico.

Adicionalmente, Turing mostrou que seu modelo possuía uma propriedade conhecida como *universalidade*. Essa propriedade está relacionada ao conceito de "computadores de propósito geral", ou seja, dispositivos capazes de receber *algoritmos como entrada* e executá-los passo a passo. Veremos em detalhes o significado deste conceito no Capítulo 7. A definição da Máquina de Turing, o conceito de universalidade e a interpretação física destes conceitos marca início do que conhecemos por ciência da computação. Estes conceitos estabelecem também a base necessária para entendermos a Tese de Church-Turing, o que é o objetivo central deste capítulo.

6.2 Máquinas de Turing são equivalentes a linguagens de programação

Antes de entrarmos em uma discussão mais profunda para entender a afirmação de que Máquinas de Turing expressam o que queremos dizer com algoritmos, vamos começar com algo mais concreto. Nosso primeiro passo será apresentar um teorema que afirma que Máquinas de Turing são capazes de representar algoritmos escritos em linguagens de programação.

Primeiramente, não é difícil observar que projetar uma Máquina de Turing para realizar uma tarefa é muito mais trabalhoso do que escrever um programa usando linguagens de programação de alto nível para realizar a mesma tarefa. Entretanto, o fato de que temos mais trabalho escrevendo um algoritmo usando um dado formalismo em comparação outros formalismos não tem relação com o *poder comutacional* do formalismo em questão. Basta pensar que, embora escrever um programa em Linguagem Assembly é muito mais trabalhoso do que o mesmo programa em Python, tal programa **pode** ser escrito em qualquer uma das duas linguagens.

Nesta seção nós vamos enunciar um teorema que afirma que Máquinas de Turing são equivalentes aos algoritmos escritos em linguagens de programação usadas hoje em dia. A demonstração do teorema não envolve nenhum conceito abstrato complicado, mas é muito longa e técnica e não é o nosso objetivo deste livro. O nosso objetivo é obsevar que isso é um **Teorema Matemático**! A demonstração, caso algum estudante curioso tenha interesse em verificar, pode ser vista na seção 2.6 do livro [PAP94]. Para que possamos enunciar o teorema, vamos definir um modelo matemático equivalente a programas escritos em assembly, uma vez que um programa escrito em uma linguagem de programação de alto nível pode sempre ser expresso por um programa em assembly[4].

[3] A grosso modo, Gödel mostrou é que mesmo para a aritmética, que é uma parte da matemática, um sistema lógico capaz de expressá-la, ou será incompleto (não conseguirá provar todas as verdades) ou será inconsistente (permitirá provar falsidades). Não há como um sistema lógico que expresse a aritmética ter os dois: completude e consistência.

[4] O trabalho de um compilador é converter um programa de alto nível em um programa assembly, que, por sua vez, é essencialmente uma sequência de intruções que o processador do computador é capaz de executar.

6.2.1 Programas Assembly e Máquinas RAM

Um programa assembly pode ser definido como uma sequência de instruções. Nosso primeiro passo é definir exatamente o formato que uma instrução podem ter. Para que possamos apresentar tal definição, vamos definir os seguintes conjuntos de strings sobre o alfabeto $\{A,...,Z,1,...,9,\hat{}\}$:

- $A_1 = \{\text{HALF}, \text{HALT}\}$
- $A_2 = \{\text{ADD}, \text{SUB}, \text{READ}, \text{STORE}, \text{LOAD}, \text{JUMP}, \text{JPOS}, \text{JZERO}, \text{JNEG}, \text{ZERO}\}$
- $B = \{j, \hat{}j\}$, onde j é uma string de $\{0,...,9\}$.

Definição 6.2.1 — Instrução assembly. Uma *instrução* π é um objeto matemático que pode ter duas formas:
(1) π pode ser um elemento do conjunto A_1
(2) π_i pode ser um par (a,b), $a \in A_2$ e $b \in B$

Além disso, há ainda as seguintes restrições sobre os tipos de intruções do tipo (2):
- Se $b = \hat{}j$, então obrigatoriamente $a \in \{\text{READ}, \text{STORE}\}$

As intruções do tipo (2) são chamadas de *instruções com argumentos*. Uma instrução com argumentos (a,b) é tipicamente escritas na forma $a\ b$. Por exemplo, escrevemos STORE 12 ou invés de escrever $(\text{STORE}, 12)$.

Definição 6.2.2 — Programa Assembly (PA). Um *programa assembly* é uma sequência finita $\Pi = \pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ de *instruções*.

Ao invés escrevemos uma sequência de instruções separadas por vírgulas, como na Definição 6.2.2, normalmente escrevemos programas assembly uma instrução por linha.

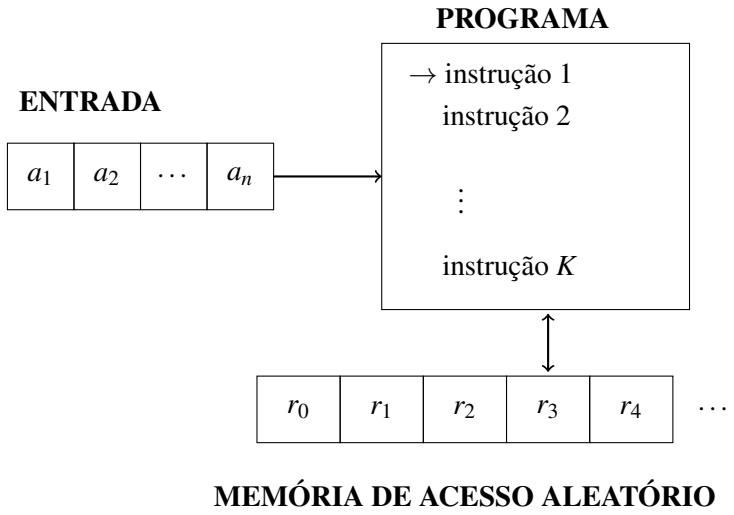
■ **Exemplo 6.1** Um exemplo de programa assembly (que não necessariamente computa algo útil):

```
ADD     33
READ    10
READ    ^10
HALF
STORE   12
HALT
```

■

Nós sabemos que Programas assembly são capazes de resolver bem mais do que apenas problemas de decisão (Máquinas de Turing também tem esta propriedade, como veremos no próximo capítulo). Entretanto, uma vez que estamos lidando, por hora, apenas com problemas de decisão, será essencial definir o conceito de aceitação de linguagens por programas assembly.

Apesar de não estarmos nos preocupando com a semântica exata de PAs (veja o quadro "Semântica de instruções e execução de programas"), vamos introduzir de alguns conceitos semânticos elementares elementares para facilitar o entendimento do modelo. Primeiramente, precisamos pensar como um PA faz a leitura da string de entrada. Dado um PA, vamos assumir que o i-ésimo bit da string de entrada $x = x_1x_2...x_n$ que este programa toma é acessível usando-se a instrução READ i. Depois disso, a ideia geral é que a execução do programa consiste de uma série de instruções sendo *chamadas* (não necessariamente em ordem, uma vez instruções como JUMP servem para mudar o fluxo de execução do programa).



O último fragmento de semântica que precisamos esboçar aqui, é assumir que em nosso modelo, a aceitação ou rejeição de uma string de entrada é feita escrevendo-se um determinado bit para 0 ou 1 em algum "registrador" especial. Isso é feito chamando-se a instrução LOAD i. Um Programa Assembly para quando a instrução HALT é chamada.

SEMÂNTICA DE INSTRUÇÕES E EXECUÇÃO DE PROGRAMAS

Em uma MT, quando falamos de fita e cabeça de leitura, nos referimos ao que fisicamente seria a implementação do objeto matemático Máquina de Turing (note que a definição matemática de uma MT contém apenas conjuntos, elementos e uma função – fita e cabeça de leitura se referem ao que a máquina "faz" ao ser executada). De maneira análoga, a interpretação do que "faz" cada uma das instruções assembly, também é algo externo a definição matemática de um Programa Assemby. Essa interpretação do modelo em termos de algum dispositivo físico com memória e processador é normalmente é chamada de *semântica* da linguagem. Por exemplo, a semântica da instrução HALF é a seguinte: o valor contido em dado registrador do processador central do computador é dividido por 2.

Se pensarmos um pouco a fundo, mesmo em linguagens de alto nível, a semântica de cada instrução se refere, em última análise, a diferentes processos físicos ocorrendo na máquina relacionadas as diferentes instruções que a linguagem oferece. Não iremos apresentar a semântica a fundo de cada uma das instruções da nossa definição de linguagem Assembly, assim como não vamos definir precisamente o que significa um termo intimamente relacionado que é o termo "executar" um Programa Assembly (para tal precisaríamos formalizar o conceito de *configuração* de uma máquina física associada a PAs), uma vez que estes conceitos são intuitivos para quem tem experiência com programação. Nosso foco aqui é apenas entender que o poder de *expressividade* de um PA é o mesmo poder de expressividade de uma MT. Para os alunos curiosos, indicamos, novamente, a seção 2.6 do livro [PAP94], onde a semântica das instruções apresentadas aqui é apresentada de maneira (mais ou menos) detalhada.

Definição 6.2.3 A linguagem de um programa assembly Π, denotada $L(\Pi)$ é o conjunto de strings x de entrada satisfazendo a seguinte propriedade: *Se a execução do programa com a entrada x para e na última vez que a instrução* LOAD i *for chamada o valor de i for diferente de 0, então x é aceita.* Caso a última chamada à instrução LOAD i tenha o valor $i = 0$ ou nenhuma instrução do programa tipo LOAD i é chamada na execução do programa, a entrada é rejeitada.

Com isso, vamos enunciar o teorema a seguir, extremamente importante para entendermos a Tese de Church-Turing:

Teorema 6.2.1 Para todo Programa Assembly Π, existe uma MT M tal que $L(M) = L(\Pi)$.

Ideia da Prova: Podemos criar máquinas de turing diferentes que executam cada uma das diferentes instruções assembly. A partir daí, para cada PA $\Pi = \pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$, podemos criar MTs $M_1, M_2, ..., M_k$ correspondentes. Com isso, o Programa Π pode ser simulado por uma MT M que pode ser construída como uma combinação das MTs $M_1, M_2, ..., M_k$. □

Em outras palavras, se existe um programa assembly que resolve um problema, então existe uma Máquina de Turing que resolve o mesmo problema. Como já mencionamos, a prova deste teorema pode ser vista na seção 2.6 do livro [PAP94]. A outra direção do enunciado do teorema também é verdade, ou seja, para cada MT existe um PA equivalente que resolve o mesmo problema, o que significa que os dois modelos de computação são equivalentes.

Teorema 6.2.2 Para toda MT M, existe um Programa Assembly Π, tal que $L(\Pi) = L(M)$.

Ideia da Prova: A demonstração vem do fato de que podemos escrever programas para "simular" MTs usando linguagens de alto nível (e portanto, também em Linguagem Assembly). □

6.3 Máquinas de Turing e outros modelos de computação

Além de linguagens de programação modernas, uma série de outros modelos matemáticos são equivalentes a Máquinas de Turing. Alguns destes modelos foram propostos ainda na primeira metade do século XX, sendo os mais famosos o *cálculo* λ e as *funções* μ*-recursivas*. Estes modelos foram propostos com o objetivo puramente matemático de servir de definição de algoritmo, sem a intenção, a princípio, de ter correspondência com objetos físicos que possam ser de fato implementados. Com o avanço da ciência da computação, uma quantidade enorme de outros modelos matemáticos apareceram na literatura e provaram-se equivalentes a Máquinas de Turing.

Na frente prática, além da equivalência de MTs a computadores atuais, a pesquisa em áreas cujo objetivo é a construção de computadores usando substratos físicos "não tradicionais" também tem fornecido modelos matemáticos que são equivalentes a Máquinas de Turing. Ainda é um pouco cedo para afirmar quais destes modelos advindos da tentativa de se usar substratos físicos não tradicionais refletem tecnologias que podem sair do papel. De qualquer forma, vamos exemplificar isso usando duas áreas que tem sido mais ou menos proeminentes nos dias de hoje. Em menor escala, uma destas áreas é de computação molecular, mais precisamente, computação usando moléculas de DNA[5]. A outra área que usaremos como exemplo, e que é umas das mais ativas atualmente, é a área de computação quântica.

[5]Há uma série de formalismos usados na área de computação molecular e comutação com DNA. No contexto em que o objetivo é realizar *computação de propósito geral*, um dos modelos mais conhecidos é chamado de aTAM (da sigla em ingês "*abstract tile assembly machine*").

COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

A ideia que sustenta a pesquisa em computação quântica é a seguinte: de acordo com as leis da mecânica quântica, a evolução no tempo de um conjunto de objetos de um sistema físico isolado (estes objetos podem ser átomos, elétrons, fótons, etc) podem ser modelados com precisão arbitrária por uma abstração chamada de *circuito quântico*. A ideia básica é usar o estado de um objeto (ou conjunto de objetos) para registrar informação e fazer o processamento desta informação por meio da manipulação dos estados em que estes objetos possam se encontrar. Entratanto, como aqui os objetos usados são suficientemente pequenos, os tipos de manipulações possíveis (i.e., os tipos de de transformações permitidas que levam um estado a outro) são regidas pelas leis da mecânica quântica.

Teorema 6.3.1 — Teorema da Equivalência. Os seguinte modelos matemáticos são equivalentes a Máquinas de Turing:

(1) Variações de Máquinas de Turing (e.g., MT com múltiplas fitas, MT com uma fita infinita em apenas uma direção, MT cuja a entrada esteja em uma fita "read only" e as demais múltiplas fitas sejam "read-write", MT com alfabetos que não sejam binários);
(2) Cálculo λ, funções μ-recursivas, APs com 2 pilhas e outros modelos matemáticos;
(3) Linguagens de programação modernas (e.g., C, C++, Java) e algoritmos em pseudo-código;
(4) Modelos matemáticos de computação "não tradicional", mas que sejam advindos de objetos físicos com implementação viável (e.g., diversos modelos de computação molecular);
(5) Modelo de Circuitos Quânticos

O Teorema 6.3.1, que nos referiremos como "Teorema da Equivalência", será útil em diversas situações de agora em diante neste livro. Observamos que o enunciado deste teorema está um pouco vago, pois não definimos com precisão vários destes modelos matemáticos (e.g., Cálculo λ, funções μ-recursivas, Linguagem C, Linguagem Java, etc) e usamos vocabulário impreciso, como "outros modelos matemáticos" e "MT com outros alfabetos"[6]. O nosso objetivo central neste ponto não é apresentar os detalhes destas equivalências e sim reforçar que estas equivalências são **Teoremas Matemáticos**. Além disso, observamos o seguinte: no item (4) do enunciado do Teorema nós dissemos "implementação viável". Isso tem conexão com algo que vamos discutir na próxima seção, que é a Tese de Church-Turing.

6.4 O que diz a Tese de Church-Turing

A *Tese de Church-Turing (TCT)* é afirmação de que Máquinas de Turing "capturam o conceito de computação efetiva". Há duas interpretações que normalmente são feitas desta tese. A primeira interpretação é que a TCT é uma definição matemática. A segunda intepretação é da TCT como uma afirmação sobre o mundo físico.

6.4.1 A Tese de Church-Turing: Uma definição matemática

Para entendermos a interpretação da TCT como sendo uma definição matemática, vamos usar uma analogia. Imagine que alguém faça a seguinte afirmação: *A definição de função contínua*

[6] Note que, a rigor, MTs com alfabetos diferentes nunca vão aceitar as mesmas strings, pois por definição tais strings terão diferentes símbolos. Entretanto, a ideia aqui é que é possível codificar qualquer conjunto de símbolos usando apenas o alfabeto binário e estabelecer uma correspondência de um conjunto de strings quaisquer e um conjunto de string do alfabeto binário.

usando ε's e δ's, como normalmente vemos em um curso de Cálculo, exprime corretamente o conceito de continuidade de funções[7].

Note que a ideia intuitiva que temos de funções contínuas, ou seja, funções que podemos "desenhar sem tirar a caneta do papel", é subjetiva. O que acontece é que esta subjetividade impede que possamos fazer descobertas matemáticas a respeito de funções contínuas. Uma vez que parece ser óbvio que não exista alguma função contínua (de acordo com nossa intuição de continuidade) que não possa ser expressa em termos desta definição usando ε's e δ's, então **definimos** funções contínuas desta maneira. Portanto, funções que não podem ser expressas desta maneira por definição não são contínuas e funções que podem ser expressas desta maneira **por definição são contínuas**.

> A DEFINIÇÃO DE CÍRCULO
>
> A ideia de que uma definição é "obviamente" a definição correta para algum conceito pode parecer escorregadia, pois parece haver um salto entre a nossa intuição e a definição formal. Mas este salto sempre existe quando vamos apresentar uma definição matemática para algum conceito. Isso vale para a definição de algoritmos, para a definição de funções contínuas e até mesmo para definições bastante muito simples, como a definição de um círculo.
>
> Para esclarecer isso, veja que embora todos nós tenhamos uma ideia intuitiva do que seja um círculo, para que possamos entender círculos com mais precisão e para que possamos fazer afirmações matemáticas e prová-las a respeito de círculos, precisamos apresentar uma definição precisa. A definição "óbvia" é: Para todo $r \in \mathbb{R}$ e todo $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, um círculo é *um conjunto C de pontos de $\mathbb{R}^2$ a distância r de (c_1, c_2)*. Embora alguém possa questionar se isso é que temos em mente por um círculo, o que ocorre é que os matemáticos acham que "obviamente" qualquer definição de círculo, mesmo que um pouco diferente desta definição, acaba sendo equivalente a esta definição de alguma forma. Quando afirmamos isto, temos uma tese de que esta é a definição "correta" para o que entendemos como círculo.

O ponto chave é que, de maneira semelhante ao que fazemos com outras definições matemáticas, quando dizemos que se existe uma MT que sempre para para decidir um dado problema, então **por definição existe um algoritmo para o problema** e se não existe uma MT que sempre para para decidir um dado problema, então **por definição não existe um algoritmo para o problema**.

> COMPUTABILIDADE DEFINIDA EM TERMOS MECÂNICOS
>
> *"Computabilidade mecanicamente definida foi estabelecida por Alan Turing sem dúvida alguma."* – Kurt Godel

6.4.2 A Tese de Church-Turing: Uma afirmação empiricamente verificável

Uma outra interpretação, é a de que a TCT é uma *afirmação empiricamente verificável*. Esta interpretação tem a vantagem de prover um critério empírico para se refutar tal afirmação, caso ela venha a ser falsa. O critério que nos referimos é o mesmo usado para qualquer afirmação sobre o mundo físico[8,9]: a afirmação deve ser descartada caso seja refutada experimentalmente. O que a

[7] Para quem não lembra, segue a definição: Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e A um intervalo de $\mathbb{R}$. Dizemos que f é *contínua em I* se para todo $a \in A$, é verdade que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

[8] O termo "mundo físico", embora informal, exprime o que queremos dizer. Sendo um pouco mais rigorosos, o que queremos dizer aqui é que estamos nos restringindo ao domínio do pode ser verificado experimentalmente pelo método científico.

[9] Em particular, é importante remover algumas imprecisões filosóficas associadas a tal projeto. Uma confusão superficial, mas comum, é a seguinte: "Mas nós nem mesmo conhecemos as leis 'finais' da física para querer ter tal modelo!". O ponto é que diferentes áreas da ciência, como física, química, geologia, ou ciência da computação estão interessadas em diferentes aspectos da realidade (o termo preciso é que estas áreas tem *epistemologias diferentes*).

Tese de Church-Turing afirma é o seguinte:

> TESE DE CHURCH-TURING: *Se um problema computacional pode ser resolvido por algum dispositivo fisicamente realizável, então ele pode ser resolvido por uma Máquina de Turing*

No Capítulo 7, veremos que existe um problema de decisão, chamado *problema da parada*, que não pode ser resolvido por Máquinas de Turing. Uma vez que uma consequência da TCT é que nenhum objeto fisicamente realizável seja capaz de resolver este problema, saberíamos precisamente o que tipo de evidência empírica precisaríamos para refutar a TCT: um aparato que resolva consistentemente o problema da parada. O consenso atual, que vem de uma série de direções (o que sabemos sobre as leis da física e mesmo sobre os fragmentos do que sabemos a respeito da direção que a física parece estar tomando) é que a existência de tal aparato físico parece ser bastante improvável.

No enunciado da TCT, quando nos referimos a um problema computacional, não nos referimos apenas a problemas de decisão. Neste contexto estamos nos referimos a algo mais amplo, que é uma relação entre certas entradas e certas saídas. Por conta disto, a TCT tem uma implicação interessante: Uma vez que podemos ver o estado de um objeto físico qualquer como a instanciação de alguma informação, representada por uma string (i.e., a descrição do estado que o objeto se encontra é a string), sabemos que a evolução no tempo de qualquer objeto físico realizando uma computação bem definida, não importando quão complicado seja este objeto, pode ser simulado por uma Máquina de Turing.

> CONEXÕES ENTRE COMPUTAÇÃO E FÍSICA
>
> A Tese de Church-Turing tem aceitação razoável no meio científico por que ao observarmos a natureza em seu nível mais fundamental e levarmos em consideração como objetos se comportam, quais estados que estes objetos podem estar, quais são seus graus de movimentos possíveis, e quais são os tipos de evolução que estes objetos podem sofrer no tempo, as restrições impostas pelas leis da mecânica quântica parecem sustentar a tese. Um ponto chave é que a descrição de um objeto pode ser aproximado com precisão arbitrária pelo modelo matemático conhecido com circuito quântico[1], e sabemos que estes modelos podem ser simulados por Máquinas de Turing (enunciamos este fato no Teorema da Equivalência). A citação abaixo expressa bem a vantagem que alguns cientistas vêem ao intepretar TCT como afirmação sobre a realidade física e porque a comunidade científica tende sustentar esta versão da tese.
>
> *Podemos ficar debatendo sem chegar a lugar nenhum sobre exatamente o que a Tese de Church-Turing quer dizer. Eu, pessoalmente, sempre preferi a versão da TCT em que ela é uma afirmação, empiricamente falsificável, a respeito dos tipos de problemas computacionais que podem ser resolvidos no mundo físico. Esta versão tem a enorme vantagem de tornar claro o que significa falsificá-la: uma revolução na física.* — Scott Aaronson
>
> [1] Apesar do nome *circuito quântico*, este modelo não é exatamente um circuito no sentido em que estamos acostumados. Este modelo é um formalismo para descrever sistemas quânticos evoluindo no tempo.

Embora, é claro, cientistas devem sempre estar antentos ao que há de sólido em outras ciências (incluindo a física) na medida do possível. A segunda confusão é que, em ciências empíricas, sempre que falamos em "todo e qualquer", deve-se entender que estamos falando em "todo e qualquer, *dentro do que pode ser aferido pelo que entendemos como método científico*".

Contínuo vs Discreto

A Tese de Church-Turing, como qualquer questão científica, é passível de debate. Existe uma área da computação, conhecida como *hiperpcomputação*, que é dedicada a estudar modelos que não podem ser simulados por Máquinas de Turing, questionando a TCT. Entretanto, a maioria das propostas que questionam a TCT são tipicamente variações da antiga ideia de computação analógica[1], uma ideia que parece esbarrar em alguns obstáculos postos pela física teórica contemporânea. Em particular, o resultado mais importante nesta linha, demonstrado na década de 70, é chamado de *Limitante de Bekenstein* [Aar13]. Embora alguns parâmetros usados na mecânica quântica sejam contínuos, o Limitante de Bekenstein impõe um limite a quantidade de informação (que pode ser pensada em termos da quantidade de estados que podem ser observados em um sistema) que uma região finita do espaço pode conter.

[1] Não nos referimos aqui a alguns dispositivos do nosso dia a dia que são ditos analógicos. Um dispositivo analógico, no sentido que nos referimos, seria capaz de realizar tarefas como, por exemplo, armazenar dados que requerem uma quantidade infinita de informação (e.g., armazenar o número π, com seus infinitos dígitos) e recuperar esta informação sem erros. No momento não há comprovação científica de seja possível realizar tais tarefas.

Além da TCT estar amaparada pelo que sabemos de concreto sobre a mecânica quântica (e também por alguns resultados vindos de áreas da fronteira da física teórica), uma questão relevante que ampara a tese é a questão experimental. Embora seja comum que apareçam propostas de modelos que desafiam a TCT, até hoje todas as tentativas de implementação de algum modelo que desafie a tese falharam. A cada vez que isso ocorre, o consenso em torno da Tese de Church-Turing acaba sendo fortalecido, o que é normal acontecer com teses, princípios ou leis em qualquer área de investigação científica: cada vez que um experimento falha em refutar uma hipótese científica, a hipótese ganha mais força.

Turing e Inteligência artificial

Uma consequência bastante discutida da Tese de Church-Turing é a afirmação de que cérebros humanos, sendo estes objetos físicos, podem ser simulados por Máquinas de Turing. Isso, como esperado, gera algumas controvérsias, especialmente quando o assunto discutido é inteligência artificial. Em virtude disso, primeiramente é importante esclarecer algumas coisas que **não** estão sendo dito na afirmação acima. Primeiramente três pontos triviais, depois algo mais profundo.

O que a afirmação não diz (pontos triviais):

(1) A afirmação não diz que já sabemos como fazer tal simulação, pois não sabemos exatamente como cérebros funcionam.

(2) A afirmação também não é a de que a simulação de um cérebro por uma Máquina de Turing é a melhor estratégia para se implementar inteligência artificial.

(3) A afirmação também não diz que a arquitetura específica de um cérebro é semelhante a arquitetura de computadores atuais (embora estudiosos digam que cérebros tenham evoluído para processar informação, processamento de informação pode ser feito usando-se muitas arquiteturas diferentes).

Estas questões acima são interessantes e dignas de pesquisa, mas não são relevantes para a TCT, pois a afirmação em questão é mais modesta: Se a TCT estiver correta, um cérebro, como qualquer objeto físico, pode ser simulado em princípio por uma Máquina de Turing. Esta observação apareceu juntamente com nascimento computação e o próprio Alan Turing trabalhou nesta questão em seu famoso artigo em que o *Teste de Turing* é proposto.

O que a afirmação não diz (questão mais profunda):

Algo importante de se observar é que *inteligência*, *consciência* o *mente*, não são assuntos simples do ponto de vista filosofico. O mais importante aqui é observar que a TCT, da maneira como normalmente é enunciada, não faz nenhuma menção tais conceitos. Para o leitor interessado em filosofia da mente, sugerimos o livro de Edward Feser [Fes19], que é um texto introdutório, acessível e com muitas referências.

6.5 A Tese de Church-Turing estendida

Nesta seção vamos apresentar uma segunda afirmação que, ao contrário da TCT, **não** é consenso científico. Mas por que vamos perder tempo discutindo uma afirmação que possivelmente não é correta? O ponto é que entender esta segunda afirmação, conhecida como *Tese de Church-Turing Estendida*, é importante para compreendermos os desenvolvimentos recentes em teoria da computação, em particular, na área de computação quântica.

O seguinte teorema enuncia um fato importante com relação a equivalência de Máquinas de Turing a outros modelos de computação.

Teorema 6.5.1 Uma MT simula os modelos (1) a (4) do Teorema da Equivalência com eficiência polinomial

Assim como no Teorema da Equivalência, enunciamos do Teorema 6.5.1 de maneira um pouco vaga, sem definir exatamente o que queremos dizer com *eficiência polinomial*. Entretanto, alunos familiarizados com análise de algoritmos entendem o que o enunciado do teorema quer dizer: não é possível definir algoritmo em qualquer um dos modelos (1), (2), (3) e (4) tal que número de passos necessários para a execução deste algoritmo seja exponencialmente menor do que o número de transições que a Máquina de Turing faria na simulação do algoritmo.

Observe que só incluímos os itens (1) a (4) e deixamos o item (5) de fora do enunciado do Teorema 6.5.1. O que acontece é que conjectura-se que não seja verdade que Máquinas de Turing simulem Circuitos Quânticos com eficiência polinomial. O modelo de Circuitos Quânticos é, até o momento, o único modelo com contrapartida em objetos físicos para o qual conjectura-se tal fato. O modelo de circuitos quânticos é a base da pesquisa em computação quântica.

A construção de computadores quânticos é possível em princípio, mas alguns pesquisadores questionam esta possibilidade. Este questionamento significa dizer que o modelo de circuitos quânticos não são modelos fisicamente realizáveis[10]. O que estes pesquisadores fazem é afirmar que não somente a TCT é sólida, mas que ela é mais sólida do que o consenso atual. Esta afirmação, conhecida como Tese de Church-Turing Estendida (TCTE), e que data da década de 60, afirma o seguinte: *todo problema computacional que possa ser resolvido de maneira eficiente no mundo físico, pode ser resolvido de maneira eficiente por uma Máquina de Turing*. Neste enunciado, a palavra eficiente quer dizer polinomial. Ao contrário do que acontece com a TCT, a TCTE não é consenso científico, pois tal afirmação sugeriria que o modelo de circuitos quânticos não é realista. Entrentanto, o consenso científico é que o modelo de circuitos quânticos é simplesmente consequência das leis da mecânica quântica.

[10] Computadores quânticos pequenos (i.e., contendo poucos *qubits*) já foram construídos. O que estes pesquisadores questionam é a possibilidade do modelo não ser escalável.

ALGORITMOS QUÂNTICOS

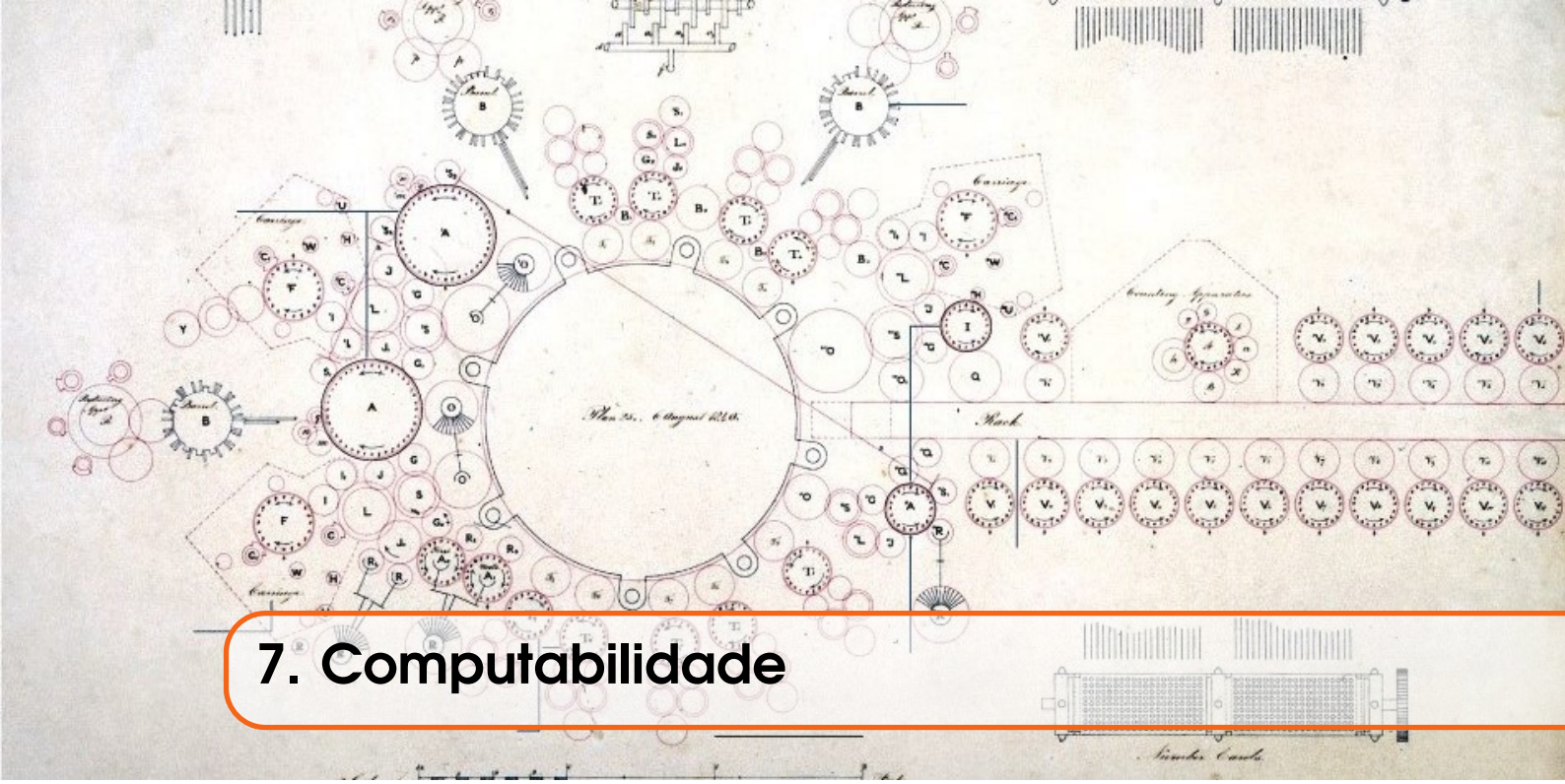
Atualmente, alguns problemas admitem algoritmos quânticos (i.e., algoritmos escritos na forma de circuitos quânticos) que os resolvam que são exponencialmente mais eficientes do que os melhores algoritmos clássicos que conhecemos. Quando nos referimos a algoritmos clássicos, queremos dizer Máquinas de Turing ou qualquer um dos modelos (1) a (4) do Teorema da Equivalência, por exemplo. Entretanto, ninguém foi capaz de provar matematicamente não existam algoritmos polinomiais clássicos para tais problemas, mas atualmente trabalha-se com a conjectura de que eles não existam e que o modelo de computação quântica é exponencialmente mais eficiente do que o modelo clássico para alguns problemas específicos. Esta conjectura é conhecida como a conjectura de que $P \neq BQP$.

Observe que mesmo que prove-se tal conjectura e conclua-se que o modelo de computação quântica é inerentemente mais eficiente que o modelo de MTs e, além disso, a construção de computadores quânticos seja realmente possível, como espera-se que seja, o que estes dois fatos juntos fazem é simplesmente refutar a TCTE. Por outro lado,**a TCT continua completamente intacta**, pois em termos do que se é possível computar (ou seja, ignorando questões de eficiência) computadores quânticos e clássicos são equivalentes. Em outras palavras, o conjunto de problemas que podem ser resovidos por computadores quânticos é precisamente o conjunto das linguagens recursivas.

O que ocorre atualmente é que embora computadores quânticos sejam capazes de resolver precisamente os mesmos problemas que computadores clássicos, tem-se bastante interesse na construção de computadores quânticos, pois alguns problemas computacionais que eles poderiam resolver de maneira exponencialmente mais rápida são bastante importantes.

6.5.1 Exercícios

Exercício 6.1 Descreva sucintamente o que é Tese de Church-Turing (TCT) vista como afirmação sobre o "mundo físico" e qual é a vantagem e a desvantagem dela sobre a versão da TCT vista apenas como definição matemática. ■



7. Computabilidade

Neste capítulo vamos estudar dois resultados centrais em Teoria da Computação. Os dois resultados estão presentes em um artigo famoso, publicado por Alan Turing em 1936. O primeiro resultado é a prova de que existem problemas que não podem ser resolvidos por algoritmos. O segundo é a existência de uma Máquina de Turing Universal, uma instância de uma Máquina de Turing, que é capaz de simular todas as possíveis Máquinas de Turing. A Máquina de Turing Universal pode ser vista como um modelo matemático que descreve o que entendemos por um computador.

7.1 Funções computáveis

Uma Máquina de Turing (que sempre para) resolvendo um problema de decisão pode ser vista como uma máquina computando uma função booleanas $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ usando a seguinte ideia: Se a string binária w fornecida como entrada é aceita pela máquina, estabelecemos que $f(w) = 1$, e se a string w é rejeitada, estabelecemos que $f(w) = 0$.

Sabemos que existem MTs que podem não parar para algumas entradas. Com isso em mente, vamos instroduzir a seguinte notação:

Notação 7.1. *Suponha que uma string binária x é fornecida como entrada para uma MT M. Dependendo do resultado da computação, escreveremos:*

- $M(x) = 1$ *quando M aceita x e para.*
- $M(x) = 0$ *quando M rejeita x e para.*
- $M(x) = \nearrow$ *quando M não para com a entrada x.*

Observe que uma consequência da Notação 7.1 é que se M é um algoritmo, $\forall x \in \Sigma^*, M(x) \neq \nearrow$.

Definição 7.1.1 — Função booleana computável. Uma função $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ para a qual existe uma MT M tal que $\forall x \in \{0,1\}^*,\ M(x) = f(x)$, é denominada uma *função booleana computável*.

Observe que *funções booleanas computáveis* são equivalentes a problemas decidíveis.

Em algumas situações vamos lidar com MTs que podem tomar como entrada uma string x e computar uma string resultante y como saída. O que queremos dizer com "string resultante" é a string que ficou na fita depois que a MT **parou**. O objetivo de introduzir a notação a seguir é tornar esta ideia precisa.

Notação 7.2. *Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ uma Máquina de Turing e $x \in \Sigma^*$. Suponha que $y = y'y''$ e que $q_0 x \vdash_M^* y' q_P y''$, onde $q_P \in Q$ e a máquina M para após antingir a configuração $y' q_P y''$. Então escrevemos $M(x) = y$.*

Observe que a expressão $M(x) = y$ pode gerar alguma ambiguidade e devemos tomar cuidado para não confundir a notação acima com a Notação 7.1 no caso da string y conter apenas um bit. Por exemplo: É possível que M aceite x parando com a string $w = 1$ na fita. De qualquer forma, isso não será um problema se deixarmos sempre claro o que queremos dizer com a expressão "$M(x)$". Além disso, conforme visto no Exercício 5.9, quando estamos lidando com problemas de decisão, podemos é sempre possível escrevermos $M(x) = 1$ ou $M(x) = 0$ sem ambiguidade nenhuma.

Definição 7.1.2 — Função computável. Uma função $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ para a qual existe uma MT M tal que $\forall x \in \Sigma^*, M(x) = f(x)$, é denominada uma *função computável*.

Note que uma *função booleana computável* é um caso particular de uma *função computável*.

7.2 Codificando objetos matemáticos em binário

Em geral, quando estamos pensamos em alto nível de abstração, um algoritmo pode tomar uma variedade de objetos matemáticos como entrada e retornar também diferentes tipos de objetos matemáticos. Por exemplo, podemos pensar em um algoritmo tomado vários grafos como entrada e retornando uma lista de números inteiros como saída. Como no caso de Máquinas de Turing, tanto a entrada quanto a saída são strings, precisamos sempre ter em mente que os objetos matemáticos que estivermos lidando, são representados por strings. Nesta seção vamos esclarecer alguns detalhes "técnicos" relativos a tais representações.

7.2.1 Notação para Máquinas de Turing tomando vários argumentos de entrada

Considere o algoritmo implementado em linguagem C que toma como entrada dois números e determina se um é múltiplo do outro. Vamos chamar este algoritmo de MULTIPLO. Se a entrada for, por exemplo, os números 5 e 10, a notação que usaríamos seria MULTIPLO(5,10) e diríamos que a saída do algoritmo é SIM.

Pelo Teorema da Equivalência sabemos que existe uma MT M que realiza a mesma tarefa. Entretanto, os não nos preocupamos muito com os "detalhes de implementação" de M. Por exemplo, será que poderíamos considerar a entrada como sendo a concatenação dos dois números em binário na fita (ou seja, a concatenação de 101 com 1010)? Usando a Notação 7.1, teríamos $M(1011010) = 1$, pois a MT começaria a computação com a string 1011010 em sua fita e a aceitaria, uma vez que $N(1010)$ é múltiplo de $N(101)$. Mas isso realmente faz sentido? Dada a string de entrada 1011010, como a MT faz para advinhar onde termina um número e onde começa o outro nesta string? A string 1011010 poderia também ser a concatenação de 10110 com 10. E agora?

Como já dissemos, nós não vamos nos preocupar tanto com estes detalhes de baixo nível, pois isto não é realmente relevante e acabaria nos tirando o foco das questões realmente importantes que queremos lidar. Ainda assim, como é bem comum lidarmos múltiplos argumentos de entrada concatenados em uma única string, é sempre bom levantar esta questão para que estejamos certos que as nossas definições estão corretas e que estamos trabalhando em terreno firme.

MÚLTIPLAS ENTRADAS: SOLUÇÃO SIMPLES

Uma possível maneira de lidar com este tipo de tecnicalidade seria usar uma Máquina de Turing que tenha o alfabeto $\{0,1,\#\}$. O Teorema da Equivalência diz que o poder de computação de MTs com diferentes alfabetos é o mesmo das MTs que estamos usando (i.e., MT com alfabeto binário). Observe que podemos usar o símbolo # como separador. No exemplo do ínicio desta seção, poderíamos representar o par $(5,10)$ usando a string 101#1010.

Na realidade esta é uma dificuldade que é encontrada na prática em computadores de hoje em dia. Esta dificuldade é superada de diversas maneiras e é uma das razões pela qual usa-se sistemas de codificação (e.g., tabela ASCII, que nos permite definir símbolos de espaçamento, quebra de linha, etc) padronizados.

A partir da discussão assima, podemos usar a seguinte notação:

Notação 7.3 (Notação para MTs tomando múltiplos argumentos)**.** *Se MT toma múltiplas strings de entrada, digamos, a uma n-tupla de strings* $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$*, dependendo da conveniência, usaremos tanto a notação* $M(x_1,x_2,...,x_n)$ *quanto a notação* $M(x_1x_2x_3....x_n)$.

O que a Notação 7.3 faz é essencialmente encapsular as rotinas de baixo nível que Máquinas de Turing tem que executar para lidar com várias strings de entrada.

7.2.2 Representando objetos matemáticos em binário

Assim como objetos matemáticos são representados em baixo nível com símbolos 0 e 1 em computadores reais, teremos que representar os objetos sendo manipulados por nossas MT como strings binárias. Entretanto, precisamos tomar cuidado para não confundir o objeto matemático[1] em si com sua representação binária.

Dado um objeto matemático S , usaremos a notação $\llcorner S \lrcorner$ para nos referir a string que codifica S.

Notação 7.4 (Codificação em binário)**.** *Dado um objeto matemático S, a notação* $\llcorner S \lrcorner$ *se refere a string que representa a codificação de S em binário. A maneira exata de como codificar o objeto S depende do tipo de objeto em questão e deve sempre estar clara no contexto.*

Considere, por exemplo, um grafo $G = (V,E)$. O que queremos dizer com a notação 7.4 é que os objetos matemáticos G e $\llcorner G \lrcorner$ não significam a mesma coisa. O primeiro é um grafo, ou seja, um par de conjuntos, enquanto o segundo é uma string.

Podemos pensar em várias maneiras de se representar um grafo usando uma string e, em geral, nós não vamos nos preocupar com a maneira exata de se fazer isso. Entretanto, quando estivermos usando uma representação binária para algum objeto matemático, precisamos ter certeza que de que é possível realizar tal tarefa (por exemplo, se r é um número real, o objeto $\llcorner r \lrcorner$ pode não fazer sentido). No caso de um dado grafo G, a maneira mais comum de representá-lo é concatenar os bits da matriz de adjacência de G linha por linha[2], como no exemplo a seguir.

■ **Exemplo 7.1** Seja $G = (V,E)$, onde $V = \{v_1,v_2,v_3\}$ e $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$. Como a matriz de adjacência deste grafo é $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, então a string que representa o grafo é $\llcorner G \lrcorner = 011101110$. ■

Com isso isto em mente, se quisermos que uma MT M tome como entrada um grafo G, escreveríamos $M(\llcorner G \lrcorner)$ (ao invés de escrever $M(G)$, o que não faz sentido, pois a entrada de uma MT é uma strings e não um grafo).

[1] Ou seja, qualquer objeto formalmente bem definido, como, por exemplo, um número inteiro, um grafo, uma equação, uma expressão matemática, etc.

[2] Caso estivéssemos lidando com um grafo com peso nas arestas a sua matriz de adjacência não seria binária, mas mesmo neste caso não é difícil conceber uma representação binária para o mesmo.

O ponto mais importante que queremos levantar nesta seção é que Máquinas de Turing também poder ser representadas por strings binárias, afinal, MTs também são objetos matemáticos bem definidos, finitos e discretos. Usando novamente nossa analogia com computadores reais, um algoritmo implementado em alguma linguagem de programação (que sabemos que são equivalentes a MTs) armazenado na memória de um computador nada mais é do que uma sequência de bits na memória deste computador. Ou seja, um algoritmos pode ser vistos como strings. No caso de Máquinas de Turing, se uma MT M toma como entrada uma outra MT M', a ideia é que a MT M' nada mais é do que uma sequência de 0's e 1's na fita da MT M.

Exercício 7.1 Mostre como representar uma MT qualquer usando uma string binária. (Dica: MTs são definidas por sua tabela de transições.) ∎

Exercício 7.2 Seja M a Máquina de Turing da Figura 5.2.2. Apresente a string $\llcorner M \lrcorner$. ∎

7.3 Máquinas de Turing, pseudo-códigos, generalidade e especifidade

Considere a tarefa de se resolver o problema, já bastante discutido neste livro, do teste de primalidade de números inteiros. Solucionar tal problema significa, com já sabemos, encontrar uma Máquina de Turing que decida a linguagem L_P. Obviamente, pela equivalência de MTs e linguagens de programação modernas (vimos isso no Teorema da Equivalência), não precisamos ir tão longe, pois basta mostrarmos um o pseudo-código de um algoritmo de primalidade, como o algoritmo a seguir.

Primo: (N)
1: **if** $N = 1$ **then**
2: Retorna Falso
3: **for** $i = 2; i \leq \sqrt{N}; i$++ **do**
4: **if** N mod $i = 0$ **then**
5: Retorna Falso
6: Retorna Verdadeiro

Neste momento é natural nos questionarmos se, agora que sabemos que Máquinas de Turing são equivalentes a nossa noção intuitiva de algoritmo, vale mesmo a pena usarmos o formalismo matemático de Máquinas de Turing para nos referirmos a algoritmos. Em situações concretas, como no caso acima, claramente é bem mais conveniente apresentar um algoritmo em pseudo-código do que apresentar uma Máquina de Turing. Vamos usar a regra geral, descrita no quadro abaixo:

PSEUDO-CÓDIGOS OU MÁQUINAS DE TURING?

Sempre que estivermos pensando em problemas específicos, como testar se um grafo é conexo, testar se uma matriz é inversível, verificar se uma sequência de números está ordenada, etc, nós não iremos usar Máquinas de Turing. Ao invés disse iremos usar algoritmos escritos na forma de pseudo-código.

Por outro lado, em situações em que estamos falando sobre algoritmos de maneira abstrata, como é comum em teoria da computação, Máquinas de Turing são a escolha adequada. Em teoria da computação é comum situações em que queremos provar afirmações do tipo "não existe nenhum algortimo M com determinada propriedade" ou "para todo algoritmo M, determinado fato ocorre". A vantagem de se usar Máquinas de Turing é que temos uma definição precisa e bastante simples de objeto matemático que condensa todo e qualquer algoritmo possível.

7.4 O problema da Parada

O objetivo desta se Seção é apresentar um problema, conhecido como *Problema da Parada*, que não admite nenhum algoritmo que o resolva. O problema, visto de maneira intuitiva, é o seguinte: dada uma MT M arbitrária juntamente com uma string x arbitrária, queremos saber se M eventualmente finaliza a sua execução ou se M fica em loop infinito quando a string x é fornecida como entrada. Formalmente o problema é o seguinte:

Definição 7.4.1 — O problema da parada. O *problema da parada* é definido pela linguagem $L_{\text{H}} = \{\llcorner M \lrcorner\, x \ : \text{ tal que } M \text{ é uma MT}, x \in \Sigma^* \text{ e } M(x) \neq \nearrow\}$.

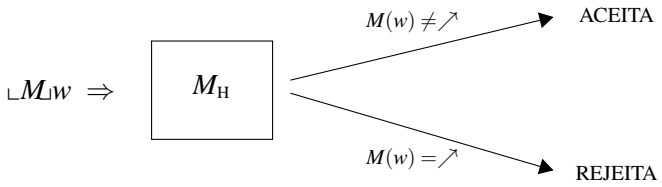
Resolver o problema da parada significaria fornecer uma MT M_{H} que decida L_{H}. Ou seja, uma MT M_{H} que tome $(\llcorner M \lrcorner, x)$ como entrada e que tenha o seguinte comportamento:

- Se $M(x) = 0$ ou $M(x) = 1$, então $M_H(\llcorner M \lrcorner, x) = 1$.
- Se $M(x) = \nearrow$, então $M_{\text{H}}(\llcorner M \lrcorner, x) = 0$.

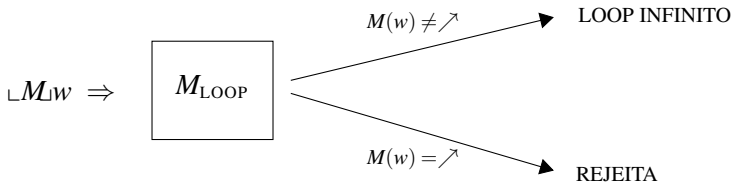
Teorema 7.4.1 — Teorema da Parada. Não existe algoritmo que decida a linguagem L_{H}.

Prova: Suponha que exista uma Máquina de Turing M_{H} que decida L_{H}. Vamos mostrar que isso levará a uma contradição e, portanto, concluiremos que M_{H} não existe por redução ao absurdo.

A máquina M_{H} tem o seguinte comportamento quando a string $\llcorner M \lrcorner w$ é fornecida como entrada. Se $M(w) = \nearrow$, então a máquina M_{H} deve rejeitar a string de entrada. Por outro lado, se $M(w) \neq \nearrow$ (note que não importa se $M(w) = 0$ ou se $M(w) = 1$), então M_{H} deve aceitar a string de entrada. O diagrama a seguir ilustra o funcionamento de M_{H}:

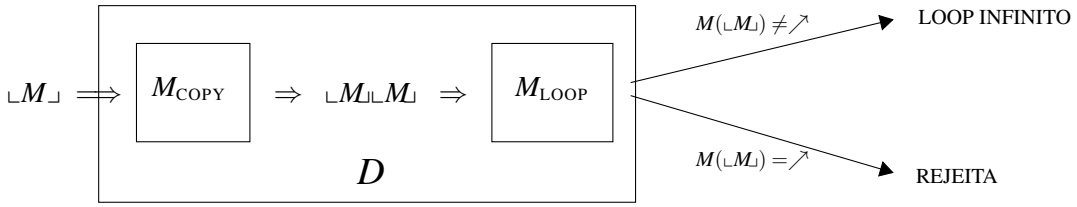


Dado que a máqina M_{H} existe, vamos agora concluir que a máquina M_{LOOP}, que vamos descrever a seguir, também existe. A máquina M_{LOOP} é essencialmente M_{H} com uma pequena modificação. Dada uma string que M_{H} aceite, ao invés da máquina aceitar e parar, a máquina deve entrar em loop infinito. o funcionamento de M_{LOOP} é descrito abaixo.



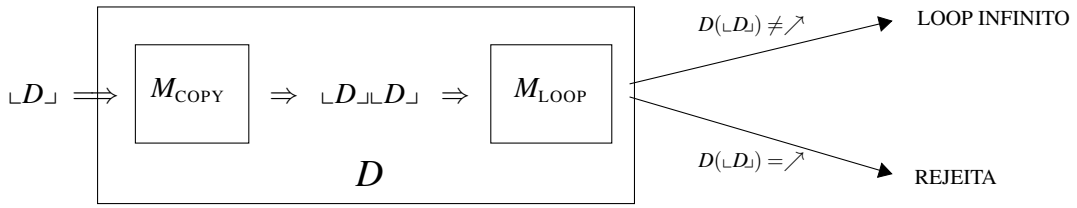
Antes de seguir em frente, devemos antentar ao tipo de argumentação que estamos usando. Estamos trabalhando com a existência de M_{H}, pois esta foi a nossa suposição inicial, mas será que, de fato, M_{LOOP} existe? Nosso argumento foi que podemos obtê-la fazendo uma modificação em M_{H}. Para termos certeza que o nosso argumento está correto, devemos ser capazes de mostrar, passo a passo, como obter M_{LOOP} a partir de M_{H} (o objetivo do Exercício 7.6 é provar formalmente que se M_{H} existe, então M_{LOOP} também existe).

Agora vamos construir uma MT D que é uma MT composta de duas MTs distintas. A primeira parte é uma máquina M_{COPY}, que duplica a string de entrada (a construção desta máquina é o objetivo do Exercício 5.7), ou seja, $\forall w \in \Sigma^*$, $M_{\text{COPY}}(w) = ww$, e a segunda parte consiste da MT M_{LOOP}, que descrevemos anteriormente. O funcionamento de D é descrito pela figura a seguir).



A construção formal de D é intuitiva, mas os estudantes que gostam de demonstrar teoremas de maneira extrememete rigorosa são encorajados a resolver o Exercício 7.7, cujo objetivo é mostrar que, de fato, se as máquinas M_{COPY} e M_{LOOP} existem, então D também existe.

O comportamento de D com a entrada $\llcorner M \lrcorner$ é o seguinte: $D(\llcorner M \lrcorner) = \nearrow \Leftrightarrow M(\llcorner M \lrcorner) \neq \nearrow$. Considere agora a string $\llcorner D \lrcorner$ (sabemos que esta string existe, pois D existe). Agora vejamos o que acontece quando fornecemos a string $\llcorner D \lrcorner$ como entrada para a máquina D:



A conclusão que chegamos é que $D(\llcorner D \lrcorner) \neq \nearrow \Leftrightarrow D(\llcorner D \lrcorner) = \nearrow$, o que é uma contradição lógica. Com isso concluímos que M_H não existe. □

7.5 A Máquina de Turing Universal

Considere uma MT $\mathscr{U}$ que toma como entrada uma outra máquina M e uma string x e simule o comportamento de $M(x)$, ou seja, $\mathscr{U}$ "executa" a MT M quando M tem como entrada a string x.

A ideia é que o resultado da computação de $\mathscr{U}(\llcorner M \lrcorner, x)$ seja o mesmo resultado da computação de $M(x)$ (incluindo o caso $M(x) = \nearrow$, em que a máquina $\mathscr{U}$ deve ficar em "loop infinito"). Adicionalmente, quando temos máquinas de Turing computando funções não booleanas, digamos $M(x) = y$, então $\mathscr{U}(\llcorner M \lrcorner, x) = y$

A primeira pergunta que devemos fazer é se $\mathscr{U}$ realmente existe. Afinal, dada uma tarefa, não podemos simplesmente supor que exista uma MT que a realize tal tarefa. A existência de tal máquina foi um dos resultados que Alan Turing provou em seu famoso artigo de 1936. Esta MT é conhecida como *Máquina de Turing Universal*.

Antes de enunciar o teorema da existência de $\mathscr{U}$, vamos refletir um pouco sobre o seguinte:

- Até agora estávamos vendo Máquinas de Turing como "software" e definimos algoritmos como sendo Máquinas de Turing que sempre param (MTs que ficam em loop infinito, por definição, não são algoritmos, mas elas podem ser pensadas como sendo programas de computador que ficam em loop infinito).

- No caso da Máquina de Turing Universal é bastante razoável pensarmos nela como um modelo matemático para um computador. Uma MT universal $\mathscr{U}$ tem a capacidade de rodar qualquer outra MT M com qualquer possível entrada de dados x, e, ao final, retornar a saída de $M(x)$.

A máquina $\mathscr{U}$ pode ficar executando M indefinidamente se $M(x) = \nearrow$. Isso é essencialmente o que um computador faz. Claramente, essa visão de "software" e "computador" pode ser maleável, pois muitas vezes temos implementações de algoritmos feitas em hardware de propósito específico e, por outro lado, também temos softwares que funcionam como uma Máquina de Turing Universal. Alguns exemplos de softwares que podem ser vistos com MTs universais são, por exemplo, interpretadores de linguagens de programação ou softwares emuladores[3].

- Finalmente, note que existência de uma MT universal do ponto vista físico (i.e., a possibilidade de se implementar fisicamente uma MT Universal) é algo bastante poderoso. Quando o conceito foi concebido por Alan Turing em 1936 não existiam computadores e muito menos software. Entretanto, a indústria de software de hoje seria uma impossibilidade matemática se o objeto matemático $\mathscr{U}$ não existisse sob a luz da Tese de Church-Turing, pois em tal situação não seria possível construir computadores capazes de rodar cada algoritmo possível e imaginável. Em tal cenário, para cada problema específico precisaríamos implementar o respectivo algoritmo que o resolve diretamente em hardware.

Teorema 7.5.1 Existe uma MT $\mathscr{U}$ tal que $\forall$ MT M e $\forall x \in \Sigma^*$, temos $\mathscr{U}(\llcorner M \lrcorner, x) = M(x)$.

Idéia da Prova: Lembramos que para provarmos que uma certa MT existe, basta apresentarmos explicitamente a definição de tal máquina. A apresentação da definição em detalhes da 7-tupla $\mathscr{U}$ é muito trabalhosa e é algo que está fora do escopo deste curso. O que vamos fazer aqui é apresentar a ideia geral. Vamos esboçar o funcionamento de uma MT $\mathscr{U}_3$, que é uma MT com 3 fitas que realiza a tarefa que $\mathscr{U}$ deve realizar. A nossa definição de permite que Máquinas de Turing tenham apenas uma fita, mas pelo Teorema da Equivalência, podemos concluir que se $\mathscr{U}_3$ existe, então a MT $\mathscr{U}$ com as propriedades desejadas também existe.

A ideia é que mantenhamos $\llcorner M \lrcorner$ na primeira fita de $\mathscr{U}_3$. Vamos tratar esta fita como se ela fosse uma fita de entrada onde queremos manter intacta a descrição de M. A descrição de M é o programa que queremos que $\mathscr{U}_3$ rode. Ainda no início da computação, colocamos a string x na segunda fita de $\mathscr{U}_3$. O que a máquina $\mathscr{U}_3$ vai fazer é simular passo a passo o que aconteceria no caso de x ser colocada colocada na fita (única) da máquina M. Na computação de $M(x)$, a cada passo, a fita de M conterá uma certa string. O conteúdo segunda fita de $\mathscr{U}_3$ será precisamente o conteúdo estaria presente na fita de M durante a computação de $M(x)$. A terceira fita de $\mathscr{U}_3$ será uma fita de memória auxiliar. Durante o processo de simulação da máquina M, vamos armazenar nesta terceira fita dois números em binário. O primeiro número corresponde ao estado que a máquina M sendo simulada se encontra. O segundo número é um índice que corresponde a posição da fita que a cabeça de leitura de M está posicionada.

Durante a computação, $\mathscr{U}_3$ vai atualizando a sua segunda fita para refletir precisamente como a MT M alteraria a sua fita única. Se eventualmente a M atingir um estado final a MT $\mathscr{U}_3$ identifica isso e vai para o seu estado final, e portanto aceita a entrada e parar. No caso em que M não tenha uma transição definida e esteja em um estado que não seja final (ou seja, M irá rejeitar a entrada), a MT $\mathscr{U}_3$ irá para um estado especial que é um estado que não tem nenhuma transição defindo e que também não é final, e portanto $\mathscr{U}_3$ vai parar rejeitando a entrada. Caso M fique executando indefinidamente, a MT $\mathscr{U}_3$ simplesmente vai continuar simulando M indefinidamente também. □

Relembrando que L_{H} é a linguagem da parada, temos o seguinte teorema:

Teorema 7.5.2 L_{H} é recursivamente enumerável.

[3] Pense no seguinte: o seu emulador favorito de Super Nintendo pode ser visto como uma MT universal!

Exercício 7.3 Foneça uma prova para o Teorema 7.5.2. ■

Uma consequência do Teorema 7.5.2 é que o conjunto $\mathscr{R}$ está estritamente contido no conjunto $\mathscr{RE}$. Enunciamos isto no corolário a seguir:

Corolário 7.5.3 $\mathscr{R} \subsetneq \mathscr{RE}$.

Prova: Provamos no Exercício 5.6 que $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{RE}$. Agora precisamos provar que esta inclusão é própria. Para tal, precisamos mostrar que existe pelo menos uma linguagem que esteja contida em $\mathscr{RE}$, mas que não esteja contida em $\mathscr{R}$. Pelo Exercício 7.3, $L_{\text{H}} \in \mathscr{RE}$. Pelo Teorema 7.4.1, $L_{\text{H}} \notin \mathscr{R}$. Portanto $\mathscr{R} \subsetneq \mathscr{RE}$.

Teorema 7.5.4 Existe L tal que $L \notin \mathscr{RE}$.

Exercício 7.4 Forneça uma prova para o Teorema 7.5.4. ■

MÁQUINAS, PROGRAMAS E DADOS

"Antes de Alan Turing a suposição era que as três categorias, máquina, programa e dados, eram entidades completamente separadas. A máquina era um objeto físico, era 'hardware'. O programa era o planejamento da computação que iríamos executar. Os dados eram a entrada numérica. A máquina universal de Turing mostrou que esas distinções eram uma ilusão. Essa fluidez é essencial hoje em dia na prática: [Por exemplo,] um programa é dado para um compilador.". – Martin David

7.6 Máquinas de Turing não determinísticas (MTN)

Se quisermos fornecer uma definição para uma Máquina de Turing não Determinística, a primeira ideia que nos vem a mente é modificar a definição de Máquina de Turing para que a função de transição $\delta(q,X)$ retorne um conjunto de triplas $\{(q_1,Y_1,D_1),(q_2,Y_2,D_2),\ldots,(q_k,Y_k,D_k)\}$. Esta definição seria parecida com o que fizemos, quando definimos AFNs como generalizações de AFDs no Capítulo 3. A definição que daremos aqui é um pouco diferente, mas é possível provar que o poder computacional destas duas definições é o mesmo.

Definição 7.6.1 — Máquina de Turing não determinística (MTN). Uma *Máquina de Turing não determinística* é uma 7-tupla $M_{\text{N}} = (Q,\Sigma,\Gamma,(\delta_0,\delta_1),q_0,B,F)$.

A definição dos componentes Q,Σ,Γ,q_0,B,F desta tupla são iguais a definição de MTs. O par (δ_0,δ_1) consiste de duas funções de transições, também definidas exatamente como eram definidas em Máquinas de Turing determinísticas.

Do ponto de vista de definição matemática, a única diferença que MTNs tem em relação a MTs é que, ao invés de uma função de transição δ, MTNs tem um par de funções (δ_0,δ_1). A questão agora é *interpretar* a definição de MTNs para que possamos definir como é o processo de computação não determinística neste caso. A ideia é que, a cada passo, a máquina tam a capacidade de advinhar qual das duas funções ela deve usar para fazer a transição. A linguagem de uma MTN N é o conjunto de toda string para a qual existe uma computação que a aceite, ou seja, toda string x tal que, a cada passo, existe uma escolha entre δ_0 e δ_1 que leve N a aceitar x.

De maneira semelhante a MTs veremos, o processo de computação de uma Máquina de Turing como uma sequência de configurações.

Definição 7.6.2 — Configuração de uma MTN. Dada uma MTN $N = (Q,\Sigma,\Gamma,(\delta_0,\delta_1), q_0,B,F)$, uma *Configuração* de N é uma string $\alpha q\beta$ tal que $\alpha,\beta \in \Gamma^*$ e $q \in Q$.

A interpretação do que a string $\alpha q\beta$ é a mesma que ocorria no caso de MTs determinísticas. O símbolo $\vdash_N$, definido a seguir, representa um passo computacional de uma MTN. A diferença em relação a MTs é que a partir de uma configuração C, a computação pode se dirigir a possivelmente duas configurações diferentes no próximo passo, dependendo de qual das duas funções de transição foi escolhida na execução da Máquina de Turing não Determinística.

Definição 7.6.3 — Passo computacional não determinístico $\vdash_N$. Seja $N = (Q,\Sigma,\Gamma,(\delta_0, \delta_1),q_0,B,F)$ uma Máquina de Turing não determinística e C uma configuração da máqina N.

- Se a aplicação da função δ_0 leva a configuração C à configuração C_0, então escrevemos $C \vdash_{N_0} C_0$.
- Se a aplicação da função δ_1 leva à configuração C à configuração C_1, então escrevemos $C \vdash_{N_1} C_1$.

Escrevemos $C \vdash_N C'$ tanto para o caso de $C \vdash_{N_0} C'$ ou para o caso de $C \vdash_{N_1} C'$.

Definição 7.6.4 Dada uma MTN N, o símbolo $\vdash_N^*$ é definido indutivamente:

Base: $C \vdash_N^* C$ para qualquer configuração C de N.

Indução: $c \vdash_N^* J$ se $\exists K$ tal que $C \vdash_N K$ e $K \vdash_N^* J$.

Definição 7.6.5 — Linguagens aceitas por MTNs. Dada uma Máquina de Turing não Determinística $N = (Q,\Sigma,\Gamma,(\delta_0,\delta_1),q_0,B,F)$, a linguagem $L(N) = \{w \in \Sigma^*; q_0w \vdash_N^* C_F$, tal que C_F é uma configuração final de $N\}$ é chamada de *linguagem de* N ou linguagem *aceita* por N.

Definição 7.6.6 — Árvore de Computações Possíveis de MTNs. Seja N uma NTM e x uma string. A *árvore de computações possíveis* de N com x é uma árvore cujos nós são configurações da computação de $N(x)$ definida da seguinte maneira. A raiz é a configuração inicial da computação e cada nó C tem no máximo dois filhos, dependendo do seguinte:

- Se C é uma configuração final, então C não possui filhos.
- Se existe um único C' tal que $C \vdash_N C'$, então C' é único filho de C (esta situação ocorre no caso em que as duas funções δ_0 e δ_1 retornam o mesmo valor.
- Se existem configurações distintas C',C'' tal que $C \vdash_N C'$ e $C \vdash_N C''$, então C' e C'' são os dois filhos de C.

Uma observação importante é que uma árvore de computações possíveis de MTNs pode ter alguns ramos infinitamente longos[4] nos casos em que ramos da computação fiquem em loop infinito. Entretanto, se uma MTN N aceita uma string x, existe pelo menos um ramo finito nesta árvore, e a folha no final deste ramo é uma configuração final.

[4]Um detalhe que devemos atentar é que árvores são casos particulares de grafos, e grafos são definidos como sendo objetos finitos. Portanto, a rigor, precisaríamos usar em nossa definição conceitos como árvores infinitas ou grafos infinitos (grafos infinitos e árvores infinitas também são objetos matemáticos bem definidos, embora não tão amplamente estudados como os seus equivalentes finitos), mas não vamos nos preocupar com isso, pois a noção intuitiva de uma árvore em que alguns ramos podem ser infinitamente longos é suficiente para os nossos propósitos.

Teorema 7.6.1 Se L é aceita por uma MTN N, então $\forall x \in \Sigma^*$, a árvore de computações possíveis de N com x tem pelo menos um ramo finito.

Prova: Seja $x \in L$. Como N aceita x, $q_0 w \vdash_N^* C_F$, tal que C_F é uma configuração final de N. Então a sequência de configurações saindo de $q_0 x$ e chegando a C_F é um ramo finito da árvore.

A seguir enunciamos dois teoremas que mostram que o conjunto de linguagens decididas por MTNs é precisamente o conjunto das linguagens recursivas. Veremos na Parte III deste livro que MTNs, embora não sejam modelos realistas de computação, são ferramentas úteis para explorar questões relacionadas a existência de algoritmos eficientes para a resolução de certos problemas computacionais.

Teorema 7.6.2 Se N é uma MTN, então existe uma MT M tal que $L(M) = L(N)$.

Idéia da prova: Podemos escrever um programa em pseudo-código que simula a execução de uma NTM construindo, nível por nível, sua árvore de computações possíveis (i.e., fazendo um busca em largura na árvore). Caso seja atingido uma configuração final, aceite. Note que pelo Teorema 7.6.1, para toda string x aceita por N, a árvore de computações possíveis tem um ramo finito atingindo uma configuração final. Pelo Teorema da Equivalência, se existe um programa em pseudo-código que realiza esta tarefa, então existe uma MT que também realiza a mesma tarefa. □

Teorema 7.6.3 Se M é uma MT, então existe uma MTN N tal que $L(M) = L(N)$.

Idéia da prova: Seja δ a função de transição de M. Basta tomar N com os mesmos componentes da 7-tupla de M, exceto que o par (δ_1, δ_2) de funções de transição de N deve ser $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. □

Exercício 7.5 Apresente uma MTN que escreve uma string binárias de tamanho 5 na fita tal que cada uma das 2^5 strings binárias diferentes aparece a final de um ramo diferente de sua árvore de computações possíves. ■

7.7 Exercícios

Exercício 7.6 Seja uma MT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ que decide a linguagem L. Mostre como obter uma MT M' com o seguinte comportamento:

(1) Se $M(x) = 1$, então $M'(x) = \nearrow$
(2) Se $M(x) = 0$, então $M'(x) = 0$.

■

Exercício 7.7 Seja M_{COPY} a máquina fornecida no Exercício 5.7. Seja M_{LOOP} a máquina cujo funcionamento é explicado na prova do Teorema 7.4.1. Prove que se M_{COPY} M_{LOOP}, então existe uma máquina D tal que $D(\llcorner D \lrcorner) \neq \nearrow \Leftrightarrow D(\llcorner D \lrcorner) = \nearrow$, o que é uma contradição lógica. ■

Exercício 7.8 Prove de maneira formal que L_{H} (a linguagem da parada) é recursivamente enumerável. ■

Exercício 7.9 Seja $\mathscr{M}$ o conjunto de todas as máquinas de turing e seja $\mathscr{L}$ o conjunto de todas

as linguagens sobre Σ. Usando o argumento da diagonalização mostre que $|\mathscr{M}| < |\mathscr{L}|$ e conclua que existem linguagens que não são recursivamente enumeráveis. ■

Exercício 7.10 No Exercício 7.9 mostramos que linguagens que não são recursivamente enumeráveis *existem*. Neste exercício vamos mostrar explicitamente que uma dada linguagem não é recursivamente enumerável. Seja L_H a linguagem da parada. Prove que $\overline{L_{\text{H}}} \notin \mathscr{RE}$. ■

Exercício 7.11 Prove o seguinte problema é indecidível. Dada uma Máquina de Turing M, queremos decidir se $M(\varepsilon) \neq \nearrow$. ■

Exercício 7.12 Prove que $L = \{\llcorner M \lrcorner \, ; \exists x \in \Sigma^* \text{ tal que } M(x) \neq \nearrow\}$ é indecidível. ■

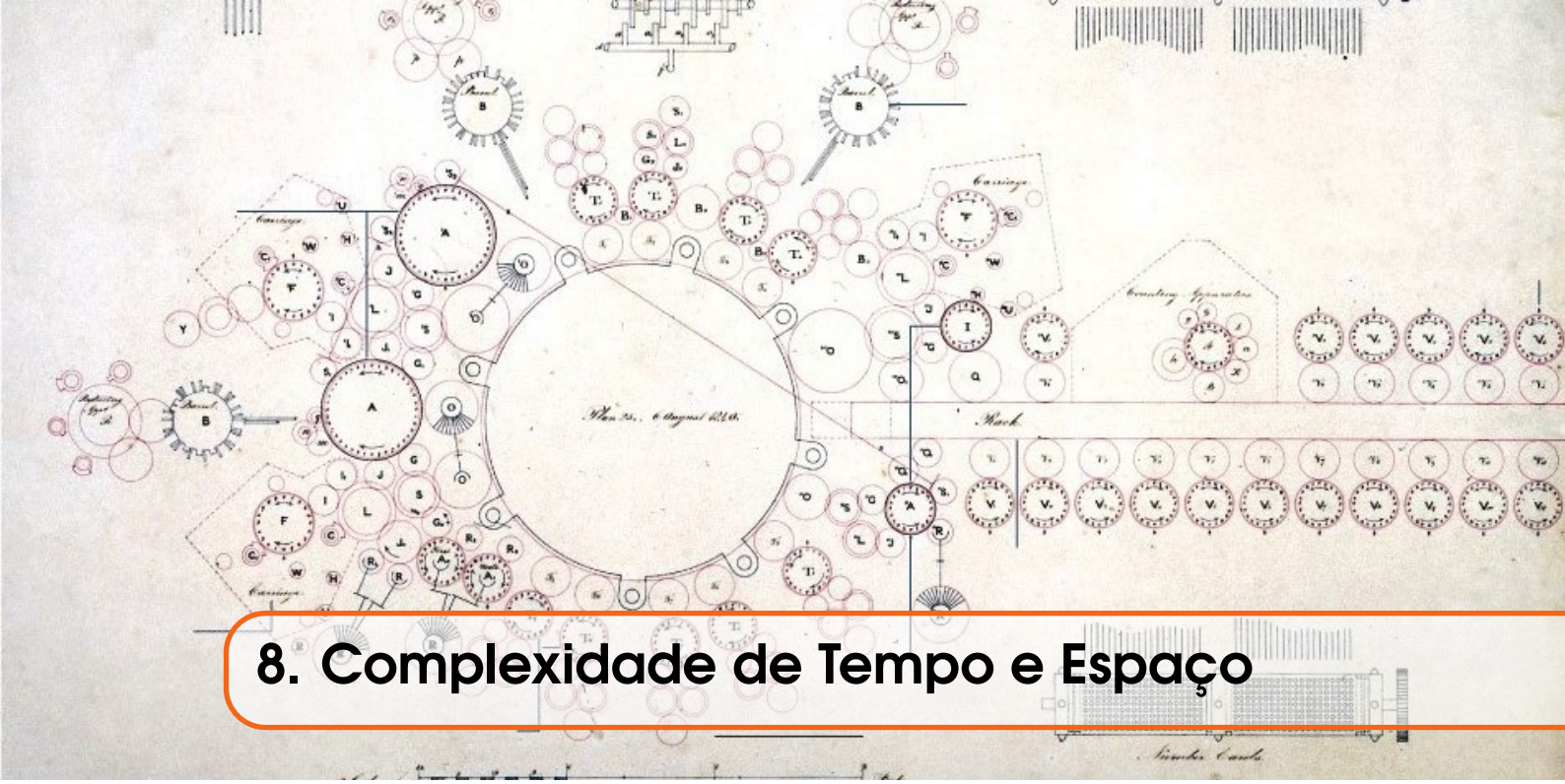
Exercício 7.13 Dado como entrada $\llcorner M \lrcorner$, onde M é uma MT, a pergunta que você deve responder é se existe uma MT M' com o seguinte comportamento:

- Se $M(\varepsilon) = 1$, então $M'(\llcorner M \lrcorner) = 1$;
- Se $M(\varepsilon) = 0$, então $M'(\llcorner M \lrcorner) = 0$;
- Se $M(\varepsilon) = \nearrow$, então $M'(\llcorner M \lrcorner) \neq \nearrow$ (ou seja, M' para, independente de aceitar ou rejeitar).

Em caso afirmativo, apresente a MT M', e, em caso negativo, prove que M' não existe. ■

Exercício 7.14 Descreva como são as árvores de computações possíveis de MTNs tal que $\delta_1 = \delta_2$ apresentadas na "ideia da prova" do Teorema 7.6.3. ■

III Parte 3: Complexidade Computacional



8. Complexidade de Tempo e Espaço

Intuitivamente, nós percebemos que alguns problemas computacionais parecem ser mais difíceis de serem resolvidos do que outros. Por exemplo, considere os seguintes problemas:

(1) Dados dois números inteiros de 64 dígitos, calcular a soma dos dois números;
(2) Dado um tabuleiro de xadrez (que também tem 64 posiçõess) em que as peças brancas têm a vez de jogar, determinar a jogada ótima para as peças brancas.

Resolver o primeiro problema parece ser bem mais fácil do que resolver o segundo problema. Se quisermos ser justos na comparação, podemos imaginar que os números que estamos somando têm 64 dígitos, assim estaríamos lidando com instâncias do problema de tamanho mais ou menos parecidas com a instância do problema no tabuleiro de xadrez (afinal, um tabuleiro de xadrez têm 64 posições). Ainda assim, com papel e caneta em dois minutos calculamos a soma dos dois números em questão. Por outro lado, para encontrar uma jogada ótima para as peças brancas[1] parece haver uma quantidade astronômica de possiblidades que teremos que levar em consideração. Este segundo problema parece ser difícil, pois para todas as possíveis ramificações de jogo advindas de todas as possíveis respostas do oponente, estamos tentando garantir que sempre deva existir uma próxima jogada ótima, e assim sussessivamente até o final do jogo.

Embora possa parecer "óbvio" que dados x e y, o problema de encontrar o número z, tal que $z = x + y$ é um problema fácil de resolver, é importante observar que o número z procurado tem pelo menos 64 dígitos, portanto existem 10^{64} números com o tamanho da resposta procurada. Ou seja, o espaço de busca da solução para o valor que satisfaz a soma $x + y$ é astronomicamente grande (assim como o espaço de busca para o problema da jogada de xadrez). Ainda assim, em poucos passos, sistematicamente nós conseguimos encontrar o valor z que estamos procurando.

Há algo ainda mais importante do que o fato de que somar números de especificamente 64 dígitos é mais fácil encontrar uma jogada ótima para as peças brancas em um tabuleiro especi-

[1] Neste contexto, dizemos que uma jogada é ótima se existe garantidamente um xeque-mate a partir dela (mesmo que o xeque-mate seja, digamos, 40 jogadas adiante). Se quiséssemos ser mais precisos, precisaríamos levar em consideração que tal jogada pode não existir, portanto, um enunciado mais preciso do problema em questão seria "encontrar uma jogada ótima ou concluir que as peças pretas garantidamente podem empatar ou derrotar as peças brancas".

ficamente de dimensão 8×8. Considere o caso mais geral dos dois problemas, ou seja, o caso em que queremos somar dois números de n dígitos e o caso em que queremos encontrar uma jogada ótima em um tabuleiro de "xadrez generalizado" (uma versão do xadrez jogado em um tabuleiro $n \times n$). O que acontece é que a dificuldade de se resolver o segundo problema, que já era astronomicamente maior, cresce exponencialmente com o crescimento do tamanho do tabuleiro, enquanto que a dificuldade de se resolver o problema da soma cresce em escala menor.

O ponto chave é que, embora o espaço de busca nos dois casos cresça exponencialmente com o tamanho n da entrada do problema, para o primeiro problema, nós temos um algoritmo muito eficiente para encontrar a solução neste espaço de 10^n possíveis soluções, enquando que no segundo caso o algoritmo para se encontrar a solução é essencialmente um algoritmo de"força bruta" examindando todas as ramificações de jogadas. Nesta parte do curso, o nosso objetivo é tornar mais precisa a ideia intuitiva que temos de que alguns problemas são inerentemente mais difíceis de serem resolvidos do que outros.

> PROBLEMAS INDECIDÍVEIS *vs* PROBLEMAS INTRATÁVEIS
>
> Nesta parte do curso, os tipos de problemas que estaremos lidando são chamados de *problemas intratáveis*. Tais problemas não admitem algoritmos eficientes (como o caso do problema do xadrez generalizado) ou, na maior parte dos casos, conjectura-se não admitir algoritmos eficientes (este é o caso dos famosos problemas *NP*-completos). Ainda assim estaremos lidando com problemas decidíveis.
>
> Podemos pensar que problemas indecidíveis, como o problema da parada, estão na categoria dos problemas "impossíveis" (e não meramente "difíceis", como o problema do xadrez generalizado ou dos problemas NP-completos), pois simplesmente não existe algoritmos para tais problemas. Entretanto, é razoável pensar que instâncias grandes de problemas intratáveis, na prática, também podem ser impossíveis de serem resolvidas por limitações físicas de espaço e de tempo que a natureza nos impõe.

8.1 Complexidade de Tempo e de Espaço de Máquinas de Turing

Para tornar precisa a ideia da quantidade de trabalho que um problema exige para que possamos o solucionar, iremos definir o conceito de complexidade de tempo e complexidade de espaço de Máquinas de Turing. A complexidade de tempo de uma máquina, se refere ao número de transições que ela executa em função do tamanho da entrada, enquando e a complexidade de espaço se refere a quantidade de células da fita utilizadas em função do tamanho da entrada.

Nesta parte do curso, será conveniente trabalhar com Máquinas de Turing com três fitas. O Teorema 6.5.1 nos diz que MTs com uma fita (o modelo que vínhamos utilizando até agora) são equivalentes não apenas em termos de computabilidade, mas também em termos de eficiência[2] a MTs com três fitas. O funcionamento destas máquinas com três fitas é descrito a seguir.

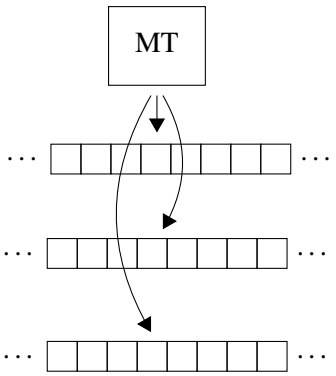
(1) A primeira fita, chamada de *fita de entrada*, é a fita que armazena a string de entrada. Nesta fita permite-se apenas leitura (a fita é do tipo "read-only");

(2) A segunda fita, chamada de *fita de trabalho*, é uma fita padrão em que se permite leitura e escrita. A ideia é que nesta fita em a que a computação efetivamente ocorre;

(3) A terceira fita, chamada de *fita de saída*, é a fita onde é armazenada a "resposta" do problema

[2] A rigor, existe uma diferença polinomial de eficiência entre estes dois modelos. Por exemplo, existem problemas podem ser decididos em $O(n)$ passos usando uma MT com 3 fitas (ou seja, dada uma string de entrada de n bits, o número de transições que a MT de 3 fitas executa é $O(n)$), mas que requerem no mínimo $O(n^2)$ passos no modelo de MTs com apenas uma fita. Entretanto, como veremos adiante, o grau destes polinômios não são importantes para o tipo de questões que estaremos discutindo nesta parte do curso.

(esta fita também é chamada de fita de resposta). Nesta fita permite-se apenas escrita (a fita é do tipo "write-only");



A principal vantagem de termos uma fita de saída é facilitar a nossa vida quando estivermos resolvendo problemas de não sejam de decisão (i.e., queremos obter uma string de Σ^* como saída, ao invés de apenas uma resposta SIM/NÃO). Neste caso vamos assumir que no final da computação a terceira fita contém a saída do algoritmo. Portanto, neste caso, quando formos escrever $M(x) = y$, queremos dizer que com a entrada x na fita de entrada, o algoritmo termina com y na fita de saída.

No caso de problemas de decisão, vamos assumir que a máquina escreve o símbolo 1 ou 0 na fita de saída antes de parar (dependendo do caso em que a máquina vai aceitar ou rejeitar a string).

Definição 8.1.1 — Complexidade de tempo. A complexidade de tempo de uma Máquina de Turing M é uma função $t_{\mathrm{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para qualquer string de entrada de tamanho n, a máquina para depois de executar no máximo $t_{\mathrm{M}}(n)$ transições.

■ **Exemplo 8.1** Seja M uma Máquina de Turing. Se para qualquer string de entrada de tamanho n, a máquina M sempre para depois de fazer, no máximo, $n^2 + 3n$ transições, então dizemos que a complexidade de tempo de M é $n^2 + 3n$. ■

Definição 8.1.2 — Complexidade de espaço. Dada uma MT M, a sua complexidade de espaço é uma função $s_{\mathrm{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para qualquer string de entrada de tamanho n, a máquina M para depois de usar no máximo $s_{\mathrm{M}}(n)$ posições da fita de trabalho.

■ **Exemplo 8.2** Seja M uma Máquina de Turing. Se, para qualquer string de entrada de tamanho n, a máquina M sempre para usando no máximo, $\log n + 7$ posições da fita de trabalho, então a complexidade de espaço de M é $\log n + 7$. ■

Assim como estamos acostumado a fazer em análise de algoritmos, em muitos casos nós poderemos usar notação assintótica. No Exemplo 8.1, dizemos que a complexidade de tempo de M é $O(n^2)$. No Exemplo 8.2, dizemos que a complexidade de espaço de M é $O(\log n)$.

Notação 8.1. *A notação $poli(n)$ será usada para se referir a uma função que seja assintoticamente limitada por um polinômio em n. Ou seja, se $f(n) = O(n^r)$ para algum $r \in \mathbb{N}$ constante e independente de n, então diremos que $f(n) = poli(n)$.*

Definição 8.1.3 — Complexidade de tempo/espaço polinomial. Se uma MT M tem complexidade de tempo $poli(n)$, dizemos que M *é polinomial*. Se M tem complexidade de espaço $poli(n)$, dizemos que M *é de espaço polinomial*. Note que a função $poli(n)$ não necessariamente precisa ser um polinômio, pois basta que ela seja assitoticamente limitada por um polinômio.

Definição 8.1.4 — Complexidade de tempo polinomial em MTs não determinísticas. Uma Máquina de Turing não determinística é polinomial se dada uma entrada de tamanho n, *todos os ramos da árvore de computações possíveis tem profundidade* $poli(n)$.

Definição 8.1.5 — Complexidade de tempo exponencial. Se uma MT M tem complexidade de tempo $O(2^{poli(n)})$, dizemos que M *é exponencial*.

Observe que se uma MTN é polinomial, então independente das possíveis escolhas não determinísticas que a MTN faz, ela sempre para depois de $poli(n)$ transições. Observe que uma consequência da Definição 8.1.4 é que, em particular, estaremos lidando apenas com MTNs que não possuem ramos infinitos em sua árvore de computações possíveis.

ESPAÇO E TEMPO: RECURSOS DISPONÍVEIS PARA SE FAZER COMPUTAÇÃO

Algo interessante de se observar é que tempo e espaço são recursos básicos que a natureza nos oferece quando pensamos em efetivamente realizar computação em um meio físico. Dependendo do substrato físico que estivermos utilizando para fazer computação, espaço e tempo podem ser traduzidos de diferentes maneiras.

Por exemplo, em um algoritmo rodando em um laptop, espaço significa memória RAM e tempo significa número de intruções executadas pelo processador. No caso de computação usando moléculas de DNA, espaço significa a quantidade de moléculas necessárias para se realizar a computação e tempo significa o número de vezes que as moléculas devem "interagir" (i.e., fazer pontes de hidrogênio). Independente do modelo de computação que estamos usando, em última análise, os recursos específicos utilizados parecem ter correspondência com os conceitos gerais de espaço e tempo que conhecemos em física.

8.2 As classes P, NP, PSPACE e EXP

Na seção anterior nós definimos o que é a complexidade de uma Máquina de Turing. Nesta seção, nós vamos usar esta definição como base para definir a complexidade inerente de se resolver determinados problemas de decisão.

Definição 8.2.1 — Decisão em tempo polinomial. Dizemos que uma linguagem L pode ser *decidida deterministicamente em tempo polinomial* se existe uma MT polinomial que decide L. Dizemos que uma linguagem L é *decidida não deterministicamente em tempo polinomial* se existe uma MT não determinística polinomial que decide L.

Definição 8.2.2 — Decisão em espaço polinomial. Uma linguagem L pode ser *decidida deterministicamente em espaço polinomial* se existe uma MT de espaço polinomial que decide L. Uma linguagem L é *decidida não deterministicamente em espaço polinomial* se existe uma MT não determinística que decide L em espaço polinomial.

Exercício 8.1 (Decisão não determinística em tempo polinomial) Apresente uma definição para o conceito de *decisão não deterministica em tempo polinomial*. ■

Exercício 8.2 **(Decisão determinística em tempo exponencial)** Apresente uma definição para o conceito de *decisão deterministica em tempo exponencial*. ■

Vamos agora classificar linguagens de acordo com a quantidade de recursos necessários para que possamos decidí-las. Tais conjuntos de linguagens são conhecidos como *classes* de linguagens (ou classes de problemas).

Definição 8.2.3 — A classe P. O conjunto de todas as linguagens decidíveis deterministicamente em tempo polinomial é denotado por P.

Definição 8.2.4 — A classe NP. O conjunto de todas as linguagens decidíveis não deterministicamente em tempo polinomial é denotado por NP.

Definição 8.2.5 — A classe PSPACE. O conjunto de todas as linguagens decidíveis deterministicamente em espaço polinomial é denotado por PSPACE.

Definição 8.2.6 — A classe EXP. O conjunto de todas as linguagens decidíveis deterministicamente em tempo exponencial é denotado por EXP.

Teorema 8.2.1 $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$.

Prova: Seja $L \in \mathsf{P}$. Pela Definição 8.2.6, existe uma MT polinomial $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ que decide L. Agora considere a Máquina de Turing não determinística $N = (Q, \Sigma, \Gamma, (\delta, \delta), q_0, B, F)$. A máquina N comporta-se exatamente da mesma maneira que M, portanto N também decide L em tempo polinomial. Logo $L \in \mathsf{NP}$ e consquentemente $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. □

Teorema 8.2.2 $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXP}$.

Exercício 8.3 (OPCIONAL) Prove o Teorema 8.2.2. ■

8.3 O problema P *vs* NP

O Teorema 8.2.1 nos diz que $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. Seria possível provar que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$? Ou seja, seria possível provar que a classe P está *estritamente* contida na classe NP?

A conjectura normalmente aceita entre os cientistas da computação é que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. Em particular, vários problemas importantes, conhecidos como problemas NP-completos, são os problemas candidatos a pertencerem à classe $\mathsf{NP} \setminus \mathsf{P}$. O Problema da Satifatibilidade (conhecido simplesmente como *SAT*, definido formalmente na próxima seção), é um destes problemas. Mostrar que o problema SAT está na classe NP é uma tarefa simples, como veremos Capítulo 9. Entretanto, demonstrar que o problema não pertence a classe P é uma tarefa que até o presente momento ninguém foi capaz de realizar[3].

Qual é a dificuldade de se provar que o problema SAT (ou qualquer outro problema candidato a estar em $\mathsf{NP} \setminus \mathsf{P}$) não admite um algoritmo polinomial? Como já vimos em capítulos anteriores, em geral não é uma tarefa fácil provar que determinado algoritmo não existe. Para demonstrarmos que certo problema de decisão não pertence a P teríamos que excluir logicamente a possibilidade de que todos os infinitos algoritmos polinomiais falham na tarefa de decidir tal problema.

[3] A demonstração de que o problema não admite algoritmo polinomial ou a apresentação de um algoritmo polinomial (ou seja, uma refutação da conjectura de $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$) é um dos maiores problemas em aberto em toda matemática

DETERMINISMO *vs* NÃO DETERMINISMO

Algo importante que devemos lembrar é que, muitas vezes, classes de linguagens com definições bastante diferentes podem ser iguais. Por exemplo, no Capítulo 3 vimos que a classe das linguagens aceitas por AFDs era precisamente a mesma classe das linguagens aceitas por AFNs. Mas, por outro lado, em alguns modelos de computação há diferença entre computação determinística e não determinística. Por exemplo, a classe das linguagens aceitas por PDAs não é a mesma classe das linguagens aceitas por DPDAs.

Os Teoremas 7.6.2 e 7.6.3, vistos no Capítulo 5, enuciam que o conjunto de linguagens aceitas por MTs é exatamente o mesmo conjunto das linguagens aceitas por MTNs. Para provar tal resultado, o argumento que usamos é que uma MT pode simular uma MTN (o mesmo argumento vale para provar que MTs *decidem* as mesmas linguagens que podem ser decididas por MTNs). A pergunta chave neste capítulo é a seguinte: uma MT pode sempre simular de maneira *eficiente* uma dada MTN?

PSPACE *vs* NPSPACE?

O problema P *vs* NP é muito famoso, mas, por outro lado, por que nunca escutamos nada sobre o problema PSPACE *vs* NPSPACE. Qual é o motivo disso? O motivo é que este não é um problema em aberto. Não é tão difícil mostrar que PSPACE = NPSPACE.

Uma maneira diferente de se definir classes de complexidade, e que pode ser útil em algumas circunstâncias, é a seguinte.

Definição 8.3.1 — TIME($f(n)$). Dada uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a classe TIME($f(n)$) é o conjunto de toda linguagem que pode ser decidida por uma Máquina de Turing com complexidade de tempo $c \cdot f(n)$, para alguma constante c.

■ **Exemplo 8.3** A classe TIME(n^3) é a classe de toda linguagem que pode ser decidida por uma MT que execute $c \cdot |x|^3$ transições, para alguma constante $c > 0$, para qualquer string x fornecida como entrada para M. ■

■ **Exemplo 8.4** A classe TIME(2^n), que é conjunto de toda linguagem que pode ser decidida por uma MT que execute $c \cdot 2^{|x|}$ transições, , para alguma constante $c > 0$, para qualquer string x fornecida como entrada para M. ■

Definição 8.3.2 — SPACE($f(n)$). Dada uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a classe SPACE($f(n)$) é o conjunto de toda linguagem que pode ser decidida por uma Máquina de Turing com complexidade de espaço $c \cdot f(n)$, para alguma constante c.

8.3.1 Problemas de Decisão

Nesta seção vamos apresentar a definição de alguns problemas computacionais envolvendo grafos e lógica booleana. Se o leitor não tiver familiariadade com conceitos elementares de teoria de grafos, o apêndice do livro contém as definições relevantes dos conceitos utilizados nesta aqui.

Definição 8.3.3 — Problema da Conectividade de Grafos. O problema de decidir se um dado grafo é conexo é definido pela linguagem $L_{\text{CNX}} = \{\llcorner G \lrcorner \in \Sigma^* : G \text{ é um grafo conexo}\}$.

Definição 8.3.4 — Problema do Grafo Euleriano. O problema de decidir se um grafo é euleriano é definido pela linguagem $L_{\text{EUL}} = \{\llcorner G \lrcorner \in \Sigma^* : G \text{ é um grafo euleriano}\}$.

Definição 8.3.5 — Problema do Grafo Hamiltoniano. O problema de decidir se um dado grafo é hamiltoniano é definido pela linguagem $L_{\text{HAM}} = \{\llcorner G \lrcorner \in \Sigma^* : G \text{ é um grafo hamiltoniano}\}$.

Definição 8.3.6 — Problema do conjunto Independente. O problema de decisão, conhecido como problema do conjunto independente, é definido pela linguagem $L_{\text{CI}} = \{\llcorner (G,k) \lrcorner \in \Sigma^* : G \text{ é um grafo que contém um conjunto independente de tamanho pelo menos } k\}$.

Definição 8.3.7 — O problema da clique. O problema de decisão, conhecido como problema é definido pela linguagem $L_{\text{CL}} = \{\llcorner (G,k) \lrcorner \in \Sigma^* \mid G \text{ é um grafo que contém uma clique de tamanho pelo menos } k\}$.

Para o problema a seguir, relembramos que se uma fórmula booleana está em *forma normal conjuntiva* se ele é uma conjunção de disjunções. Vamos nos referir a tais fórmulas como *fórmulas booleanas em CNF*[4].

Definição 8.3.8 — Satisfatibilidade de fórmulas booleanas (SAT). O problema de decidir se uma dada fórmula booleana em CNF é satisfazível é definido pela linguagem $L_{\text{SAT}} = \{\llcorner \phi \lrcorner \in \Sigma^* : \phi \text{ é uma fórmula booleana em CNF satisfazível}\}$.

■ **Exemplo 8.5** Como a fórmula $\phi_1 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_3})$ é satisfazível (uma valoração que satizfaz ϕ é $x_1 = V$, $x_2 = V$ e $x_3 = F$), então dizemos que $\llcorner \phi_1 \lrcorner$ é uma instância verdadeira de L_{SAT}. Por outro lado, como $\phi_2 = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1) \wedge (x_2)$ não é satisfazível, dizemos que $\llcorner \phi_2 \lrcorner$ é uma instância falsa de L_{SAT}. ■

Convenção 8.1 (Literais em fórmulas em CNF)**.** *Seja C_i uma clásula de uma fórmula ϕ em CNF. Iremos assumir que em C_i não ocorrem literais repetidos. Iremos assumir que se o literal l em C_i é corresponde a variável x, então não existe em C_i o literal $\overline{x}$. De maneira semelhante, se $l = \overline{x}$, então não ocorre literal x.*

Exercício 8.4 Lembrando que o grafo K_4 é o grafo completo com 4 vértices, responda: $\llcorner K_4 \lrcorner$ é uma instância verdadeira ou falsa do problema L_{EUL}? ■

Exercício 8.5 A string $\llcorner K_4 \lrcorner$ é uma instância verdadeira ou falsa do problema L_{HAM}? ■

8.4 Exercícios

Exercício 8.6 Apresente uma definição para a classe P em termos da definição da classe TIME($f(n)$). ■

Exercício 8.7 Caso estivéssemos utilizando uma Máquina de Turing usando apenas 1 fita, a

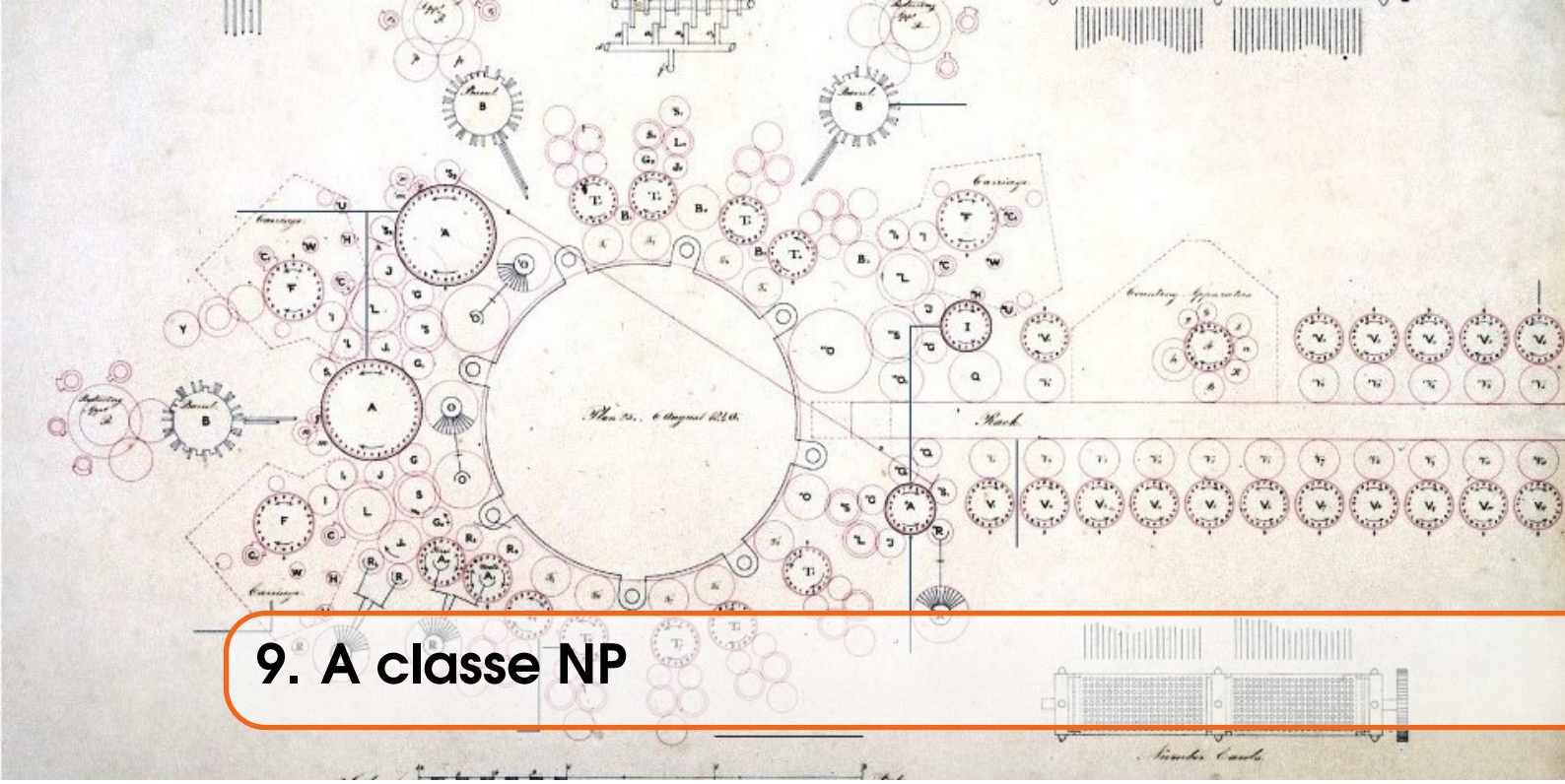
[4] O acrônimo CNF vem do inglês *conjunctive normal form.*

classe P seria a mesma ou seria diferente? Justifique a sua resposta. Qual seria a desvantagem de se definir P-*space* usando MTs que possuam apenas 1 fita? ■

Exercício 8.8 Caso estivéssemos utilizando uma Máquina de Turing usando apenas 1 fita, teríamos que alterar a nossa definição de complexidade de espaço. Há alguma vantagem em se usar MTs com 3 fitas ao invés de MTs com apenas 1 fita quando estamos lidando com complexidade de espaço? ■

Exercício 8.9 Lembrando que $\mathscr{R}$ é o conjunto das linguagens recursivas, prove que $\mathsf{NP} \subseteq \mathscr{R}$. ■

Exercício 8.10 Forneça uma definição para $\text{NTIME}(f(n))$ de maneira semelhante a Definição 8.3.1, mas agora considerando Máquinas de Turing não Determinísticas. ■



9. A classe NP

O que é mais fácil? **Decidir** se existe uma solução para uma dada instância do problema Sudoku, ou meramente **verificar** se uma solução que já nos foi fornecida "de bandeja" está correta?

	2		5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Problema

4	2	*6*	5	*7*	1	*3*	9	*8*
8	*5*	*7*	2	*9*	3	*1*	*4*	6
1	3	*9*	*4*	6	*8*	*2*	7	*5*
9	*7*	1	*3*	*8*	*5*	6	*2*	*4*
5	4	*3*	*7*	*2*	*6*	*8*	1	9
6	*8*	2	*1*	*4*	*9*	7	*5*	*3*
7	9	*4*	*6*	3	*2*	*5*	8	*1*
2	*6*	*5*	8	*1*	4	*9*	*3*	7
3	1	*8*	9	*5*	7	*4*	6	*2*

Solução

Figure 9.1: O Problema Sudoku.

Na Figura 9.1 à esquerda apresentamos uma instância do Problema Sudoku. O problema de decisão que estamos interessados é o seguinte: dado um grid 9×9, queremos decidir se é possível preencher as posições faltantes tal que toda linha, toda a coluna, e cada um dos blocos 3×3 do grid tenha exatamente um dígito diferente. Alguns grids admitem solução (instâncias verdadeiras) e outros não admintem solução (instâncias falsas). Na Figura 9.1 à direita temos um exemplo de preenchimento do grid original. Observe que tal grid preenchido é uma prova de que a instância original é verdadeira (i.e., admite um preenchimento correto). Agora considere um problema de decisão diferente: dado um grid 9×9 preenchido (como o da figura a direita), queremos decidir se, de fato, o preenchimento está correto.

Qual dos dois problemas parece ser mais difícil? Decidir se existe uma solução para uma dada instância do problema Sudoku ou simplesmente verificar se uma solução que já nos foi fornecida está correta? Neste capítulo veremos que esta dicotomia *decidir vs verificar* está no coração de

todos os problemas da classe NP e está intimamente ligada ao famoso problema P *vs* NP.

9.1 Decidir ou verificar?

Nesta seção nós vamos formalizar a ideia intuitiva que temos da oposição entre decidir e verificar um problema. Para formalizar essa ideia, vamos usar o problema SAT. Primeiramente relembramos que uma fórmula com n variáveis $x_1, ..., x_n$ escrita em CNF é uma fórmula booleana que tem a forma $\phi = (l_{11} \vee l_{12} \vee ... \vee l_{1k_1}) \wedge (l_{21} \vee l_{22} \vee ... \vee l_{2k_2}) \wedge ... \wedge (l_{m1} \vee l_{m2} ... \vee l_{mk_m})$, sendo que os *literais* l_{ij} podem ser tanto $x_1, ..., x_n$, quanto $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$. A rigor, uma instância do problema SAT é uma string (as instâncias verdadeiras são strings $\llcorner\phi\lrcorner \in L_{\text{SAT}}$ e as instâncias falsas são strings $\llcorner\phi\lrcorner \notin L_{\text{SAT}}$), mas aqui seremos mais flexíveis em nossa notação.

Seja ϕ uma instância verdadeira do problema SAT. Agora imagine que alguém queira nos convencer que ϕ é, de fato, satisfazível, mas somos céticos em relação a esse fato. Vamos considerar agora dois cenários:

(1) A pessoa que quer nos convencer simplesmente nos passa a fórmula booleana ϕ e afirma que a fórmula é satisfazível.

(2) A pessoa que quer nos convencer nos passa a fórmula booleana ϕ juntamente com uma valoração $v = v_1, ..., v_n$ que satisfaz ϕ (ou seja uma sequência de valores $v_i \in \{\text{V}, \text{F}\}$, tal que, fazendo a substituição $x_i = v_i$, a fórmula ϕ assume o valor verdade V).

Em qual destes dois cenários nós teríamos menos trabalho?

Aparentemente o cenário (2) é mais fácil, pois nós recebemos uma valoração "de bandeja" que atesta que a fórmula é satisfazível. Tudo o que nos resta fazer, com todo o nosso ceticismo, é substituir os valores $v_1, ..., v_n$ nos locais da fórmula onde apareçam as variáveis $x_1, ..., x_n$ e verficar se, de fato, todas as cláusulas de ϕ são satisfeitas. Mais precisamente, veremos que é simples apresentar um algoritmo polinomial que toma (ϕ, v) como entrada e verifica se a valoração v satisfaz ϕ. Na Seção 9.2 veremos o pseudo-código deste algoritmo.

Por outro lado, no cenário (1), teríamos muito mais trabalho para nos convencermos de que ϕ é satisfazível. Parece difícil escapar da ideia de apelar para a força bruta e testar cada uma das 2^n possíveis valorações até que você encontremos a valoração que satisfaça ϕ (eventualmente encontraríamos uma valoração, pois a premissa é que ϕ é satisfazível). Uma vez que nós encontremos uma valoração que passe em nosso teste, nós ficamos convencidos que ϕ é satisfazível.

> HÁ COMO ESCAPAR DA FORÇA BRUTA?
>
> Embora a ideia de testar todas as valorações possíveis pareça ingênua, os melhores algoritmos conhecidos para o problema SAT não escapam de ideias semelhantes. Essencialmente, no pior caso, todos os algoritmos conhecidos para o problema SAT usam estratégias que exploram um número exponencial de valorações até que uma seja encontrada ou, no caso da instâncias ser falsa, conclui que a fórmula não é satisfazível.

Algo que pode ter passado despercebido nesta discussão é que uma instância verdadeira do problema SAT têm um *certificado* que atesta ela é realmente verdadeira. Esse certificado é a valoração correta, fornecida "de presente" no cenário (2) . Um valoração correta funciona como um "certificado de garantia" de que a fórmula é realmente satisfazível. Além disso, nós podemos *verificar* se o certificado que nos foi fornecido é válido fazendo pouco esforço computacional. Mais precisamente, tendo a fórmula e o certificado em mãos, existe um algoritmo de tempo polinomial que responde SIM se v satisfaz ϕ e NÃO se v não satisfaz ϕ.

Outro ponto fundamental é que uma instância falsa ϕ', por definição, não possui uma valoração que possa ser usada como certificado. Com isso, o nosso algoritmo verificador irá sempre refutar

(ϕ', v), independente da valoração v recebida. Em outras palavras, nós, sendo céticos, nunca poderemos ser convencidos incorretamente de que uma fórmula seja satisfazível quando esta fórmula não for realmente satisfazível.

GRAFOS HAMILTONIANOS

Podemos repetir o mesmo raciocínio que usamos na nossa discussão do problema SAT para vários outros problemas de decisão. Vamos considerar, por exemplo, o problema de testar se um grafo é hamiltoniano. De maneira semelhante ao caso do problema SAT, imagine agora que alguém queira nos convencer que um dado grafo G de n vértices é hamiltoniano.

Novamente, vamos pensar em dois cenários. Um cenário em que recebemos apenas G e outro cenário em que recebemos G juntamente com uma permutação $v_1, ..., v_n$ dos vértices do grafo atestando que G é hamiltoniano (ou seja, uma sequência de vértices tal que, podemos percorrer um ciclo hamiltoniano no grafo usando-se esta sequência de vértices como "guia").

No caso em que recebemos o grafo juntamente com a permutação, precisaríamos de pouco esforço computacional para verificar se G é hamiltoniano: basta tomarmos $v_1, ..., v_n$ e verificar se, de fato, $v_1, ..., v_n$ pode ser usado como guia para percorremos um circuito hamiltoniano em G. Para tal, primeiramente verificamos se a sequência é uma permutação de $V(G)$ (uma permutação de $V(G)$ é uma sequência de vértices sem repetição e que todos os vértices de G aparecem na sequência). Em seguida, verificamos se podemos percorrer o grafo usando esta sequência de vértices como guia (ou seja, testamos se as arestas $v_i v_{i+1} \in E(G)$, $i = 1, 2, ..., n-1$ estão presentes no grafo. Para finalizar, verificamos se existe a aresta para "fechar" o ciclo e voltarmos ao vértices inicial (ou seja, se $v_n v_1 \in E(G)$).

Observe que, novamente, temos a seguinte situação: se G não é hamiltoniano, então por definição não existe um certificado (ou seja, uma permutação) que ateste que G é hamiltoniano. Na próxima seção, o nosso objetivo será generalizar as ideias de certificados e verificação eficiente para problemas de decisão em geral.

9.2 Certificados e verificação em tempo polinomial

Apresentamos agora a definição formal de certificados e verificação polinomial:

Definição 9.2.1 — Cerficados e Verificadores Polinomiais. Seja $L \subseteq \Sigma^*$ um problema de decisão. Dizemos que o problema L pode ser *verificado* em tempo polinomial se existe uma Máquina de Turing polinomial V_L, chamada de verificador de L, e existe um polinômio $poly(n)$ tal que o seguinte é satisfeito:

(a) Para cada string $x \in L$, existe pelo menos uma string $c \in \Sigma^*$, chamada de *certificado de* x tal que $V_L(x, c) = 1$. Além disso, a string c é no máximo "polinomialmente grande" em função de $|x|$. Mais precisamente, $|c| = poly(|x|)$.

(b) Por outro lado, se $x \notin L$, então $\forall c \in \Sigma^*$, $V_L(x, c) = 0$ (em outras palavras, se x é uma instância falsa do problema L, não importa qual string c passamos como candidata a ser o certificado de x, o verificador V_L vai sempre rejeitar a entrada).

9.2.1 Verificando o problema SAT em tempo polinomial

Para sermos mais concretos, vamos formalizar as ideias vistas na Seção 9.1 e explorar a ideia de verificação polinomial no caso do problema L_{SAT}. Para tal, devemos mostrar uma MT polinomial V que possa ser usada como verificador e um polinômio $poly(n)$ tal que o tamanho dos certificado das instâncias verdadeiras de tamanho n nunca são maiores $poly(n)$.

Vamos começar com os certificados. Seja uma instância verdadeira $\llcorner \phi \lrcorner$ do problema L_{SAT} e

seja n o número de variáveis que aparece nesta fórmula (observe que cada variável x_i pode aparecer em ϕ na forma original ou na forma negada). Como já discutimos na Seção 9.1, um certificado para uma fórmula satisfazível pode ser uma valoração que a satisfaça. Mais precisamente, um certificado para $\llcorner\phi\lrcorner$ é a string de bits $v = v_1v_2...v_n$ tal que cada bit v_i indica o valor que a variável x_i deve receber para que a fórmula seja satisfeita. O valor V ou F que x_i deve receber depende do bit v_i ser 1 ou 0.

De maneira mais concreta, considere a fórmula satisfazível $\phi_1 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_3})$ do Exemplo 8.5. Um certificado para $\llcorner\phi\lrcorner$ é a string 110 (pois a valoração $x_1 = V$, $x_2 = V$ e $x_3 = F$ satisfaz ϕ).

Exercício 9.1 Com relação ao problema SAT, mostre strings v, que sugerimos que sejam usadas como certificado, satisfazem a condição $|v| = poly(|\llcorner\phi\lrcorner|)$. ■

Solução: O certificado tem tamanho linear no tamanho da instância, pois uma instância com n variáveis tem tamanho pelo menos n (o tamanho exato de $|\llcorner\phi\lrcorner|$ depende de apresentarmos o esquema exato de codificação que usamos para escrever a fórmula em binário, mas não é difícil ver que são necessários pelo menos n bits para uma fórmula com n variáveis) e o certificado v tem tamanho exatamente n, pois podemos usar um bit para cada variável que aparece na fórmula. Portanto a função $poly(n)$ pode ser a função linear $f(n) = n$.

Agora que já vimos que strings podem ser usadas como certificados para instâncias verdadeiras de L_{SAT}, vamos mostrar formalmente um algoritmo verificador para L_{SAT}. Como mencionamos no Capítulo 7, quando estamos lidando com problemas concretos, é muito mais conveniente apresentar o pseudo-código de um algoritmo ao invés de usar Máquinas de Turing. O verificador, apresentado no Algoritmo **Verificador_SAT**(ϕ, v), recebe uma fórmula booleana ϕ e uma valoração v e retorna SIM ou NÃO, dependendo do caso em que v satisfaça ou não satisfaça a fórmula ϕ.

Verificador_SAT: (ϕ, v)

```
1:  for i = 1; i ≤ m; i++ do          /* Para cada uma das m cláusulas */
2:      C_i = Falso                   /* Assume inicialmente que C_i não vai ser satisfeita */
3:      for j = 1; j ≤ k_i; j++ do    /* Para cada literal da cláusula */
4:          IND = GetIndexVar(l_ij)   /* Obtém índice da variável que aparece no literal */
5:          if LitSat(l_ij, v_IND) then  /* Verifica se o bit v_IND da valoração v faz l_ij = V */
6:              C_i = True            /* Em caso afirmativo a cláusula foi satisfeita */
7:              Break                 /* Sai do loop interno para testar próxima cláusula */
8:      if C_i = Falso then           /* Se todos literais falharam, a cláusula fica falsa */
9:          Return Falso              /* Portanto a v não satisfaz φ */
10: Return Verdadeiro                 /* Passou no teste da linha 10 para toda cláusula */
```

No Algoritmo **Verificador_SAT**(ϕ, v), as m cláusulas da fórmula são ϕ de C_1, C_2, ..., C_m, ou seja, ϕ é uma conjunção da forma $C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_m$, sendo que cada cláusula C_i é uma disjunção de literais da forma $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee ... \vee l_{ik_i})$, onde k_i é o número de literais da cláusula C_i. A função GetVar(l_{ij}) é uma função que retorna o índice da váriável que aparece no literal l_{ij}, por exemplo, tanto no caso em que $l_{ij} = x_4$, quanto no caso em que $l_{ij} = \overline{x}_4$, a função retorna 4. A função LitSat(l_{ij}, v_{IND}) testa se o literal l_{ij} é satisfeito pela valoração em questão. Por exemplo, se $l_{ij} = x_4$, o literal é satisfeito quando $v_4 = 1$. Por outro lado, se $l_{ij} = \overline{x}_4$, o literal é satisfeito quando $v_4 = 0$.

Exercício 9.2 Mostre que $L_{\text{H}} = \{\llcorner G \lrcorner \; ; \; G \text{ é um grafo hamiltoniano}\}$ pode ser verificado em tempo polinomial. ∎

9.2.2 Redefinindo a classe NP

O fato de uma linguagem poder ser verificada em tempo polinomial não nessariamente implica que a linguagem possa ser decidida em tempo polinomial. Veremos a seguir que uma das maneiras de enunciar a conjectura de que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ é conjecturar que existem problemas que podem ser verificados em tempo polinomial, mas que não podem ser decididos em tempo polinomial. Em particular, o problema L_{SAT} é candidato a ser um destes problemas, assim como o problema do grafo hamiltoniano e o problema de decidir se um grid $n \times n$ do problema Sudoku admite preenchimento correto.

Como dissemos, a possibilidade de verificarmos uma linguagem L em tempo polinomial não implica necessariamente na possibilidade de decidirmos L em tempo polinomial. Por outro lado, a possibilidade decidirmos L em tempo polinomial implica na possibilidade verificarmos L em tempo polinomial.

Teorema 9.2.1 Seja $L \subseteq \Sigma^*$ se $L \in P$, então L pode ser verificada em tempo polinomial.

Ideia da prova: Se $L \in P$, então existe uma MT polinomial M que decide L. O que vamos fazer é usar a própria máquina M como verificador de L (possivelmente fazendo uma pequena alteração em M para que ela tome dois argumentos de entrada, pois verificadores tomam dois argumentos de entrada). E quais seriam os cerficados da instâncias verdadeiras? Para toda string $x \in L$, o certificado do x é a string ε. O verificador se comporta exatamente com o algoritmo que decide L, simplesmente ignorando o certificado.

Teorema 9.2.2 Seja V a classe de problemas que podem ser verificados em tempo polinomial. Então $\mathsf{V} = \mathsf{NP}$.

Pelo Teorema 9.2.2, podemos definir a classe NP alternativamente da seguinte maneira.

Definição 9.2.2 — Classe NP (definição equivalente). Uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ está em NP se existe um polinômio $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e uma MT M com complexidade de tempo polinomial (essa MT é chamada de verificador de L) tal que $\forall x \in \Sigma^*$:

$$\boldsymbol{x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^{p(|x|)}; M(x,u) = 1}$$

Para $x \in L$ e $u \in \Sigma^{p(|x|)}$ satisfazendo $M(x,u) = 1$, a string u é chamada de certificado de x (com relação à linguagem L e à MT M).

Note que a definição acima parece ser bastante diferente da definião original da classe NP (i.e., Definição 8.2.4), entretanto, ambas se referem exatamente o mesmo conjunto de linguagens.

9.3 Exercícios

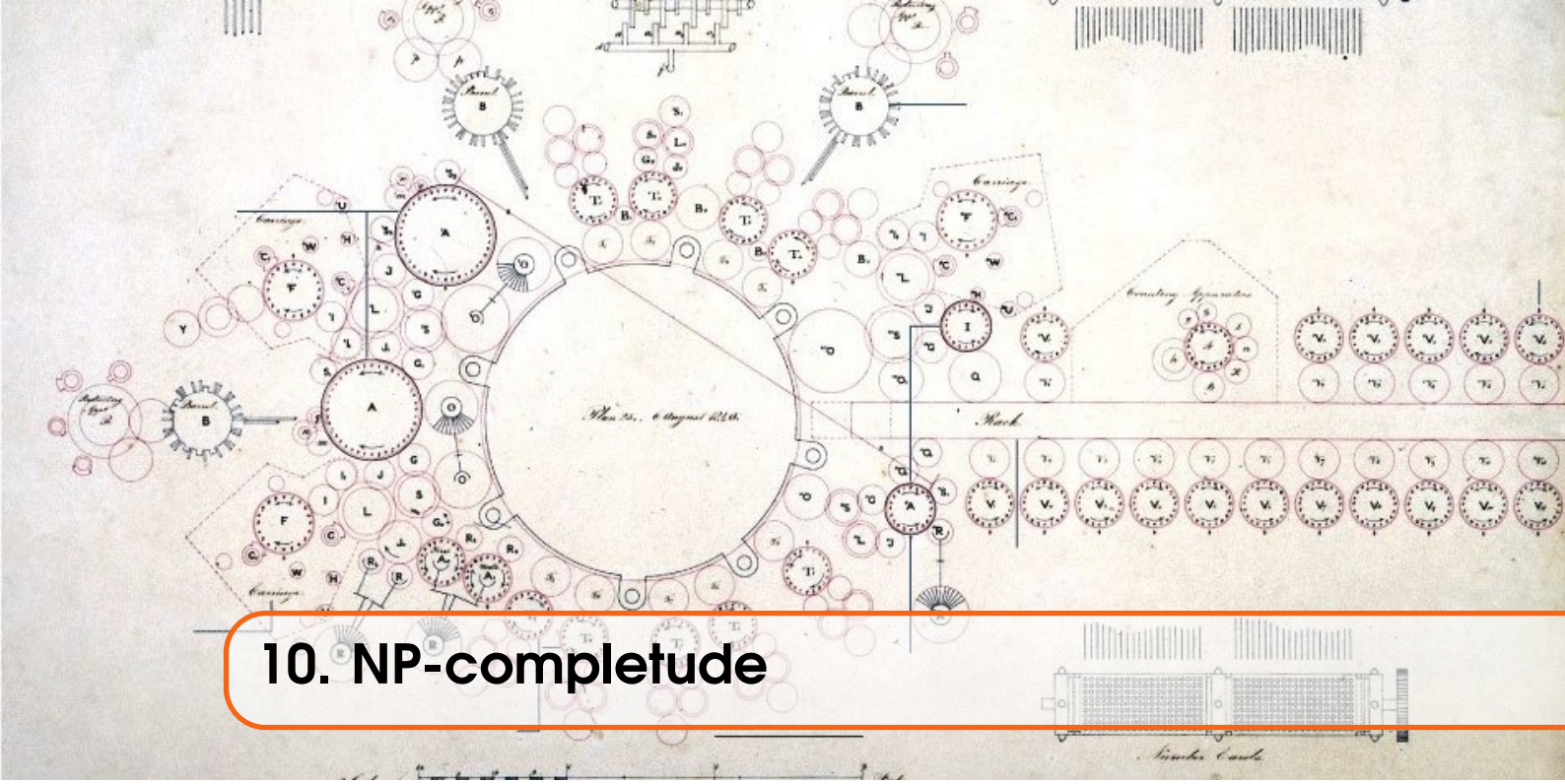
Exercício 9.3 Seja uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ e seja $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$. Dada uma classe de complexidade $\mathscr{C}$, definimos o complemento de $\mathscr{C}$ da seguinte maneira: $co\text{-}\mathscr{C} = \{\overline{L} \,|L \in \mathscr{C}\}$. Com relação a esta definição, responda o seguinte:

- Seja L_E o problema de testar se um grafo não é euleriano. Prove que $L_E \in co\text{-P}$.
- Prove que $\mathsf{P} = co\text{-P}$.

■

Exercício 9.4 Uma conjectura conhecida em complexidade computacional é que $\mathsf{NP} \neq co\text{-NP}$. Por que não poderíamos provar que $\mathsf{NP} = co\text{-NP}$ usando uma estratégia de prova semelhante a estratégia usada no exercício anterior? ■

Exercício 9.5 Na Definição 9.2.1, item (a), um dos requistos é que o certificado tenha tamanho polinomial no tamanho da instância. Por que motivo faz sentido esta restrição? ■



10. NP-completude

Neste capítulo estudaremos mais a fundo os problemas da classe NP. Em particular, veremos que alguns destes problemas podem ser considerados os "mais difíceis" de toda classe. Mas como poderíamos tornar precisa a ideia de que certos problemas são os mais difíceis da classe NP? O que vamos fazer é provar que se existe um algoritmo polinomial para tal problema, então todos os demais problemas da classe NP também admitem algoritmos polinomiais.

10.1 NP-completude e o Teorema de Cook-Levin

Nesta seção vamos apresentar um teorema que foi provado por Stephen Cook e Leonid Levin no início da década de 70. O terema diz o seguinte: caso exista um algoritmo polinomial para o problema SAT, então todos os problemas da classe NP podem ser resolvidos em tempo polinomial. Para que possamos a apresentar o Teorema de Cook-Levin, precisamos primeiro entender o seguinte: Como a existência de um algoritmo polinomial para um dado problema pode implicar a existência de um algoritmo polinomial para um outro dado problema?

Sejam L_1 e L_2 dois problemas de NP. Suponha que existe um algoritmo polinomial M_2 para L_2. A ideia central é mostrar que instâncias do problema L_1 podem ser vistas, também como instâncias de L_2 "disfarçadas". Como isso é feito? Apresentendo um algoritmo R que, ao tomar uma instância x do problema L_1 como entrada e retorne uma instância y de L_2 como saída. Mas não apenas isto: O ponto chave é que R deve funcionar de forma que se x é uma instância verdadeira de L_1, então y também deve ser uma instância verdadeira de L_2, e, por outro lado, se x é uma instância falsa de L_1, y também deve ser uma instância falsa de L_2. Este algoritmo R é chamado de *redução*.

> INSTÂNCIAS DE PROBLEMAS
>
> Lembrando que uma instância de um problema de decisão L é uma string qualquer $x \in \Sigma^*$. Normalmente x é a representação binária de um certo objeto matemático relacionado ao problema em questão. Por exemplo, se o problema em questão é testar se um grafo tem certa propriedade, tipicamente x é a representação em binário de um grafo. Se $x \in L$, dizemos que x é uma instância verdadeira de L e se $x \notin L$, dizemos que x é uma instância falsa de L.

Mas qualquer redução R basta? Não! O algoritmo R, que transforma instâncias de L_1 para L_2, deve ser polinomial. Desta maneira podemos obter um algoritmo polinomial M_1 para resolver L_1 usando uma combinação de R com M_2 (ambos polinomiais). Para resolver L_1, primeiramente transformamos o problema L_1 em L_2 usando R e, depois, usamos M_2 para resolver L_2.

Definição 10.1.1 — Redução de tempo polinomial. Sejam L_1 e L_2 linguagens sobre Σ. Dizemos que L_1 é *polinomialmente redutível* à L_2 se existe uma MT polinomial R tal que $x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2$. Neste caso escrevemos $L_1 \leq_P L_2$. Para simplificar, muitas vezes diremos simplesmente que L_1 é *redutível* a L_2 (ao invés de dizer "polinomialmente" redutível).

■ **Exemplo 10.1** Vamos mostrar que $L_{\text{CI}} \leq_P L_{\text{CL}}$, ou seja, que o problema da clique é redutível ao problema do conjunto independente. Segue o pseudo-código da redução:

Redução_CI_CL: (G,k)
1: $V(G') = V(G)$
2: $E(G') = \varnothing$
3: $G' = (V(G'), E(G'))$
4: **Para cada** par de vértices distintos u, v de G **do**
5: **if** $uv \notin E(G)$ **then**
6: insira aresta uv em $E(G')$
7: Devolva (G',k)

■

Exercício 10.1 Mostre que a relação $\leq_P$ é transitiva. ■

Antes de entendermos como obter reduções entre problemas, vamos ver um teorema que nos esclarece por que um algoritmo polinomial para um problema L_2 e uma redução de L_1 para L_2 implica em um algoritmo polinomial para L_1.

Teorema 10.1.1 Se $L_1 \leq_P L_2$ e $L_2 \in \mathsf{P}$, então $L_1 \in \mathsf{P}$.

Prova: Como $L_2 \in \mathsf{P}$, então existe uma MT polinomial M_2 que decide L_2. Como $L_1 \leq_P L_2$, existe uma MT polinomial R tal que $x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2$. Consire o algoritmo polinomial M_1 que, dado $x \in \Sigma^*$, tem o seguinte comportamento: $M_1(x) = M_2(R(x))$. Portanto, $M_1(x) = 1$, se $x \in L_1$, e $M_1(x) = 0$, se $x \notin L_1$. Consequentemente M_1 decide L_1 e, assim, $L_1 \in \mathsf{P}$. □

Definição 10.1.2 — Problemas NP-difíceis. A classe NP-difícil é o conjunto de problemas de decisão L tal que $\forall\, L' \in \mathsf{NP}$, $L' \leq_P L$. Se $L \in$ NP-difícil, normalmente dizemos que L *é* NP-*difícil*.

Definição 10.1.3 — Problemas NP-completos. A classe NP-completo é o conjunto de problemas de decisão L tal que o seguinte é satisfeito:
- L é NP-difícil;
- $L \in \mathsf{NP}$.

Dizemos também que L é NP-*completo* no caso em que $L \in$ NP-completo.

Teorema 10.1.2 Seja $L \in$ NP-*completo*. Se $L \in$ P, então P = NP.

Prova: Suponha que o problema NP-completo L esteja contido na classe P. Seja L' um problema qualquer de NP. Como L é NP-completo, então $L' \leq_P L$, e portanto, pelo Teorema 10.1.1, $L' \in$ P. Consequentemente NP $\subseteq$ P. Como P $\subseteq$ NP (ver Exercício 8.3), então P = NP. □

Teorema 10.1.3 — Teorema de Cook-Levin. L_{SAT} é NP-completo.

Corolário 10.1.4 Se L_{SAT} admite um algoritmo polinomial, então é P = NP.

Uma vez que a maior parte dos pesquisadores da área de complexidade computacional conjectura que P $\neq$ NP, uma consequência é que é bastante improvável que o problema SAT (e também qualquer problema NP-completo ou NP-difícil) admita um algoritmo polinomial.

10.2 Lidando com problemas de busca e otimização

Muitos problemas que aparecem na prática não são problemas de decisão. Muitos destes problemas têm a forma de *problemas de busca* ou *problemas de otimização*. Por exemplo, considere o problema de fatorar um número[1], isto é, dado n, queremos retornar a sequência de fatores primos $p_1, ..., p_k$, tal que o produto destes números seja n. Este tipo de problema é chamado de problema de busca.

Um outro problema famoso, conhecido como *Problema do Caixeiro Viajante* é o seguinte: dado um grafo com peso nas arestas representando as distâncias entre pares de cidades, encontrar o menor percurso visitando cada cidade uma única vez. Este tipo de problema é conhecido como problema de otimização. Tais problemas são generalizações de problemas de busca em que a solução que estamos buscando satisfaz algum critério de maximização ou minimização.

A versão de decisão de um problema

Na área de complexidade computacional, quando encontramos um problema de busca ou otimização, é bastante comum encontrar um problema de decisão que seja semelhante ao problema original estudar a complexidade deste problema de decisão. Qual é vantagem disso? Problemas de decisão, embora mais simples, comumente ainda assim "capturam" a dificuldade inerente dos problemas originais.

A vantagem que temos em trabalhar com problemas de decisão é que estes problemas podem ser classificados como pertencendo as classes P, NP e NP-completo. Por outro lado problemas de busca e otimização, embora possam ser descritos de maneira formal, não possuem definições simples práticas como definições em termos de linguagens.

■ **Exemplo 10.2 — O problema da clique máxima (MAXCLIQUE).** Dado um grafo G, encontrar a maior clique de G. Note que, do ponto de vista formal, para resolver este problema precisamos encontrar uma MT que tome como entrada $\llcorner G \lrcorner$ e retorne $\llcorner S \lrcorner$, tal que S é um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ que induza a maior clique do grafo G. ■

[1] O problema de fatoração é um problema computacional clássico e a dificuldade de resolução do mesmo é a base do protocolo de criptografia RSA.

Exercício 10.2 Mostre que se existe um algoritmo polinomial para o problema MAXCLIQUE, então existe um algoritmo polinomial para o problema da clique. ■

Na seção 10.3, provaremos que o problema da clique é NP-completo. Uma vez que um algoritmo polinomial para o problema de otimização MAXCLIQUE pode facilmente ser adaptado para resolver o problema CLIQUE (Exercício 10.2), conclui-se que se o problema de otimização puder ser resolvido em tempo polinomial, então P = NP. Em outras palavras, para mostrarmos os que o problema de otimização é intratável basta mostrarmos que a versão de decisão de problema é intratatável.

Um outro problema de otimização semelhante ao problema MAXCLIQUE é o problema de encontrar o maior conjunto independente de um grafo. Neste problema, ao invés de estarmos procurando pelo maior subgrafo completo, estamos procurando pelo maior subgrafo que não contém nenhuma aresta.

10.3 Provando a *NP*-completude de problemas

Na seção 10.1 vimos que o problema SAT parece ter um papel especial na classe NP. Uma maneira de interpretar o Teorema de Cook-Levin é que qualquer problema da classe NP pode ser visto como uma versão "disfarçada" do problema SAT, pois todos estes problemas podem ser reduzidos ao problema SAT. O que veremos agora é que outros problemas da classe NP também possuem esta mesma propriedade. Em outras palavras, diversos outros problemas também são NP-completos. Para que possamos explorar isto, o teorema a seguir será essencial.

Teorema 10.3.1 Suponha que L_1 é um problema NP-completo. Se $L_2 \in \mathsf{NP}$ e $L_1 \leq_P L_2$, então L_2 também é um problema NP-completo.

Prova: Seja uma linguagem qualquer L de NP. Como L_1 é NP-completo, temos que $L \leq_P L_1$. Como a relação $\leq_P$ é trasitiva (veja Exercício 10.1), podemos usar o fato que $L \leq_P L_1$ e $L_1 \leq_P L_2$ para concluir que $L \leq L_2$. Como $L_2 \in \mathsf{NP}$, concluímos que L_2 é NP-completo. □

A demonstração de que o problema L_{SAT} é NP-completo é o resultado apresentado no famoso Teorema de Cook-Levin. A prova deste teorema requer certo trabalho. Entretanto, para que possamos mostrar a NP-completude de outros problemas, uma vez que temos o Teorema de Cook-Levin em mãos, não é tão complicado. Observe que o Teorema 10.3.1, diz que nós podemos usar um dado problema NP-completo para provar que um novo problema também é NP-completo. Como o Teorema de Cook-Levin nos diz que o problema L_{SAT} é NP-completo, nós podemos usá-lo para mostrar que outros problemas também são NP-completos. Mostramos um exemplo disto na Seção 10.3.1.

10.3.1 Provando que o problema do conjunto independente é NP-completo

Nesta seção vamos mostrar que $L_{\text{SAT}} \leq_P L_{\text{CI}}$. Para tal, precisamos mostrar uma redução, ou seja, um algoritmo polinomial, que toma como entrada uma instância $\llcorner \phi \lrcorner$ do problema SAT e retorna como saída a instância $\llcorner (G_\phi, k) \lrcorner$ do problema do conjunto independente satisfazendo o seguinte: se ϕ é satisfazível, então G_ϕ contém um conjunto independente de tamanho pelo menos k. Por outro lado, se ϕ não é satisfazível, então todos os conjuntos independentes de G_ϕ são menores que k.

Para evitar que a notação fique muito sobrecarregada, nós vamos simplesmente escrever ϕ e (G_ϕ, k) para nos referirmos as instâncias dos problemas em questão. Esquematicamente, a redução que procuramos é ilustrada pela Figura 10.1.

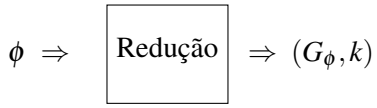


Figure 10.1: A redução toma uma fórmula ϕ e retorna (G_ϕ, k), onde G_ϕ é um grafo e k um número natural tal que ϕ *é satisfazível* $\Leftrightarrow$ G_ϕ *contém um conjunto independente de tamanho* k.

Seja $\phi = C_1 \wedge ... \wedge C_m$ uma instância do problema SAT com n variáveis x_i, $i = 1, ..., n$. Para cada $j = 1, ..., m$, denotamos por $A(C_j)$ o conjunto dos literais que aparecem na cláusula C_j. A redução irá tomar como entrada a fórmula ϕ e produzir como saída a instância (G_ϕ, m). O algoritmo é descrito em detalhes abaixo:

Redução(ϕ)

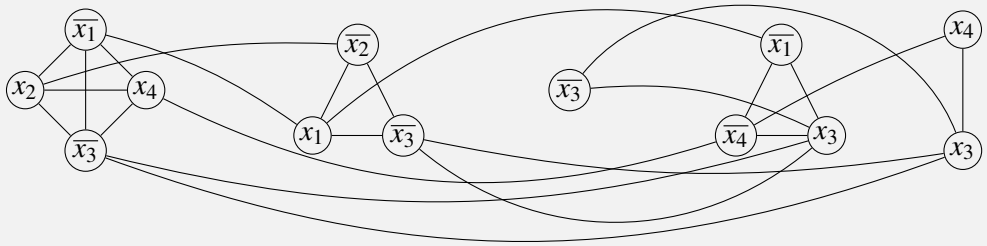
1. Crie um conjunto de vértices V de tamanho $\sum_i^m |A(C_j)|$.
2. Particione o conjunto V em subconjuntos $V_1, ..., V_m$, tal que cada subconjunto V_j tem tamanho $|A(C_j)|$ e os rotule[2] cada vértice de v_j com um elemento diferente do conjunto A_j.
3. Adicione as seguintes arestas: para cada conjunto de vértices V_j, adicione todas as arestas possíveis entre pares de vértices de V_j (ou seja, cada V_j deve induzir uma clique no grafo).
4. Além das arestas presentes da cliques induzidas por V_j, adicione arestas ligando vértices rotulados com literais complementares, ou seja, adicione as arestas uv tal que u tenha rótulo x_i e v tenha rótulo $\overline{x_i}$, $i = 1, ..., n$.
5. Retorne (G_ϕ, m)

UM EXEMPLO DA REDUÇÃO

Vamos mostrar um exemplo para tornar essa discussão mais concreta. Suponha que a entrada da redução é a fórmula abaixo:

$$\phi_1 = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_3 \vee x_4)$$

Neste caso, a saída da redução é $(G_{\phi_1}, 5)$, sendo que G_{ϕ_1} é o grafo da figura abaixo.



Observe que cada cláusula da fórmula ϕ_1 corresponde a uma clique no grafo G_{ϕ_1} da figura acima. A primeira cláusula da fórmula, isto é, $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$, corresponde a clique de tamanho 4, mais à esquerda no desenho do grafo. Observe que os literais $\overline{x_1}$, x_2, $\overline{x_3}$ e x_4 da cláusula são os rótulos desta clique no grafo. Cada uma das demais cláusulas da fórmula corresponde a uma clique no grafo (as cliques tem tamanho 3, 1, 3 e 2, respectivamente). Além das arestas presente nestas cliques, o grafo contém arestas conectando cada literal x_i ao seu complemento $\overline{x_i}$. Por exemplo, o literal $\overline{x_1}$ aparece na primeira cláusula e o literal x_1 na segunda cláusula, portanto há uma aresta ligando os vértices com estes rótulos nas cliques.

[2]Devemos ter cuidado para não confundir o vértice de um grafo com o rótulo de um vértice deste um grafo. Em um grafo, cada vértice é um elemento diferente, entretanto, vértices diferentes podem ainda assim ter rótulos iguais.

Importante: Lembramos que a redução precisa garantir que G_ϕ *possui um conjunto independente de tamanho m se e somente se a fórmula* $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ *é satisfazível*. Veremos agora que, de fato, isso é verdade.

A razão disso é que o grafo G_ϕ expressa as dependências entre as cláusulas de ϕ. No exemplo do quadro acima, note que a primeira cláusula contém o literal $\overline{x_1}$ e a segunda cláusula contém o literal x_1. Uma vez que estes dois literais não podem ser satisfeitos ao mesmo tempo, há uma dependência entre estas duas cláusulas. A ideia central é que se existe uma valoração que satisfaz ϕ, essa valoração satisfaz (pelo menos) um literal em cada uma das m cláusulas, e os literais satisfeitos estão relacionados aos rótulos dos vértices do conjunto independente de tamanho m no grafo G_ϕ.

Para provarmos que (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira se, e somente se, ϕ é satisfazível, vamos considerar um conjunto independente S de tamanho máximo no grafo G_ϕ. Uma vez que cada um dos vértices de S deve pertencer a uma clique diferente (afinal, quaisquer dois vértices dentro de uma mesma clique são adjacentes), S deve ter m vértices ou menos.

Caso 1: (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira.

Neste caso temos que provar que ϕ é satisfazível. Como (G_ϕ, m) é uma instância verdadeira, temos que $|S| = m$. A única possibilidade em que isso ocorre é o caso em que S seja um conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$, com um vértice de cada clique diferente. Uma valoração que satisfaz ϕ pode ser obtida a partir dos rótulos dos vértices $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

Caso 2: (G_ϕ, m) é uma instância falsa.

Neste caso temos que provar que ϕ não é satisfazível. Suponha por absurdo que ϕ é satisfazível e, portanto, existe pelo menos um literal satisfeito em cada cláusula de ϕ. Seja S' o conjunto de vértices correspondentes aos literais satisfeitos em ϕ. Como (G_ϕ, m) é uma instância falsa, observe que o $|S| < m$. Entretanto, o conjunto S' é independente (afinal, neste conjunto não pode haver nenhum par de vértices com literais x_i e $\overline{x_i}$) e tem tamanho m, o que contradiz o fato que S é um conjunto independente máximo.

Exercício 10.3 Usando o fato que o problema do conjunto independnete é NP-completo, prove que o problema da clique é NP-completo. ∎

10.4 Exercícios

Nos exercícios a seguir, as seguintes definições serão necessárias:

Definição 10.4.1 — Isomorfismo de Grafos. Dados dois grafos G_1 e G_2, decidir se o grafo G_1 é isomorfo ao grafo G_2.

Definição 10.4.2 — Problema do caixeiro viajante. Dado um grafo completo G com peso nas arestas, encontrar o caminho hamiltoniano de G com o menor custo.

Definição 10.4.3 — Problema da coloração mínima. Dado um grafo G determinar encontrar uma coloração de G com o menor número possível de cores.

Definição 10.4.4 — Problema da k-coloração. Dado um grafo (G,k) decidir se existe uma coloração de G com k ou menos cores.

Definição 10.4.5 — Problema da 3-Coloração. Dado um grafo G decidir se existe uma coloração de G com 3 ou menos cores.

Definição 10.4.6 — Problema da cobertura mínima por vértices. Dado um grafo G determinar encontrar a cobertura por vértices de G com o menor número possível de vértices.

Definição 10.4.7 — Problema 3-SAT. Dada uma fórmula ϕ em CNF tal que cada cláusula tenha no máximo 3 literais, decidir se ϕ é satisfazível.

Exercício 10.4 Para cada um dos problemas definidos anteriormente, faça o seguinte:

- Se o problema for de decisão, apresente uma definição formal para o problema usando uma linguagem.
- Se o problema for de otimização ou de busca, apresente uma versão de decisão para o mesmo problema e, em seguida, apresente uma definição formal usando uma linguagem.
- Prove que a versão de decisão de cada um destes problemas está em **NP**.

■

Exercício 10.5 Prove que o problema 3-SAT é NP-completo. ■

Exercício 10.6 Prove que o problema da 3-coloração é NP-completo. ■

Exercício 10.7 Prove que o problema da k-coloração é NP-completo. ■

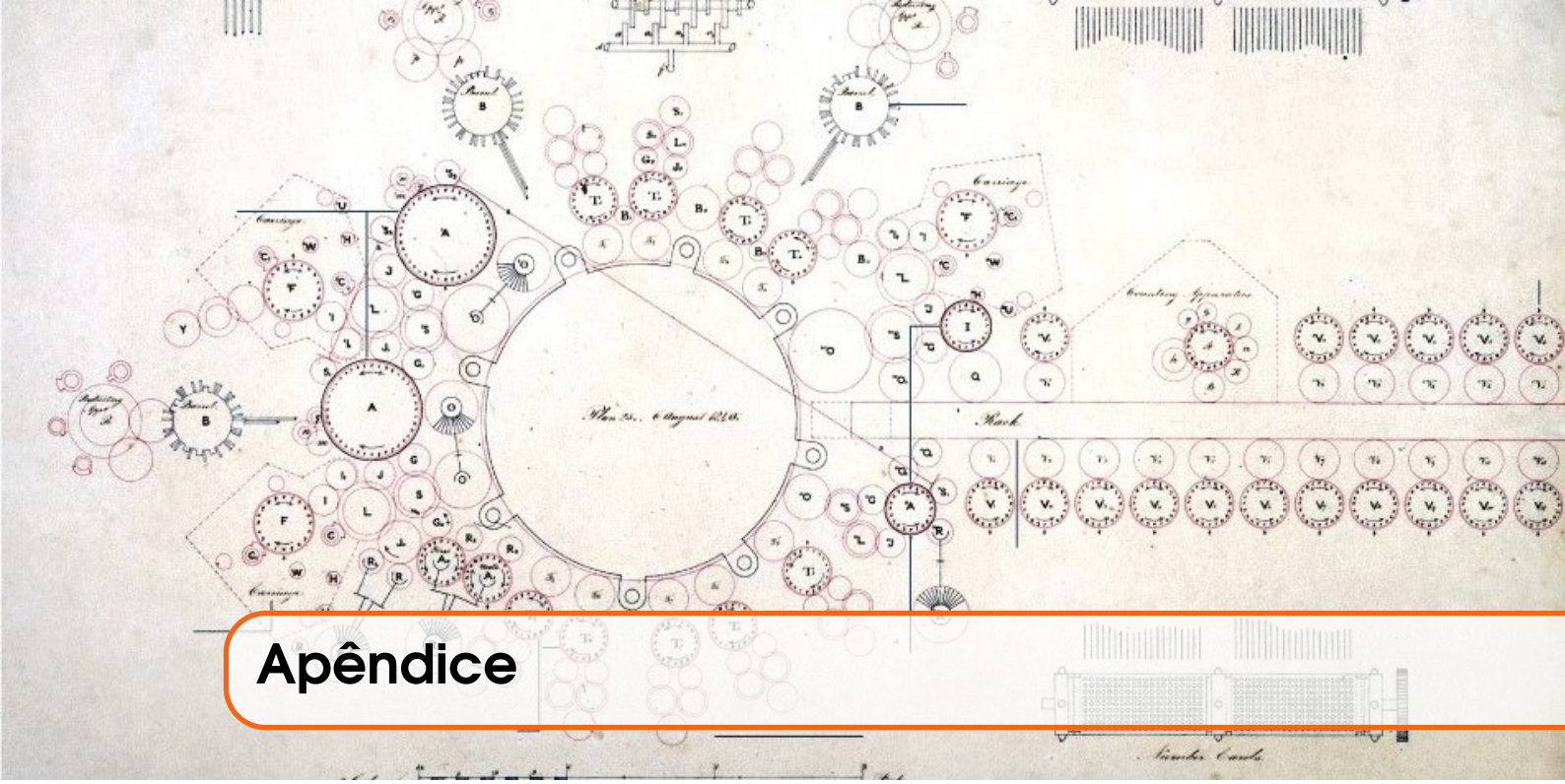
Exercício 10.8 Prove que se existe um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração mínima para um grafo, então P = NP. ■

Exercício 10.9 Seja L_{CV} a versão de decisão do problema de cobertura por vértices que você obteve no Exercício 10.4. Mostre que $L_{\text{CI}} \leq_P L_{\text{CV}}$. ■

Exercício 10.10 Considere o problema NP-completo definido abaixo:

- Uma instância do problema é par (S,k) onde S é um conjunto de números inteiros e k é um número inteiro. Uma instância de (S,k) é verdadeira se e somente se S contém um subconjunto tal que a soma dos números neste subconjunto é k.
  (a) O que seria um certificado para uma instância verdadeira do problema?
  (b) Apresente um algoritmo polinomial verificador para o problema.

■



Apêndice

Grafos e grafos direcionados

Um *grafo* G é um par $(V(G), E(G))$ onde:

- $V(G)$ é um conjunto finito, chamado de conjunto de vértices.
- $E(G)$ é um conjunto onde cada elemento é um conjunto de dois vértices, chamado de conjunto de arestas

Um *grafo direcionado* G é um par $(V(G), E(G))$ onde

- $V(G)$ é um conjunto finito, chamado de conjunto de vértices
- $E(G)$ é um conjunto de pares de vértices,
  chamado de conjunto de arcos

Quando o $V(G)$ não é definido explicitamente, a convenção é $V(G) = [1..n]$.

Notação simplificada: $G = (V, E)$ (ao invés de $G = (V(G), E(G))$)
Notação simplificada: uv denota a aresta $\{u, v\}$

Grafos ponderados

Um *grafo ponderado* é um par (G, w) onde G é um grafo e w é uma função que associa a cada aresta a de G um *peso* $w(a)$.

- Grafos direcionados ponderados são definidos de maneira análoga.
- Para simplificar, às vezes diremos "grafo ponderado G" ao invés de "grafo ponderado (G, w)".
- Convenção: Se G não é um grafo ponderado, $\forall e \in E(G)$, $w(e) = 1$.
- Notação simplificada: Se $\{u, v\} \in E(G)$, escrevemos $w(u, v)$ para o peso de $\{u, v\}$. (ao invés de escrever $w(\{u, v\})$

Matriz de Adjacência de um grafo (ponderado) G: A *matriz de adjacência* de G é a matriz M_G indexada por $V(G) \times V(G)$ dada por

$$M_G[u, v] = \begin{cases} w(u, v), & \text{se } uv \in E(G), \\ 0, & \text{se } uv \notin E(G). \end{cases}$$

Propriedades de Grafos

Se abaixo as definições de vários conceitos elementares em teoria dos grafos.

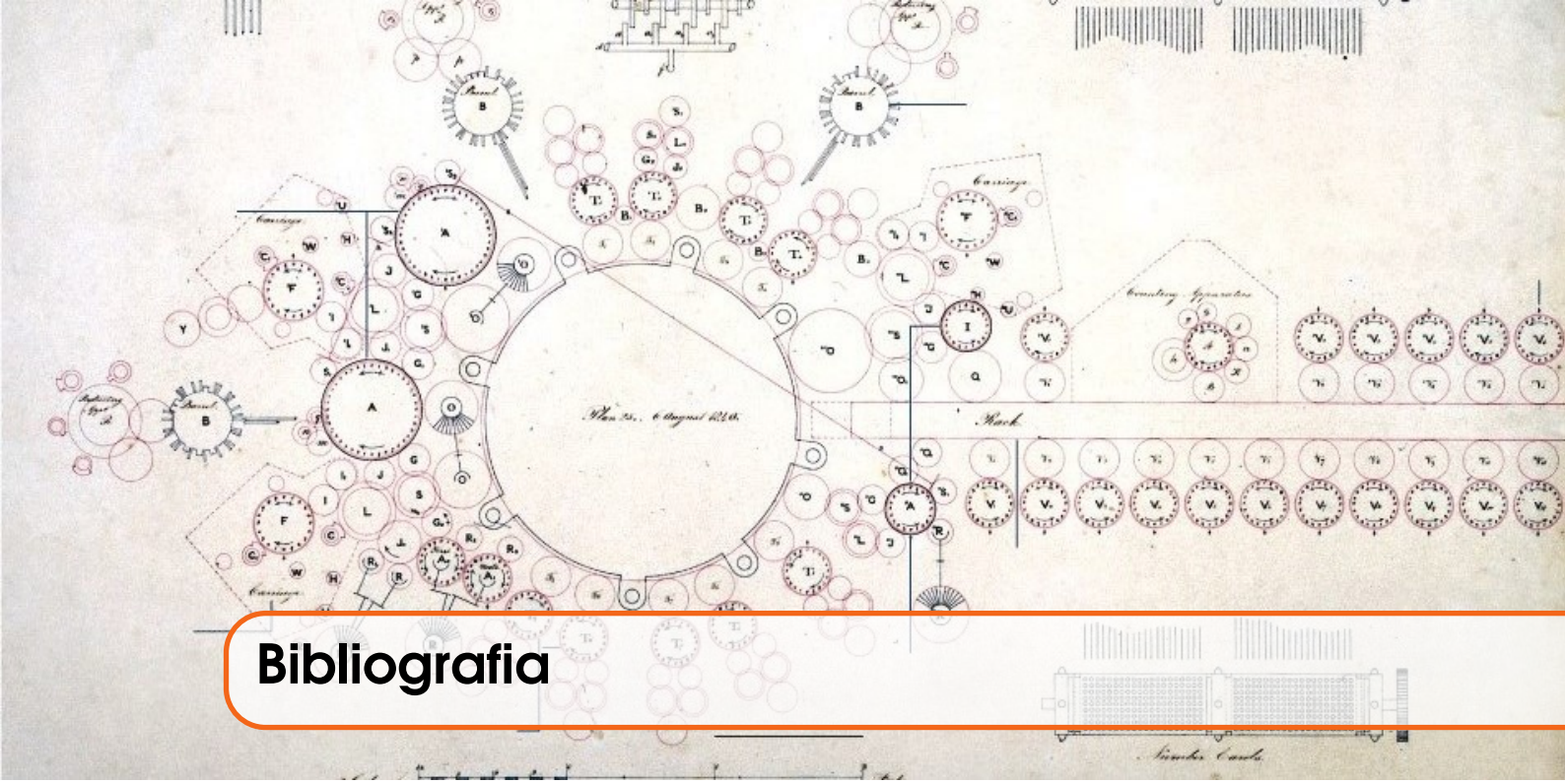
- O *complemento* de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ que possui conjunto de vértices de $V(\overline{G}) = V(G)$ e tal que $\forall u, v \in V(\overline{G})$, $uv \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow uv \notin E(G)$.
- Uma *clique* em um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $\forall u, v \in S$, $uv \in E(G)$.
- Um *conjunto independente* em um grafo G é um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que $\forall u, v \in S$, $uv \notin E(G)$.
- Um grafo G é dito *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos independentes.
- Um *grafo completo* é um grafo tal que existe uma aresta entre cada par de vértices do grafo. Em outras palavras, $V(G)$ é uma clique.
- Um grafo G é *conexo* se para todos par de vértices u, v do grafo G existe um percurso que saia de u e chegue em v.
- Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico
- Um grafo G é dito *k-colorível* se é possível associar cores aos seus vértices de forma que toda aresta tenha as duas pontas coloridas com cores diferentes.
- Dois grafos G e H são ditos *isomorfos* se existe uma bijeção $f : V(G) \leftrightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$.

Seja G um grafo com n vértices e seja $\pi = [\pi_1, ..., \pi_n]$ uma permutação de $V(G)$. Observação: neste texto permutações são sempre cíclicas, ou seja, π_{n+1} se refere à π_1. A partir disto, definimos:

- A permutação π é um *circuito hamiltonino* de G se $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \in E(G)$, $i = 1, ..., n$.
- Circuitos hamiltonianos também são chamados de ciclos hamiltonianos.
- Grafos que admitem circuitos hamiltonianos são chamados de *grafos hamiltonianos*.
- A permutação π de G é um *caminho hamiltoniano* se $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \in E(G)$, $i = 1, ..., n-1$.

Seja G um grafo com m arestas. Seja $\pi = [\pi_1, ..., \pi_m]$ uma permutação de $E(G)$. A partir disto definimos:

- A permutação π é um *circuito euleriano* de G se para todo $i \in [1..n]$, $\pi_i = uv$ e $\pi_{i+1} = vw$, para vértices u, v, w de G. Isto é, existe um passeio visitando todas as arestas do grafo.
- Grafos que admitem circuitos eulerianos são chamados de *grafos eulerianos*.



Bibliografia

Livros

[Aar13] Scott Aaronson. *Quantum Computing Since Democritus*. 1st edition. Cambridge, 2013 (cited on pages 9, 89).

[Fes19] Edward Feser. *Filosofia da Mente - Um guia para iniciantes*. 1st edition. Edições Santo Tomás, Nov. 2019 (cited on page 90).

[HMU06] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman. *Introduction to the Theory of Computation*. 2nd edition. Addison Wesley, 2006 (cited on pages 9, 37, 61, 66).

[Sip06] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. 2nd edition. Thomson Course Technology, 2006 (cited on pages 9, 16, 61, 66).

[Sud05] Thomas A Sudkamp. *Languages and Machines: An Introduction to the Theory of Computer Science*. 3rd edition. Addison Wesley, 2005 (cited on page 16).