

# Introdução à Teoria da Computação

## Lema do Bombeamento (cont.)

**Professor Murilo V. G. da Silva**

Departamento de Informática  
Universidade Federal do Paraná

2025/2

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular.

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$  tal que

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$  tal que  $w = xyz$

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades:



# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$  tal que  $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$  tal que  $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$  tal que  $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  **satisfaz as condições do LB**.

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$  tal que  $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  **satisfaz as condições do LB**.

Logo  $w = xyz$  e as **três propriedades** acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  **satisfaz as condições do LB**.

Logo  $w = xyz$  e as **três propriedades** acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . **Portanto**  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| =$



# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Lego  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}|$

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Lego  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned}|xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n)\end{aligned}$$

Note:

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note:  $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$ ,

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  **satisfaz as condições do LB**.

Logo  $w = xyz$  e as **três propriedades** acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . **Portanto**  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note:  $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$ ,  
condição (1)  $\Rightarrow (1 + n) > 2$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  **satisfaz as condições do LB**.

Logo  $w = xyz$  e as **três propriedades** acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . **Portanto**  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note:  $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$ ,  
condição (1)  $\Rightarrow (1 + n) > 2$ .

Como  $p \geq 2$  e  $(1 + n) \geq 2$ ,



# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note:  $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$ ,  
condição (1)  $\Rightarrow (1 + n) > 2$ .

Como  $p \geq 2$  e  $(1 + n) \geq 2$ ,  $|xy^{p+1}z|$  não é primo.

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  **satisfaz as condições do LB**.

Logo  $w = xyz$  e as **três propriedades** acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . **Portanto**  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note:  $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$ ,  
condição (1)  $\Rightarrow (1 + n) > 2$ .

Como  $p \geq 2$  e  $(1 + n) \geq 2$ ,  $|xy^{p+1}z|$  não é primo.  
Isso contradiz  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

# Exemplo de uso do LB: Primos em unário

**Teorema:**  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$  não é regular.

**Prova:** Suponha que  $L_{uP}$  é regular. Pelo LB, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que se  $w \in L_{uP}$  e  $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq t$  (3)  $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$ .

Seja  $w = 1^p$ , para um primo  $p > t$ . Note que  $w$  satisfaz as condições do LB.

Logo  $w = xyz$  e as três propriedades acima valem.

Usando (3),  $xy^kz \in L_{uP}$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ .

Seja  $|y| = n$ . Note que  $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note:  $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$ ,  
condição (1)  $\Rightarrow (1 + n) > 2$ .

Como  $p \geq 2$  e  $(1 + n) \geq 2$ ,  $|xy^{p+1}z|$  não é primo.  
Isso contradiz  $xy^{p+1}z \in L_{uP}$ . Logo  $L_{uP}$  não é regular.

# Números primos em binário

**Teorema:** A linguagem  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Slide anterior.

# Números primos em binário

**Teorema:** A linguagem  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Slide anterior.

Também é possível provar o seguinte:

# Números primos em binário

**Teorema:** A linguagem  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Slide anterior.

Também é possível provar o seguinte:

**Teorema:** A linguagem  $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

# Números primos em binário

**Teorema:** A linguagem  $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Slide anterior.

Também é possível provar o seguinte:

**Teorema:** A linguagem  $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo} \}$  não é regular.

**Prova:** Exercício Opcional.