

Introdução à Teoria da Computação

Gramáticas - Parte 1

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2025/2

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais*

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V$

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.
- S é a *variável inicial*, $S \in V$.

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.
- S é a *variável inicial*, $S \in V$.

Exemplo:

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.
- S é a *variável inicial*, $S \in V$.

Exemplo:

$G_{EX} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{EX}, E)$, sendo que A_{EX} contém os 10 elementos abaixo:

$E \rightarrow I$

$E \rightarrow E+E$

$E \rightarrow E * E$

$E \rightarrow (E)$

$I \rightarrow a$

$I \rightarrow b$

$I \rightarrow Ia$

$I \rightarrow Ib$

$I \rightarrow I0$

$I \rightarrow I1$

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.
- S é a *variável inicial*, $S \in V$.

Exemplo:

$G_{EX} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{EX}, E)$, sendo que A_{EX} contém os 10 elementos abaixo:

$E \rightarrow I$

$E \rightarrow E + E$

$E \rightarrow E * E$

$E \rightarrow (E)$

$I \rightarrow a$

$I \rightarrow b$

$I \rightarrow Ia$

$I \rightarrow Ib$

$I \rightarrow I0$

$I \rightarrow I1$

Normalmente o conjunto de regras é descrito usando o seguinte formato compacto

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.
- S é a *variável inicial*, $S \in V$.

Exemplo:

$G_{EX} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{EX}, E)$, sendo que A_{EX} contém os 10 elementos abaixo:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.
- S é a *variável inicial*, $S \in V$.

Outro exemplo:

Def.: Gramática Livre de Contexto (GLC)

Uma *Gramática Livre de Contexto* (GLC) é uma quádrupla $G = (V, T, P, S)$ tal que:

- V é o conjunto de *variáveis*
- T é o conjunto de *símbolos terminais* (alfabeto da gramática)
- P é o conjunto de *regras de produção*,
cada regra de produção é uma expressão da forma $X \rightarrow W$,
 $X \in V \quad W \in (V \cup T)^*$.
- S é a *variável inicial*, $S \in V$.

Outro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$P \rightarrow \epsilon | 0|1|0P0|1P1$

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1$$

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- P

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- $P \Rightarrow 0P0$

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- $P \Rightarrow 0P0 \Rightarrow 01P10$

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- $P \Rightarrow 0P0 \Rightarrow 01P10 \Rightarrow 01010$

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0|1|0P0|1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- $P \Rightarrow 0P0 \Rightarrow 01P10 \Rightarrow 01010$
- Note que podemos obter qualquer palíndromo desta maneira

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0|1|0P0|1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- $P \Rightarrow 0P0 \Rightarrow 01P10 \Rightarrow 01010$
- Note que podemos obter qualquer palíndromo desta maneira
(além disso, apenas palíndromos podem ser obtidos)

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0|1|0P0|1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- $P \Rightarrow 0P0 \Rightarrow 01P10 \Rightarrow 01010$
- Note que podemos obter qualquer palíndromo desta maneira
(além disso, apenas palíndromos podem ser obtidos)
- Esta gramática expressa a linguagem dos palíndromos

Produzindo strings com gramáticas

Relembrando o primeiro exemplo:

$G_{\text{PAL}} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ tal que as regras de A são:

$$P \rightarrow \epsilon | 0|1|0P0|1P1$$

Vamos começar com a variável inicial P e “aplicar” sucessivamente as regras

- $P \Rightarrow 0P0 \Rightarrow 01P10 \Rightarrow 01010$
- Note que podemos obter qualquer palíndromo desta maneira
(além disso, apenas palíndromos podem ser obtidos)
- Esta gramática expressa a linguagem dos palíndromos

Exercício: Apresente uma gramática que expressa a linguagem dos palíndromos pares

Produzindo strings com gramáticas

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

E

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E)$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E)$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E) \Rightarrow a * (I + E)$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E) \Rightarrow a * (I + E) \Rightarrow a * (a + E)$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E) \Rightarrow a * (I + E) \Rightarrow a * (a + E) \Rightarrow a * (a + I)$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E) \Rightarrow a * (I + E) \Rightarrow a * (a + E) \Rightarrow \\ &a * (a + I) \Rightarrow a * (a + I0) \end{aligned}$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E) \Rightarrow a * (I + E) \Rightarrow a * (a + E) \Rightarrow \\ &a * (a + I) \Rightarrow a * (a + I0) \Rightarrow a * (aI00) \end{aligned}$$

Produzindo strings com gramáticas

Gramática para expressões com variáveis

$G_{\text{EX}} = (\{I, E\}, \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}, A_{\text{EX}}, E)$ tal que as regras de A_{EX} são:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Vamos produzir a string $a * (a + b00)$ a partir da variável inicial:

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E) \Rightarrow a * (I + E) \Rightarrow a * (a + E) \Rightarrow \\ &a * (a + I) \Rightarrow a * (a + I0) \Rightarrow a * (aI00) \Rightarrow a * (a + b00) \end{aligned}$$