

Introdução à Teoria da Computação

Complexidade de Kolmogorov

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2025 / 2

Descrevendo uma string

Considere as três strings w_1, w_2 e w_3 abaixo:

$w_1 =$

[illegible]
$$w_3 = 011010000101001101010000010101010010111011101000010100001101110110011011011011101001001001101011010000111010101010011101001011010100011101010101101011111011001110101010111101011110011101110101110100100100110001000110101111101101001011101000101001101010100101010110100010110001001110111110110100111101011100011000101001101010010101010100010100010011101111101101001111010111000111001101001101010010101010100010100010011101111101101001110101111001111001110100011101001101000111101010111101010111010010110100101101000111010$$

- Seu objetivo: anotar em um pedaço de papel uma descrição de cada uma das strings acima. Qual é mais difícil de ser descrita?

Descrevendo uma string

[illegible][illegible][illegible]

- Descrição de w_1 : “480 bits 0”
- Descrição de w_2 : “80 bits 0 e 80 bits 1; repita isso 3 vezes”
- Descrição de w_3 : “a sequência de bits 0110100001010011010100000101010101001011
101110100001010000110111011001101101101111010010010011010110100001110101010100
111010010110101000011101010101101011111011001110101010111101011110011101110111
01001001001100010001101011111011010010111101000101010011101010100101010101010
001011000100111011111010101001111010111001111001110100011101010011010001111
010101011110101010101010011101010101000111010”

A descrição mínima de uma string

Seja x uma string. Vamos definir a descrição de x como

- Uma máquina/mecanismo/processo sistemático que produza a string x
- Ideia inicial: a descrição de x é uma MT M tal que $M(\epsilon) = x$

Uma *descrição* de uma string x é uma string $\sqcup M \sqcup w$, sendo M uma MT e w uma string, tal que $M(w) = x$.

Note: Seja $\mathcal{U}$ uma MT universal. Se y é uma descrição de x , então $\mathcal{U}(y) = x$

A *Descrição Mínima* de uma string x , denotada $d(x)$, é a *menor string* $\sqcup M \sqcup w$ em ordem lexicográfica tal que $\sqcup M \sqcup w$ é uma descrição de w .

A *Complexidade de Komogorov* de uma string x , denotada $K(x)$, é o tamanho da descrição mínima de x , ou seja, $K(x) = |d(x)|$.

A descrição mínima de uma string

A *Complexidade de Komogorov* de uma string x , denotada $K(x)$, é o tamanho da descrição mínima de x , ou seja, $K(x) = |d(x)|$.

Teorema: Existe uma constante c tal que $\forall x \in \Sigma^*, K(x) \leq |x| + c$.

Prova: Considere a MT M tal que $\forall x, M(x) = x$.

- Seja $c = |\llcorner M \lrcorner|$.
- $\llcorner M \lrcorner x$ é uma descrição de x de tamanho $|x| + c$
- Portanto, $K(x) \leq |x| + c$.

Complexidade de Kolmogorov

Uma string x é *c-compressível* se $K(x) \leq |x| - c$. Caso x não seja *c-compressível*, dizemos que x é *c-incompressível*.

Uma string for 1-incompressível é chamada simplesmente de string *incompressível*.

Teorema: Existem strings incompressíveis de todos os tamanhos.

Prova: Seja $n \in \mathbb{N}$. Observe o seguinte:

- Número de strings de tamanho n : 2^n .
- Número de strings menores que n : $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$.
- Como $2^n > 2^n - 1$, então existem mais strings x de tamanho n do que descrições $d(x)$, tal que $|d(x)| < n$.
- Logo, existe pelo menos uma string x de tamanho n que não admite nenhuma descrição menor do que n . Portanto, x é incompressível.

Aleatoridade e incompressibilidade (Seção 8.3 – Opcional)

Uma função computável $P : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ é chamada uma *propriedade de strings*
(obs: estamos restritos a propriedades computáveis)

Uma propriedade P é dita uma *propriedade de strings aleatórias* se

- Dado x , a probabilidade de que $P(x) = 1$ tende a 1 quando $|x| \rightarrow \infty$

Teorema: Para toda propriedade P de strings aleatórias, o seguinte conjunto é finito:

$$I_P = \{x : x \text{ é incompressível e } P(x) = 0\}$$

Consequência do teorema: Dada uma string incompressível x grande o suficiente, temos:

Para qualquer propriedade P de strings aleatórias, x tem garantidamente a propriedade P .

Incomputabilidade da Complexidade de Kolmogorov

Teorema: Seja w uma string. Não existe MT M_K que compute a complexidade de Kolmogorov de w , i.e., tal que $M_K(w) = \ulcorner K(w) \urcorner$.

Prova: Suponha que $\exists$ uma MT M_K que compute a complexidade de Kolmogorov de uma string

- Isto é, $\forall x \in \Sigma^*, M_K(x) = \ulcorner K(x) \urcorner$

Usando M_K podemos construir a uma MT D que, dado um natural n em binário, faz:

- (1) Enumera strings $x \in \{0,1\}^*$ em ordem lexicográfica;
- (2) Para cada string x enumerada, usa M_K para calcular $K(x)$;
- (3) Ao encontrar a primeira string x tal que $K(x) > n$, escreve x na fita e para.

Note: sempre existe x com $K(x) > n$, pois $\exists$ string incompressível de todo tamanho

- Isto é, para toda entrada $\ulcorner n \urcorner$, $D(\ulcorner n \urcorner) = w_n$, para alguma string w_n .
 $\therefore \exists$ string w_n com descrição de tamanho $|D| + |\ulcorner n \urcorner|$
- $|\ulcorner n \urcorner|$ tem no máximo $\log_2 n + 1$ bits $\therefore \exists c > \ulcorner D \urcorner$ tal que $K(w_n) \leq \log_2 n + c$
(a constante c absorve detalhes da codificação e separadores).

Pelo passo (3), temos $K(w_n) > n \therefore n < K(w_n) \leq c + \log_2 n$.

Para n suficientemente grande a desigualdade é impossível: lado esquerdo cresce linearmente
lado direito cresce como $\log n$

Uma contradição, portanto, M_K não existe.