

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 2: Fundamentos

Renato Carmo

André Guedes

Murilo Silva

Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

2026 - Primeiro semestre

Aula de hoje

1 Definição, Terminologia e Notação

2 Isomorfismo

3 Grau

Aula de hoje

1 Definição, Terminologia e Notação

2 Isomorfismo

3 Grau

Notação

C : conjunto

k : inteiro

Notação

C : conjunto

k : inteiro

2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

Notação

C : conjunto

k : inteiro

2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

$$2^C := \{S \mid S \subseteq C\}$$

Notação

C : conjunto

k : inteiro

2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

$$2^C := \{S \mid S \subseteq C\}$$

$\binom{C}{k}$: conjunto dos subconjuntos de C com exatamente k elementos

Notação

C : conjunto

k : inteiro

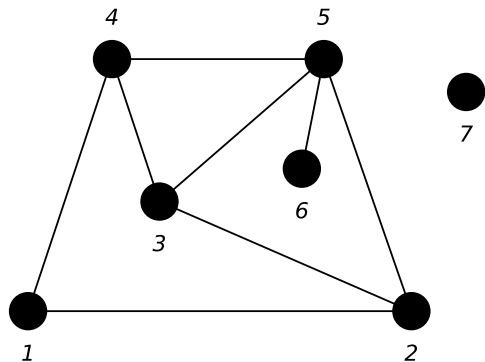
2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

$$2^C := \{S \mid S \subseteq C\}$$

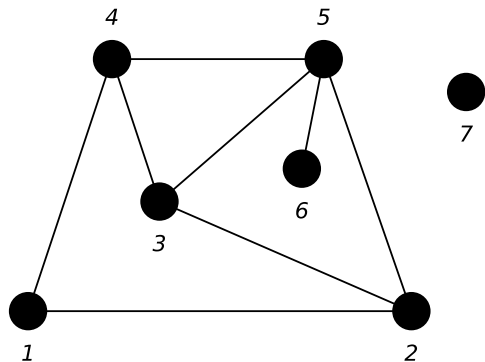
$\binom{C}{k}$: conjunto dos subconjuntos de C com exatamente k elementos

$$\binom{C}{k} := \{S \subseteq C \mid |S| = k\}.$$

Definição de Grafo

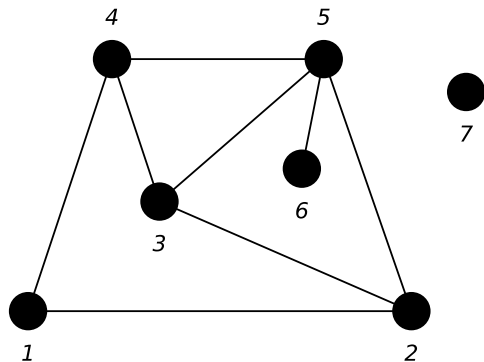


Definição de Grafo



grafo G : par $(V(G), E(G))$

Definição de Grafo

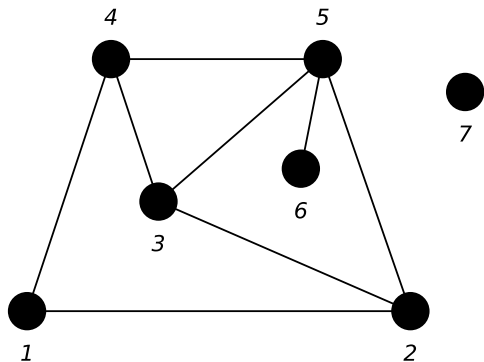


grafo G : par $(V(G), E(G))$

$V(G)$: conjunto finito não vazio

(**vértices**)

Definição de Grafo



grafo G : par $(V(G), E(G))$

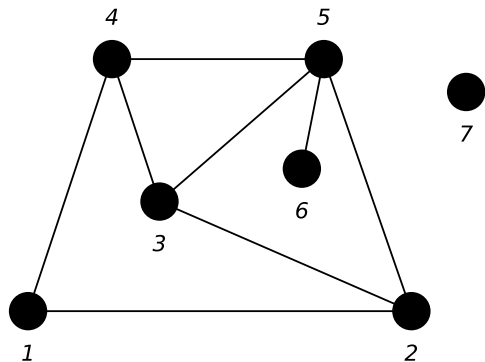
$V(G)$: conjunto finito não vazio

$E(G)$: $\subseteq \binom{V(G)}{2}$

(**vértices**)

(**arestas**)

Definição de Grafo



$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

grafo G : par $(V(G), E(G))$

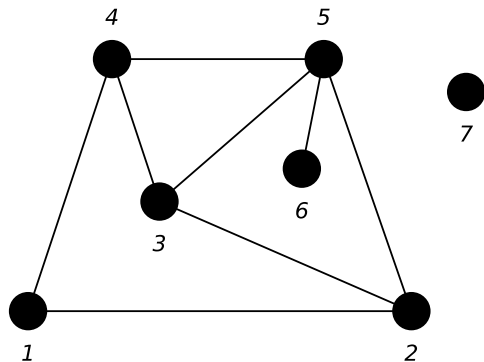
$V(G)$: conjunto finito não vazio

$E(G)$: $\subseteq \binom{V(G)}{2}$

(**vértices**)

(**arestas**)

Definição de Grafo



$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$E(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$$

grafo G : par $(V(G), E(G))$

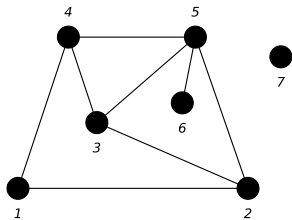
$V(G)$: conjunto finito não vazio

$E(G)$: $\subseteq \binom{V(G)}{2}$

(**vértices**)

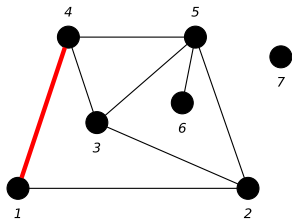
(**arestas**)

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos



G : grafo

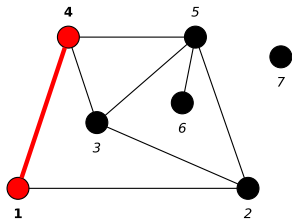
Vértices, arestas, adjacência e vizinhos



G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos

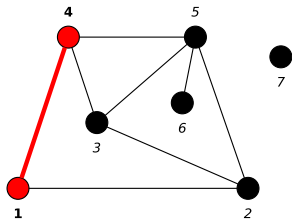


G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

• u e v são as **pontas** da aresta a

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos

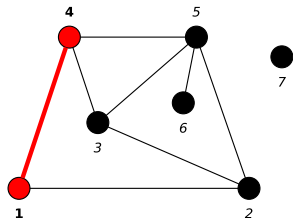


G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

- u e v são as **pontas** da aresta a
- a é **incidente** em u e em v

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos

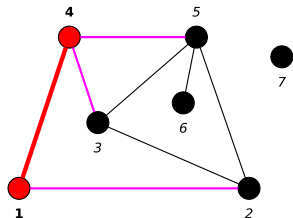


G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

- u e v são as **pontas** da aresta a
- a é **incidente** em u e em v
- os vértices u e v são **vizinhos** (ou **adjacentes**) em G

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos



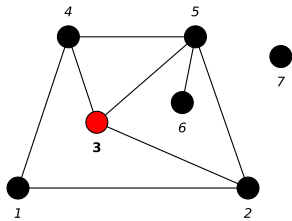
G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

- u e v são as **pontas** da aresta a
- a é **incidente** em u e em v
- os vértices u e v são **vizinhos** (ou **adjacentes**) em G

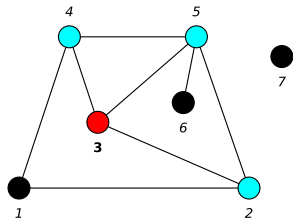
arestas adjacentes: tem ponta em comum

Vizinhança



vizinhança de v em G : conjunto dos vértices que são vizinhos de v em G

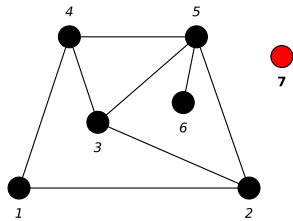
Vizinhança



vizinhança de v em G : conjunto dos vértices que são vizinhos de v em G

$$\Gamma_G(v) := \{u \in V(G) \mid u \text{ é vizinho de } v\}$$

Vizinhança



vizinhança de v em G : conjunto dos vértices que são vizinhos de v em G

$$\Gamma_G(v) := \{u \in V(G) \mid u \text{ é vizinho de } v\}$$

vértice isolado: não tem vizinhos

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



1

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



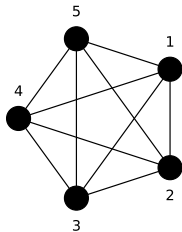
grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.

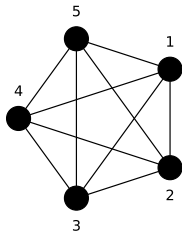


Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.



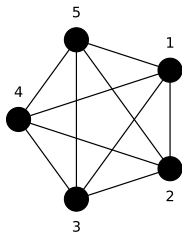
K_n := grafo completo de n vértices

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.



K_n := grafo completo de n vértices

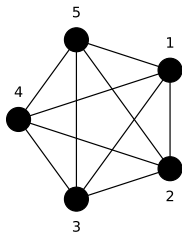
O par $(\emptyset, \emptyset)$ é chamado de *grafo vazio*

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



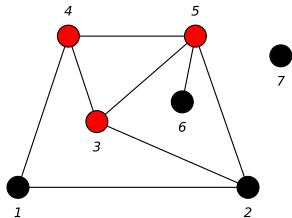
grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.



K_n := grafo completo de n vértices

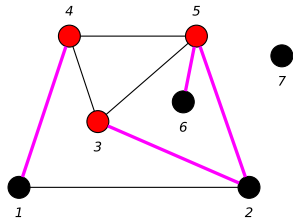
O par $(\emptyset, \emptyset)$ é chamado de *grafo vazio*

Fronteira de um conjunto de vértices



X : conjunto de vértices

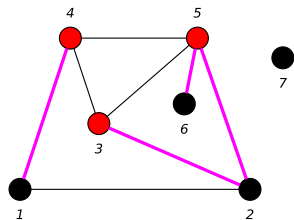
Fronteira de um conjunto de vértices



X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

Fronteira de um conjunto de vértices

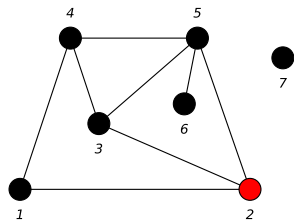


X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

$$\partial_G(X) := \{\{x, y\} \in E(G) \mid x \in X \text{ e } y \notin X\}.$$

Fronteira de um conjunto de vértices



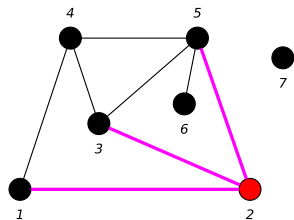
X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

$$\partial_G(X) := \{\{x, y\} \in E(G) \mid x \in X \text{ e } y \notin X\}.$$

$$\partial_G(v) := \partial_G(\{v\}).$$

Fronteira de um conjunto de vértices



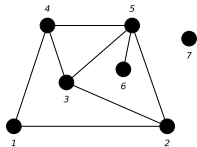
X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

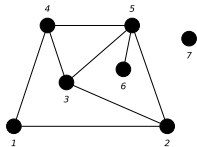
$$\partial_G(X) := \{\{x, y\} \in E(G) \mid x \in X \text{ e } y \notin X\}.$$

$$\partial_G(v) := \partial_G(\{v\}).$$

Complemento de um Grafo

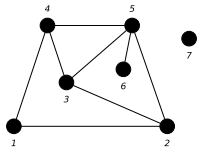


Complemento de um Grafo



O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

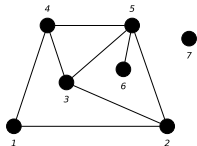
Complemento de um Grafo



O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

$$V(\overline{G}) := V(G)$$

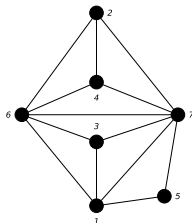
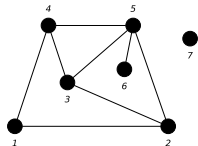
Complemento de um Grafo



O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

$$\begin{aligned} V(\overline{G}) &:= V(G), \\ E(\overline{G}) &:= \binom{V(G)}{2} - E(G) \end{aligned}$$

Complemento de um Grafo

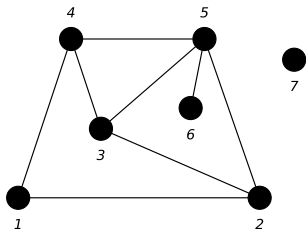


O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

$$\begin{aligned} V(\overline{G}) &:= V(G), \\ E(\overline{G}) &:= \binom{V(G)}{2} - E(G) \end{aligned}$$

O grafo $\overline{G}$ também é chamado de **grafo complementar** de G

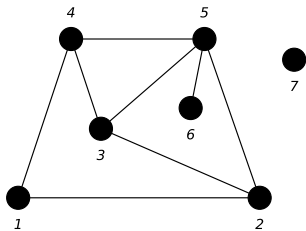
Matriz de Adjacência de um Grafo



$M_G =$



Matriz de Adjacência de um Grafo

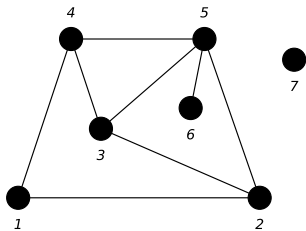


uma linha para cada vértice

$M_G =$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Matriz de Adjacência de um Grafo

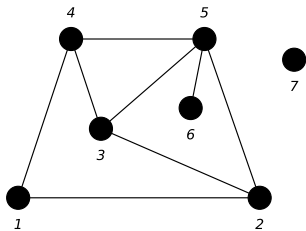


uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice

$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Matriz de Adjacência de um Grafo

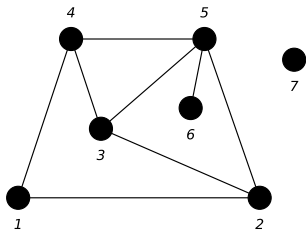


$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice
na linha u , coluna v tem

Matriz de Adjacência de um Grafo

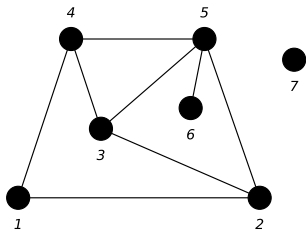


$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice
na linha u , coluna v tem
1, se u e v são vizinhos

Matriz de Adjacência de um Grafo



$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice

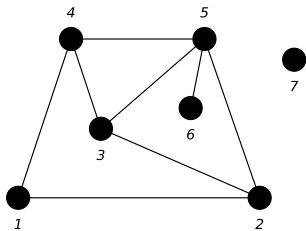
uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

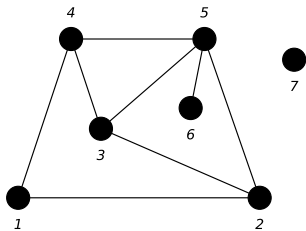
uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

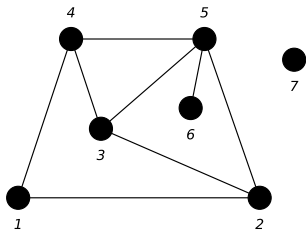
na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

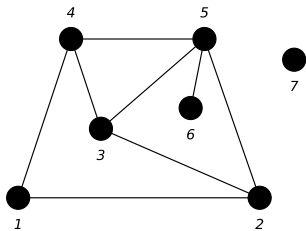
1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

tratada como matriz booleana ou inteira

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

tratada como matriz booleana ou inteira
(depende do contexto)

União de Grafos

União de Grafos

G, H : grafos

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de G e H**

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de G e H** é o grafo $G \cup H$ definido por:

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de** G e H é o grafo $G \cup H$ definido por:

$$V(G \cup H) := V(G) \cup V(H),$$

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de** G e H é o grafo $G \cup H$ definido por:

$$\begin{aligned} V(G \cup H) &:= V(G) \cup V(H), \\ E(G \cup H) &:= E(G) \cup E(H). \end{aligned}$$

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

$G + \{u, v\}$:

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

$G + \{u, v\}$: grafo obtido ao acrescentar a aresta $\{u, v\}$ a G

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

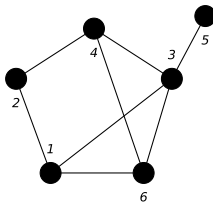
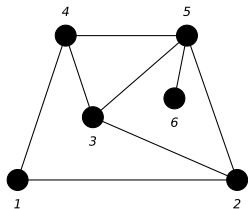
$G + \{u, v\}$: grafo obtido ao acrescentar a aresta $\{u, v\}$ a G

$$\begin{aligned} V(G + \{u, v\}) &:= V(G), \\ E(G + \{u, v\}) &:= E(G) \cup \{u, v\}. \end{aligned}$$

Aula de hoje

- 1 Definição, Terminologia e Notação
- 2 Isomorfismo
- 3 Grau

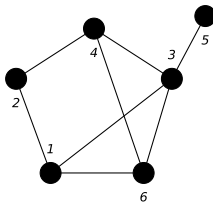
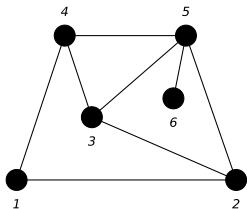
Definição



$V(G)$	$V(H)$
1	2
2	1
3	6
4	4
5	3
6	5

isomorfismo entre G e H : bijeção $f: V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva vizinhanças

Definição

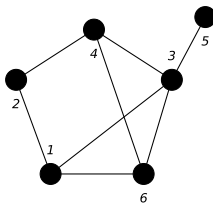
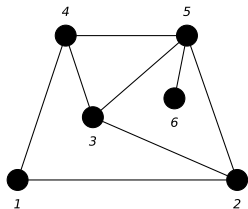


$V(G)$	$V(H)$
1	2
2	1
3	6
4	4
5	3
6	5

isomorfismo entre G e H : bijeção $f: V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva vizinhanças

$$\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

Definição



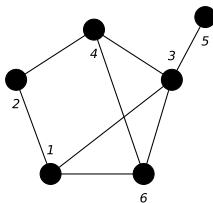
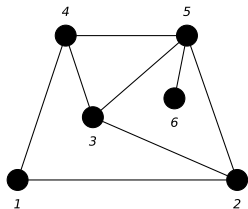
$V(G)$	$V(H)$
1	2
2	1
3	6
4	4
5	3
6	5

isomorfismo entre G e H : bijeção $f: V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva vizinhanças

$$\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

$f: V(G) \rightarrow V(H)$ é isomorfismo $\iff f^{-1}: V(H) \rightarrow V(G)$ também é

Definição



$V(G)$	$V(H)$
1	2
2	1
3	6
4	4
5	3
6	5

isomorfismo entre G e H : bijeção $f: V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva vizinhanças

$$\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

$f: V(G) \rightarrow V(H)$ é isomorfismo $\iff f^{-1}: V(H) \rightarrow V(G)$ também é

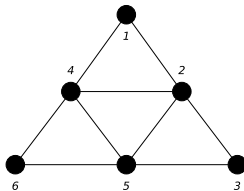
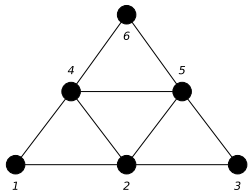
G e H são **isomorfos**: existe isomorfismo entre G e H

Automorfismos

automorfismo sobre G : isomorfismo entre G e G

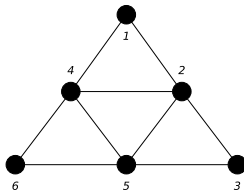
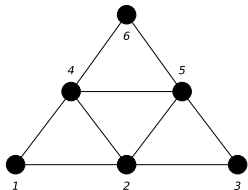
Automorfismos

automorfismo sobre G : isomorfismo entre G e G



Automorfismos

automorfismo sobre G : isomorfismo entre G e G



$V(G)$	$V(G)$
1	6
2	5
3	3
4	4
5	2
6	1

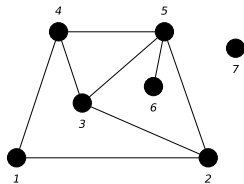
Teorema 1 [Babai, 2019]

É possível decidir se dois grafos de n vértices são isomorfos em tempo $2^{O((\log n)^c)}$ para alguma constante $c \in \mathcal{R}$.

Aula de hoje

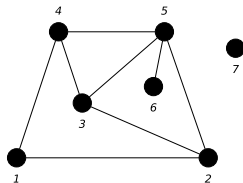
- 1 Definição, Terminologia e Notação
- 2 Isomorfismo
- 3 Grau

Grau



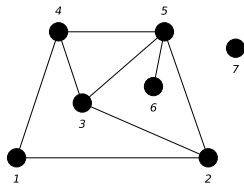
grau de v :

Grau



grau de v : número de arestas de G incidentes em v

Grau

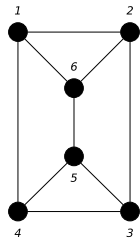


v	$\delta_G(v)$
1	2
2	3
3	3
4	3
5	4
6	1
7	0

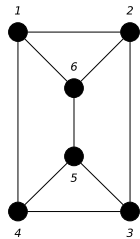
grau de v : número de arestas de G incidentes em v

$$\delta_G(v) := |\partial_G(v)|$$

Grafo Regular

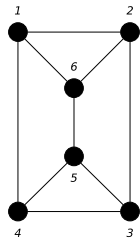


Grafo Regular



todos os vértices tem o mesmo grau

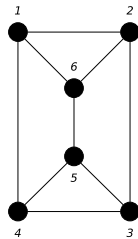
Grafo Regular



todos os vértices tem o mesmo grau

grafo k -regular :

Grafo Regular



todos os vértices tem o mesmo grau

grafo k -regular : todos os vértices tem grau k

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

Demonstração.

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

Demonstração.

Seja G um grafo de n vértices.

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

Demonstração.

Seja G um grafo de n vértices.

(1) Se G tem vértice de grau 0, não pode ter vértice de grau $n - 1$.

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

Demonstração.

Seja G um grafo de n vértices.

- (1) Se G tem vértice de grau 0, não pode ter vértice de grau $n - 1$.
- (2) Se G tem vértice de grau $n - 1$, não pode ter vértice de grau 0.

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

Demonstração.

Seja G um grafo de n vértices.

- (1) Se G tem vértice de grau 0, não pode ter vértice de grau $n - 1$.
- (2) Se G tem vértice de grau $n - 1$, não pode ter vértice de grau 0.
- Portanto não pode ocorrer (1) e (2) ao mesmo tempo em G .

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

Demonstração.

Seja G um grafo de n vértices.

- (1) Se G tem vértice de grau 0, não pode ter vértice de grau $n - 1$.
- (2) Se G tem vértice de grau $n - 1$, não pode ter vértice de grau 0.

- Portanto não pode ocorrer (1) e (2) ao mesmo tempo em G .

Em ambos os casos: no máximo $n - 1$ possíveis valores para os graus de n vértices.

Teorema 2

Todo grafo não trivial tem dois vértices com mesmo grau.

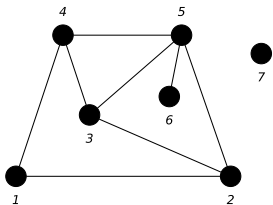
Demonstração.

Seja G um grafo de n vértices.

- (1) Se G tem vértice de grau 0, não pode ter vértice de grau $n - 1$.
- (2) Se G tem vértice de grau $n - 1$, não pode ter vértice de grau 0.
 - Portanto não pode ocorrer (1) e (2) ao mesmo tempo em G .
Em ambos os casos: no máximo $n - 1$ possíveis valores para os graus de n vértices.
 - Pelo Princípio da Casa dos Pombos, dois vértices tem o mesmo grau.



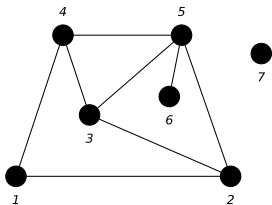
Matriz de Incidência



$$\overline{M}_G =$$



Matriz de Incidência

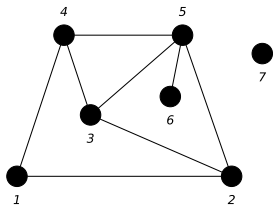


$$\overline{M}_G =$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

uma linha para cada vértice

Matriz de Incidência



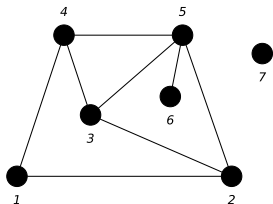
$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	4,5	5,6
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada aresta

Matriz de Incidência

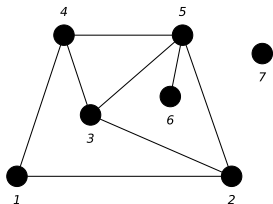


$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	4,5	5,6
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

uma linha para cada vértice
uma coluna para cada aresta
na linha v , coluna a tem
 1 se $v \in a$

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	4,5	5,6
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

uma linha para cada vértice

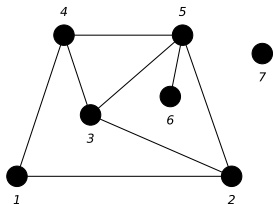
uma coluna para cada aresta

na linha v , coluna a tem

1 se $v \in a$

0 se $v \notin a$

Matriz de Incidência


$$\overline{M}_G =$$

	1,2	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	4,5	5,6
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice
uma coluna para cada aresta
na linha v , coluna a tem

1 se $v \in a$

0 se $v \notin a$

$$\overline{M}_G[v, a] = \begin{cases} 0, & \text{se } v \notin a, \\ 1, & \text{se } v \in a. \end{cases}$$

Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G

Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna					



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2				



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2	2			



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2	2	$\dots$	2	



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2	2	$\dots$	2	$2 E(G) $



Teorema 3

A soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração.

Matriz de incidência de G :

	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\sum$ linha
v_1	$M[v_1, a_1]$	$M[v_1, a_2]$	$\dots$	$M[v_1, a_m]$	$\delta(v_1)$
v_2	$M[v_2, a_1]$	$M[v_2, a_2]$	$\dots$	$M[v_2, a_m]$	$\delta(v_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$M[v_n, a_1]$	$M[v_n, a_2]$	$\dots$	$M[v_n, a_m]$	$\delta(v_n)$
$\sum$ coluna	2	2	$\dots$	2	$2 E(G) = \sum_v \delta(v)$



Corolário 4

Corolário 4

O número de vértices de grau ímpar é par

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\sum_v \delta(v)$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\sum_v \delta(v) = \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v)$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\sum_v \delta(v) = \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v)$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned}\sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v)\end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned}\sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. 3})\end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. 3}) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) & \end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned}\sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. 3}) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \text{par}\end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned}\sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. 3}) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \text{par} - \text{par}\end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. 3}) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \text{par} - \text{par} \end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned}\sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. 3}) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \text{par} - \text{par} \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \text{par}\end{aligned}$$

Corolário 4 (“handshaking lemma”)

O número de vértices de grau ímpar é par

Demonstração.

$$\begin{aligned}\sum_v \delta(v) &= \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) + \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \sum_v \delta(v) - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= 2|E(G)| - \sum_{v \text{ de grau par}} \delta(v) \quad (\text{T. 3}) \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \text{par} - \text{par} \\ \sum_{v \text{ de grau ímpar}} \delta(v) &= \text{par}\end{aligned}$$

Portanto $|\{v \text{ de grau ímpar}\}|$ deve ser par

