

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 5: Recapitulando Complexidade Computacional; Cliques e Conjuntos Independentes

Renato Carmo

André Guedes

Murilo Silva

Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

2026 - Primeiro semestre

Aula de hoje

- 1 Reduções
- 2 $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e amigos
- 3 Conjuntos independentes e cliques

Aula de hoje

- 1 Reduções
- 2 $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e amigos
- 3 Conjuntos independentes e cliques

Dois problemas

Conjunto Independente (CI)

Instância: Um grafo G e um inteiro k .

Resposta: sim, se G tem conjunto independente de tamanho k ou não, caso contrário.

Dois problemas

Conjunto Independente (CI)

Instância: Um grafo G e um inteiro k .

Resposta: sim, se G tem conjunto independente de tamanho k ou não, caso contrário.

Número de Independência (NI)

Instância: Um grafo G .

Resposta: $\alpha(G)$.

Um algoritmo para número de Independência

- Imagine que temos um algoritmo $\text{ConjuntoIndependente}(G, k)$ para o problema do Conjunto Independente, ou seja:

Um algoritmo para número de Independência

- Imagine que temos um algoritmo $\text{ConjuntoIndependente}(G, k)$ para o problema do Conjunto Independente, ou seja:
- $\text{ConjuntoIndependente}(G, k) = \text{sim}$
se e somente se G tem conjunto independente de tamanho k

$\text{NumeroIndependencia}(G)$

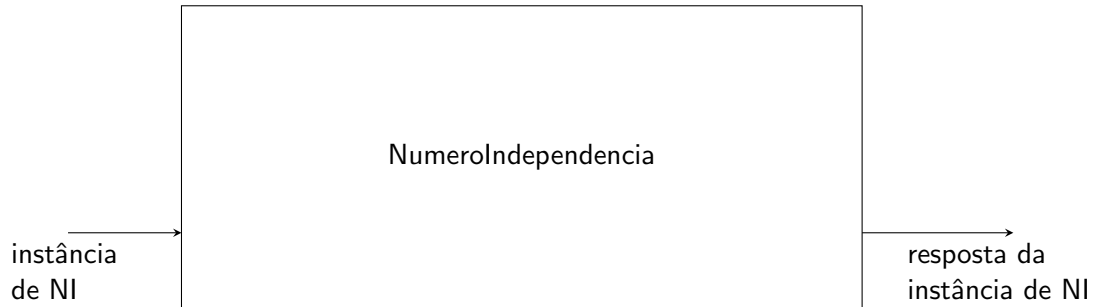
$k \leftarrow 1$

Enquanto **$\text{ConjuntoIndependente}(G, k)$**

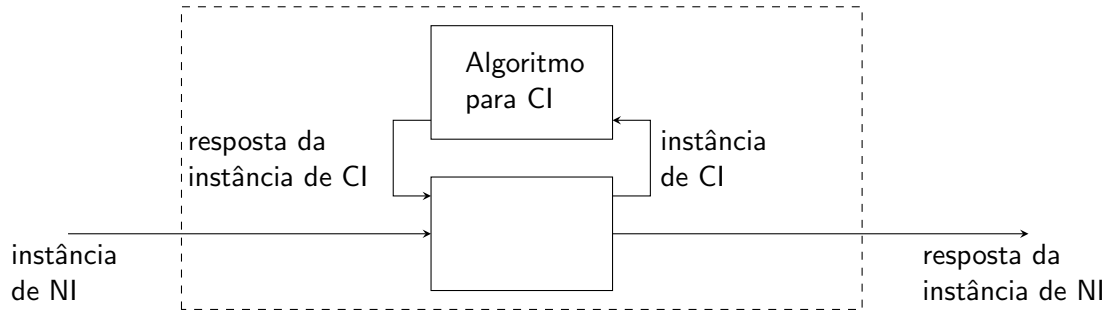
$++k$

Devolva $k - 1$

Estrutura do algoritmo



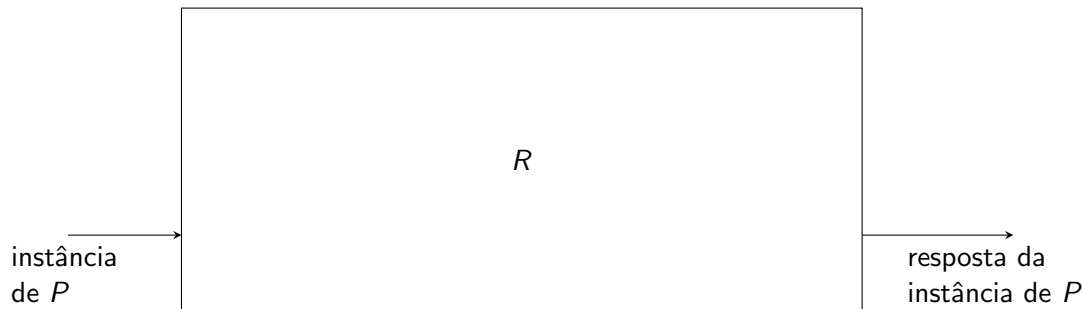
Estrutura do algoritmo



- Uma **redução** do problema computacional P ao problema computacional Q é um algoritmo R para P que “usa um algoritmo para Q como subrotina”.

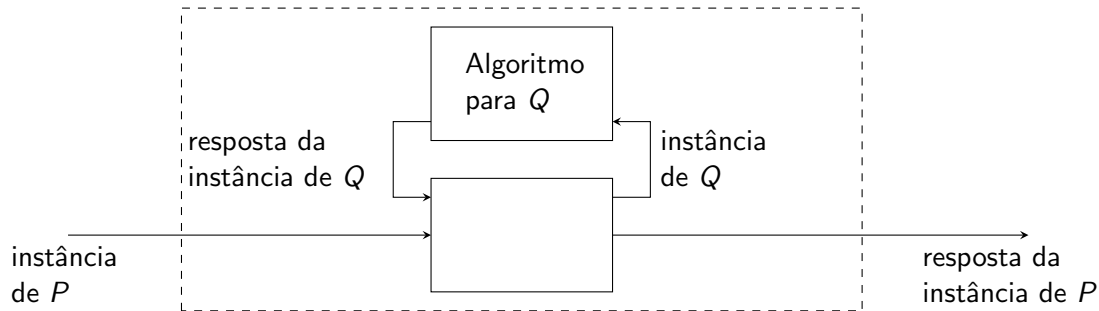
Reduções

- Uma **redução** do problema computacional P ao problema computacional Q é um algoritmo R para P que “usa um algoritmo para Q como subrotina”.



Reduções

- Uma **redução** do problema computacional P ao problema computacional Q é um algoritmo R para P que “usa um algoritmo para Q como subrotina”.



Redução polinomial

- Uma **redução** do problema computacional P ao problema computacional Q é um algoritmo R para P que “usa um algoritmo para Q como subrotina”.

Redução polinomial

- Uma **redução** do problema computacional P ao problema computacional Q é um algoritmo R para P que “usa um algoritmo para Q como subrotina”.
- Um algoritmo A é **polinomial** se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que a execução de A com uma entrada de tamanho n leva tempo $O(n^k)$.

Redução polinomial

- Uma **redução** do problema computacional P ao problema computacional Q é um algoritmo R para P que “usa um algoritmo para Q como subrotina”.
- Um algoritmo A é **polinomial** se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que a execução de A com uma entrada de tamanho n leva tempo $O(n^k)$.
- Dizemos que R é uma **redução polinomial** de P para Q quando o fato de o algoritmo para Q ser polinomial implica que R também é um algoritmo polinomial.

Redução polinomial de NI para CI

- Dizemos que R é uma **redução polinomial** de P para Q quando o fato de o algoritmo para Q ser polinomial implica que R também é um algoritmo polinomial.

Redução polinomial de NI para CI

- Dizemos que R é uma **redução polinomial** de P para Q quando o fato de o algoritmo para Q ser polinomial implica que R também é um algoritmo polinomial.

NumeroIndependencia(G)

$k \leftarrow 1$

Enquanto **ConjuntoIndependente**(G, k)

$++k$

Devolva $k - 1$

Redução polinomial de NI para CI

- Dizemos que R é uma **redução polinomial** de P para Q quando o fato de o algoritmo para Q ser polinomial implica que R também é um algoritmo polinomial.

NumeroIndependencia(G)

$k \leftarrow 1$

Enquanto **ConjuntoIndependente**(G, k)

$++k$

Devolva $k - 1$

- Redução polinomial?

Redução polinomial de NI para CI

- Dizemos que R é uma **redução polinomial** de P para Q quando o fato de o algoritmo para Q ser polinomial implica que R também é um algoritmo polinomial.

NumeroIndependencia(G)

$k \leftarrow 1$

Enquanto **ConjuntoIndependente**(G, k)

++ k

Devolva $k - 1$

- Redução polinomial? Sim, pois se **ConjuntoIndependente** for polinomial, então **NumeroIndependencia** também é!
- Não importa a “verdadeira” complexidade de **ConjuntoIndependente**

Aula de hoje

- 1 Reduções
- 2 $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e amigos
- 3 Conjuntos independentes e cliques

$\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e amigos

- $\mathcal{P}$ é a classe dos problemas de decisão para os quais existe algoritmo polinomial

$\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e amigos

- $\mathcal{P}$ é a classe dos problemas de decisão para os quais existe algoritmo polinomial
- $\mathcal{NP}$ é a classe dos problemas de decisão para os quais existe algoritmo verificador polinomial

$\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e amigos

- $\mathcal{P}$ é a classe dos problemas de decisão para os quais existe algoritmo polinomial
- $\mathcal{NP}$ é a classe dos problemas de decisão para os quais existe algoritmo verificador polinomial
- Um problema computacional $\mathcal{NP}$ -difícil é um problema computacional ao qual todo problema da classe $\mathcal{NP}$ é redutível

Formalmente, um problema Q é $\mathcal{NP}$ -difícil se para qualquer problema $P \in \mathcal{NP}$, vale que $P \preceq Q$

Teoremas sobre reduções

Teorema 6

Se existe algoritmo polinomial para algum problema $\mathcal{NP}$ -difícil, então $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Teoremas sobre reduções

Teorema 6

Se existe algoritmo polinomial para algum problema $\mathcal{NP}$ -difícil, então $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Teorema 7

Se P e Q são problemas computacionais tais que $P \preceq Q$. Então

1. se Q é polinomial, então P é polinomial, e
2. se P é $\mathcal{NP}$ -difícil, então Q é $\mathcal{NP}$ -difícil

Aula de hoje

- 1 Reduções
- 2 $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e amigos
- 3 Conjuntos independentes e cliques

Conjuntos Independientes

Conjuntos Independentes

conjunto independente

Conjuntos Independentes

conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

Conjuntos Independentes

conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G

Conjuntos Independentes

conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G : $E(G[X]) = \emptyset$

Conjuntos Independentes

conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G : $E(G[X]) = \emptyset$

$\alpha(G)$

Conjuntos Independentes

conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G : $E(G[X]) = \emptyset$

$\alpha(G) :=$ tamanho máximo de um conjunto independente em G

Problema do Conjunto Independente (CI)

Teorema 8 (Karp (1972))

O Problema do Conjunto Independente (CI) é $\mathcal{NP}$ -Difícil

Problema do Conjunto Independente (CI)

Teorema 8 (Karp (1972))

O Problema do Conjunto Independente (CI) é $\mathcal{NP}$ -Difícil

Corolário 9

O problema NI, de determinar $\alpha(G)$ para um grafo G é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Problema do Conjunto Independente (CI)

Teorema 8 (Karp (1972))

O Problema do Conjunto Independente (CI) é $\mathcal{NP}$ -Difícil

Corolário 9

O problema NI, de determinar $\alpha(G)$ para um grafo G é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Corolário 10

O problema de encontrar um conjunto independente de tamanho máximo em um grafo G é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Problema do Conjunto Independente (CI)

Teorema 8 (Karp (1972))

O Problema do Conjunto Independente (CI) é $\mathcal{NP}$ -Difícil

Corolário 9

O problema NI, de determinar $\alpha(G)$ para um grafo G é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Corolário 10

O problema de encontrar um conjunto independente de tamanho máximo em um grafo G é $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 21



Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Resposta: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G ?

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Responda: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G ?

Corolário 11: O Problema do Subgrafo Induzido é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Resposta: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G ?

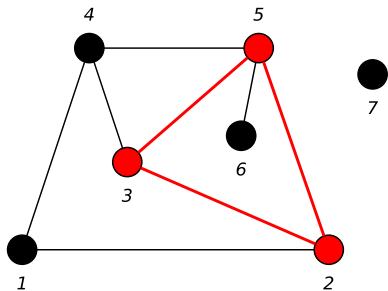
Corolário 11: O Problema do Subgrafo Induzido é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Demonstração.

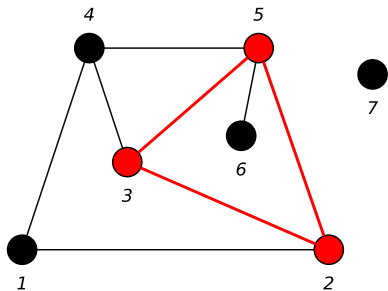
Exercício 22



Cliques

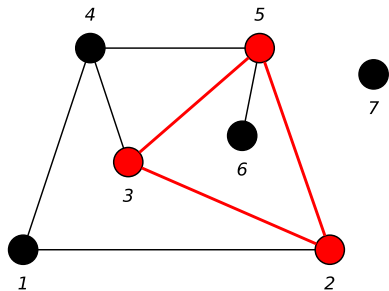


Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

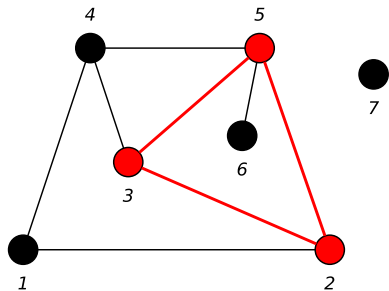
Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G

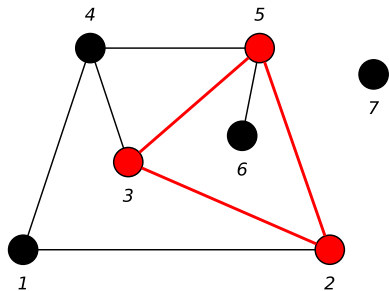
Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G : $G[X]$ é completo

Cliques

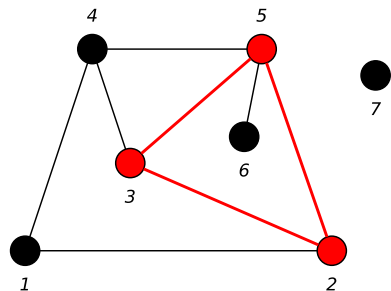


conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G : $G[X]$ é completo

$\omega(G)$

Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G : $G[X]$ é completo

$\omega(G) :=$ tamanho máximo de uma clique em G

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Resposta: G tem clique de tamanho k ?

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Resposta: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $S \subseteq V(G) \mid |S| = \omega(G)$

Teorema 12

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $S \subseteq V(G) \mid |S| = \omega(G)$

Demonstração.

Exercício 23

