

# Algoritmos e Teoria dos Grafos

## Tópico 6: Grafos Bipartidos e Multipartidos; Coloração

Renato Carmo  
André Guedes  
Murilo Silva  
Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

2026 - Primeiro semestre

# Aula de hoje

- 1 Grafos Bipartidos
- 2 Grafos Multipartidos e Coloração
- 3 Grafos Perfeitos

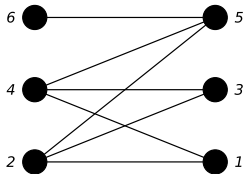
# Aula de hoje

1 Grafos Bipartidos

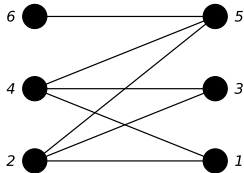
2 Grafos Multipartidos e Coloração

3 Grafos Perfeitos

# Grafos Bipartidos

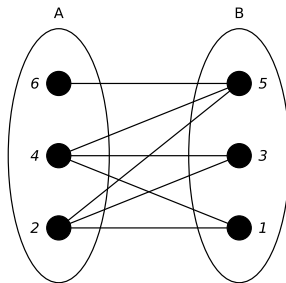


# Grafos Bipartidos



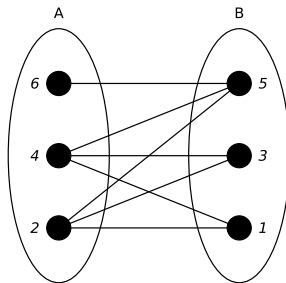
**bipartição** de  $G$

# Grafos Bipartidos



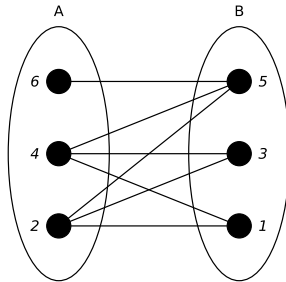
**bipartição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até dois conjuntos independentes

# Grafos Bipartidos



**bipartição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até dois conjuntos independentes (**partes**)

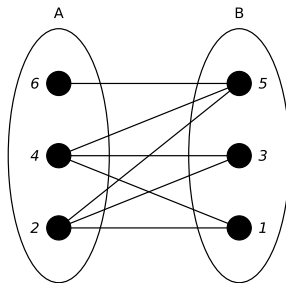
# Grafos Bipartidos



**bipartição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até dois conjuntos independentes (**partes**)

**grafo bipartido**

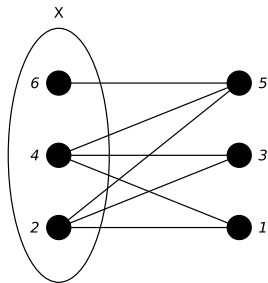
# Grafos Bipartidos



**bipartição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até dois conjuntos independentes (**partes**)

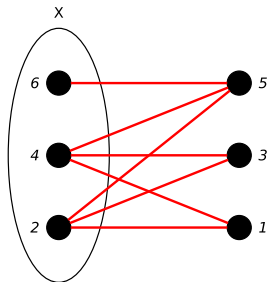
**grafo bipartido**: grafo que admite bipartição

## Lema 17



$G$  é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas

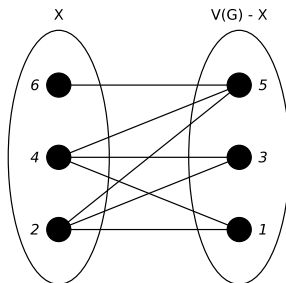
## Lema 17



$G$  é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas, isto é,

$E(G) = \partial_G(X)$ , para algum  $X \subseteq V(G)$ .

## Lema 17



$G$  é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas, isto é,

$E(G) = \partial_G(X)$ , para algum  $X \subseteq V(G)$ .

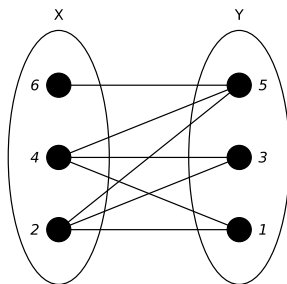
Neste caso,  $\{X, V(G) - X\}$  é uma bipartição de  $G$

Demonstração.

Exercício 30

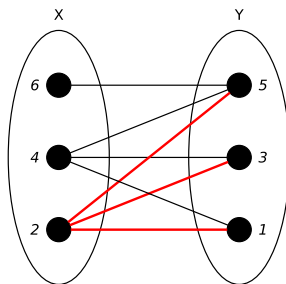


## Corolário 18



$X, Y$ : bipartição de  $G$

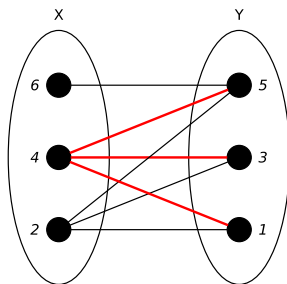
## Corolário 18



$X, Y$ : bipartição de  $G$

$G$  tem no máximo  $|X||Y|$  arestas

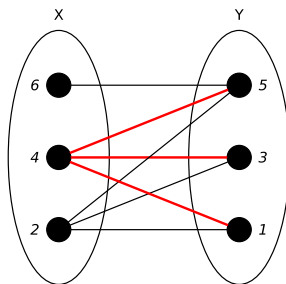
## Corolário 18



$X, Y$ : bipartição de  $G$

$G$  tem no máximo  $|X||Y|$  arestas

## Corolário 18



$X, Y$ : bipartição de  $G$

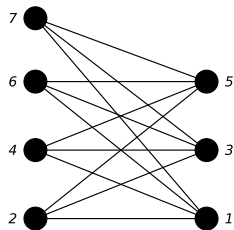
$G$  tem no máximo  $|X||Y|$  arestas

Demonstração.

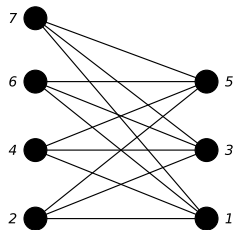
Exercício 31



# Grafo Bipartido Completo

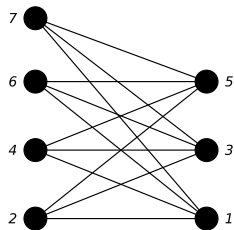


# Grafo Bipartido Completo



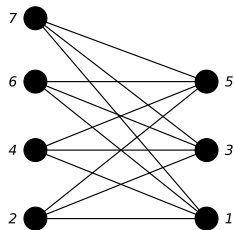
**grafo bipartido completo**

# Grafo Bipartido Completo



**grafo bipartido completo:** cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

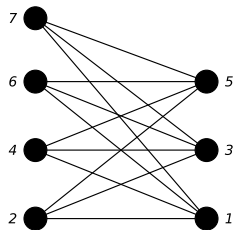
# Grafo Bipartido Completo



**grafo bipartido completo:** cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

$$K_{p,q}$$

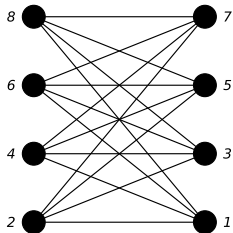
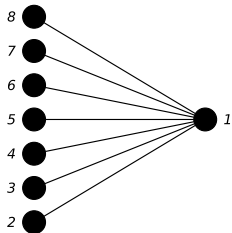
# Grafo Bipartido Completo



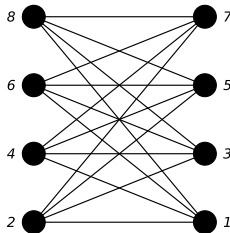
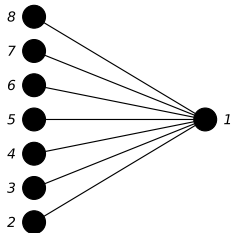
**grafo bipartido completo:** cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

$K_{p,q} :=$  grafo bipartido completo cujas partes tem  $p$  e  $q$  vértices

## Corolario 19

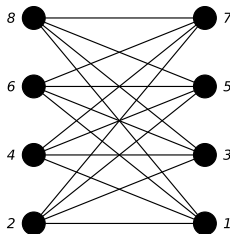
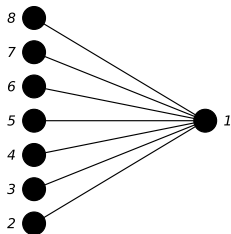


## Corolário 19



Um grafo bipartido de  $n$  vértices tem no máximo ??? arestas

## Corolário 19



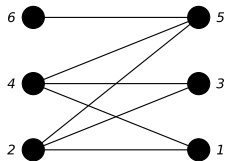
Um grafo bipartido de  $n$  vértices tem no máximo  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  arestas

Demonstração.

Exercício 32



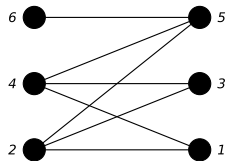
# Matriz de bi-adjacência



$M =$



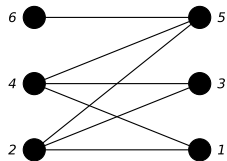
# Matriz de bi-adjacência



$$M = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & \\ 3 & \\ 5 & \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

# Matriz de bi-adjacência

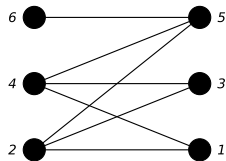

$$M =$$

|   | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |
| 3 |   |   |   |
| 5 |   |   |   |

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

# Matriz de bi-adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & & & \\ 3 & & & \\ 5 & & & \end{array}$$

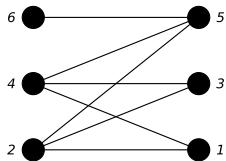
uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha  $u$ , coluna  $v$  tem

1

# Matriz de bi-adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & & & \\ 3 & & & \\ 5 & & & \end{array}$$

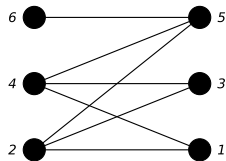
uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha  $u$ , coluna  $v$  tem

1, se  $u$  e  $v$  são vizinhos

# Matriz de bi-adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & & & \\ 3 & & & \\ 5 & & & \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

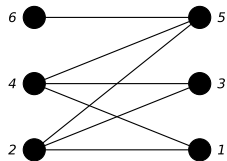
uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha  $u$ , coluna  $v$  tem

1, se  $u$  e  $v$  são vizinhos

0

# Matriz de bi-adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

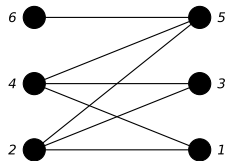
uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha  $u$ , coluna  $v$  tem

1, se  $u$  e  $v$  são vizinhos

0, se  $u$  e  $v$  não são vizinhos

# Matriz de bi-adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

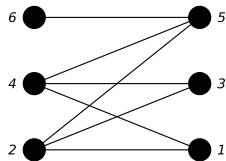
na linha  $u$ , coluna  $v$  tem

1, se  $u$  e  $v$  são vizinhos

0, se  $u$  e  $v$  não são vizinhos

$$M[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

# Matriz de bi-adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha  $u$ , coluna  $v$  tem

1, se  $u$  e  $v$  são vizinhos

0, se  $u$  e  $v$  não são vizinhos

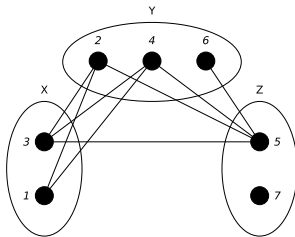
$$M[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

- qualquer matriz binária é matriz de bi-adjacência de um grafo bipartido

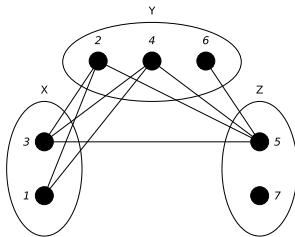
# Aula de hoje

- 1 Grafos Bipartidos
- 2 Grafos Multipartidos e Coloração
- 3 Grafos Perfeitos

# Grafos Multipartidos

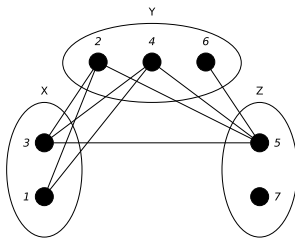


# Grafos Multipartidos



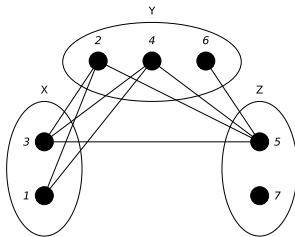
$k$ -partição de  $G$

# Grafos Multipartidos



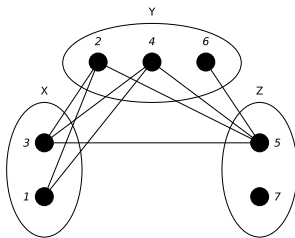
**$k$ -partição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até  $k$  conjuntos independentes

# Grafos Multipartidos



$k$ -**partição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até  $k$  conjuntos independentes (**partes**)

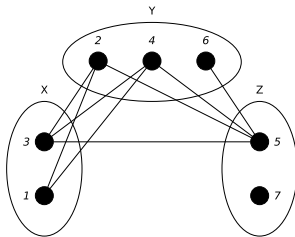
# Grafos Multipartidos



$k$ -**partição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até  $k$  conjuntos independentes (**partes**)

**grafo  $k$ -bipartido**

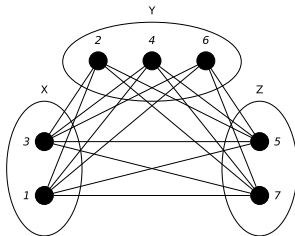
# Grafos Multipartidos



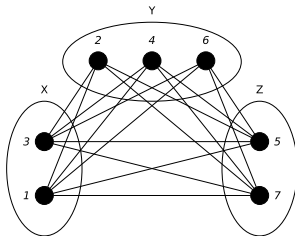
**$k$ -partição** de  $G$ : partição de  $V(G)$  em até  $k$  conjuntos independentes (**partes**)

**grafo  $k$ -bipartido**: grafo que admite  $k$ -partição

# Grafo $k$ -partido Completo

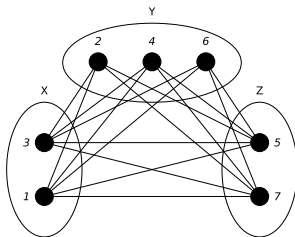


# Grafo $k$ -partido Completo



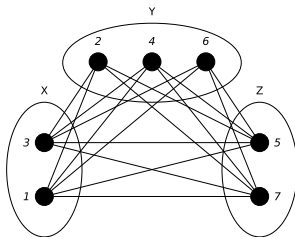
**grafo  $k$ -partido completo**

# Grafo $k$ -partido Completo



**grafo  $k$ -partido completo:** cada vértice é vizinho de todos os vértices de todas as outras partes

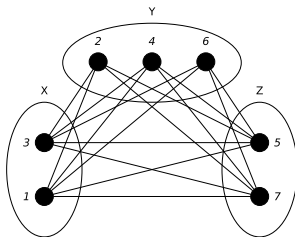
# Grafo $k$ -partido Completo



**grafo  $k$ -partido completo:** cada vértice é vizinho de todos os vértices de todas as outras partes

$$K_{n_1, \dots, n_k}$$

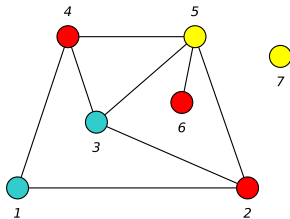
# Grafo $k$ -partido Completo



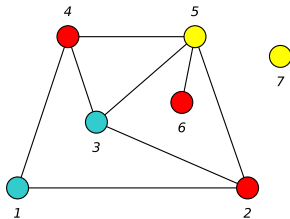
**grafo  $k$ -partido completo:** cada vértice é vizinho de todos os vértices de todas as outras partes

$K_{n_1, \dots, n_k} :=$  grafo  $k$ -partido completo cujas partes tem  $n_1, \dots, n_k$  vértices

# Coloração de Vértices

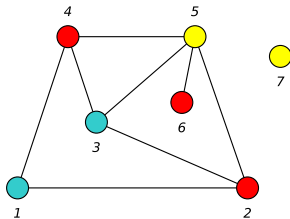


# Coloração de Vértices



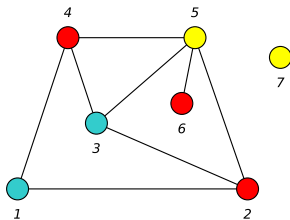
$k$ -coloração de  $G$

# Coloração de Vértices



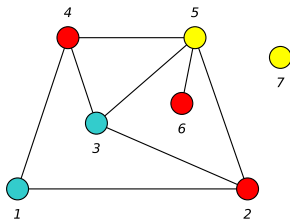
$k$ -**coloração de**  $G$ : atribuição de  $k$  cores aos vértices

# Coloração de Vértices



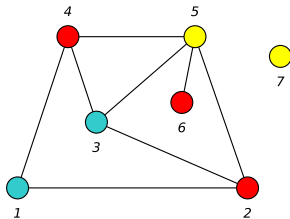
$k$ -**coloração de**  $G$ : atribuição de  $k$  cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

# Coloração de Vértices



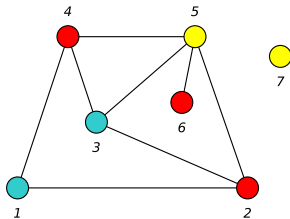
$k$ -**coloração de**  $G$ : atribuição de  $k$  cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes  
 $\equiv k$ -partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes

# Coloração de Vértices



$k$ -**coloração de**  $G$ : atribuição de  $k$  cores aos vértices  
de forma que vizinhos tenham cores diferentes  
 $\equiv k$ -partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes  
 $\equiv k$ -partição de  $G$

# Coloração de Vértices



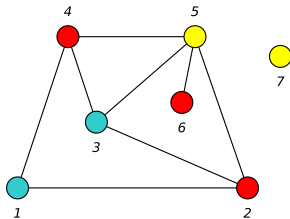
**$k$ -coloração de  $G$ :** atribuição de  $k$  cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

$\equiv k$ -partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de  $G$

parte  $\equiv$  cor

# Coloração de Vértices



**$k$ -coloração de  $G$ :** atribuição de  $k$  cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

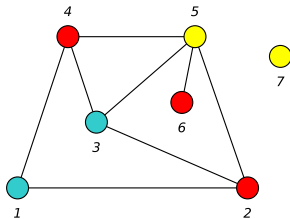
$\equiv k$ -partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de  $G$

parte  $\equiv$  cor

$\chi(G)$

# Coloração de Vértices



**$k$ -coloração de  $G$ :** atribuição de  $k$  cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

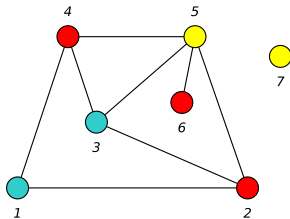
$\equiv k$ -partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de  $G$

parte  $\equiv$  cor

$\chi(G) :=$  menor número de cores com que é possível colorir  $G$

# Coloração de Vértices



**$k$ -coloração de  $G$ :** atribuição de  $k$  cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

$\equiv k$ -partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de  $G$

parte  $\equiv$  cor

$\chi(G) :=$  menor número de cores com que é possível colorir  $G$

$\equiv$  **número cromático** de  $G$

**Teorema 20:** É possível decidir se um grafo dado é 2-colorível em tempo linear.

**Teorema 20:** É possível decidir se um grafo dado é 2-colorível em tempo linear.

Demonstração.

Prova: Na parte dois da disciplina.

# Problemas de Coloração

**Teorema 20:** É possível decidir se um grafo dado é 2-colorível em tempo linear.

Demonstração.

Prova: Na parte dois da disciplina.



**Teorema 18:** (Karp (1972)) O problema de decidir se um grafo pode ser 3-colorido é  $\mathcal{NP}$ -difícil

# Problema da Coloração

# Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

# Problema da Coloração

## Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

Saída: sim ou não conforme  $G$  admita ou não uma  $k$ -coloração.

# Problema da Coloração

## Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

Saída: sim ou não conforme  $G$  admita ou não uma  $k$ -coloração.

**Teorema 22:** O problema de, dados um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , se  $G$  admite uma  $k$ -coloração  $\mathcal{NP}$ -difícil.

# Problema da Coloração

## Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

Saída: sim ou não conforme  $G$  admita ou não uma  $k$ -coloração.

**Teorema 22:** O problema de, dados um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , se  $G$  admite uma  $k$ -coloração  $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34.



# Problema da Coloração

## Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

Saída: sim ou não conforme  $G$  admita ou não uma  $k$ -coloração.

**Teorema 22:** O problema de, dados um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , se  $G$  admite uma  $k$ -coloração  $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34. □

**Teorema 23:** O problema de determinar o número cromático de um grafo é  $\mathcal{NP}$ -Difícil.

# Problema da Coloração

## Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

Saída: sim ou não conforme  $G$  admita ou não uma  $k$ -coloração.

**Teorema 22:** O problema de, dados um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , se  $G$  admite uma  $k$ -coloração  $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34.



**Teorema 23:** O problema de determinar o número cromático de um grafo é  $\mathcal{NP}$ -Difícil.

# Problema da Coloração

## Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

Saída: sim ou não conforme  $G$  admita ou não uma  $k$ -coloração.

**Teorema 22:** O problema de, dados um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , se  $G$  admite uma  $k$ -coloração  $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34. □

**Teorema 23:** O problema de determinar o número cromático de um grafo é  $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Demonstração.

Exercício 36 □

O quebra-cabeça Sudoku é o problema de completar a 9-coloração de um certo grafo de 81 vértices.

## Teorema

*Para todo grafo  $G$ ,*

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

## Teorema

*Para todo grafo  $G$ ,*

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Demonstração.

Exercício 27



# Aula de hoje

- 1 Grafos Bipartidos
- 2 Grafos Multipartidos e Coloração
- 3 **Grafos Perfeitos**

# Grafos Perfeitos

# Grafos Perfeitos

Um grafo  $G$  é **perfeito** se

$\omega(H) = \chi(H)$  para todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$ .

# Grafos Perfeitos

Um grafo  $G$  é **perfeito** se

$$\omega(H) = \chi(H) \text{ para todo subgrafo induzido } H \text{ de } G.$$

## Teorema

*Os problemas de coloração, clique máxima e conjunto independente máximo admitem solução polinomial se restritos a grafos perfeitos.*

# Grafos Perfeitos

Um grafo  $G$  é **perfeito** se

$$\omega(H) = \chi(H) \text{ para todo subgrafo induzido } H \text{ de } G.$$

## Teorema

*Os problemas de coloração, clique máxima e conjunto independente máximo admitem solução polinomial se restritos a grafos perfeitos.*

Os algoritmos para estes problemas são complicados. O seguinte teorema estava em aberto de 1961 até 2005.

# Grafos Perfeitos

Um grafo  $G$  é **perfeito** se

$$\omega(H) = \chi(H) \text{ para todo subgrafo induzido } H \text{ de } G.$$

## Teorema

*Os problemas de coloração, clique máxima e conjunto independente máximo admitem solução polinomial se restritos a grafos perfeitos.*

Os algoritmos para estes problemas são complicados. O seguinte teorema estava em aberto de 1961 até 2005.

## Teorema (Chudnovsky\* et al. (2005))

*É possível decidir em tempo polinomial se um grafo é perfeito.*