Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 7: Passeios

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva
Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

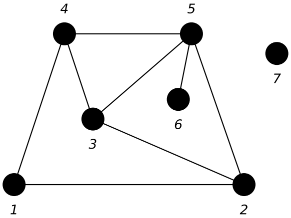
2026 - Primeiro semestre

Aula de hoje

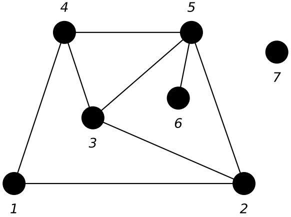
Aula de hoje

1. Definições
2. Matrizes de Adjacência
3. Operações
4. Grafos bipartidos

Definição

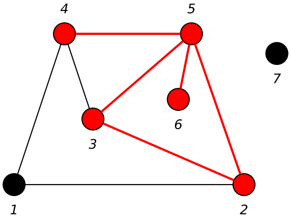


Definição



passeio

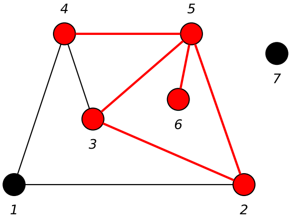
Definição



$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices

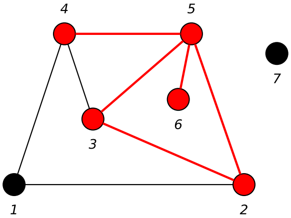
Definição



$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

Definição

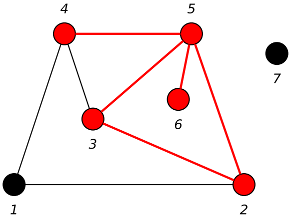


$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

Definição



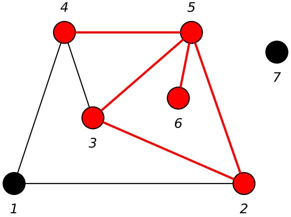
$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0

Definição



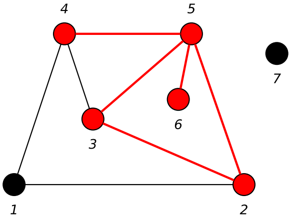
$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0: **início** do passeio

Definição



$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

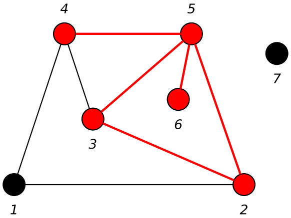
passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0: **início** do passeio

v_n

Definição



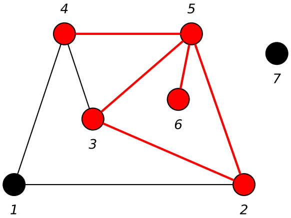
$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0: **início** do passeio
v_n: **fim** do passeio

Definição



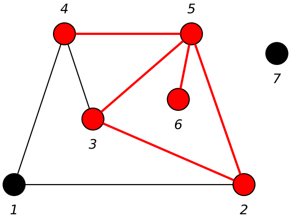
$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0: **início** do passeio
v_n: **fim** do passeio
v_0 e v_n

Definição



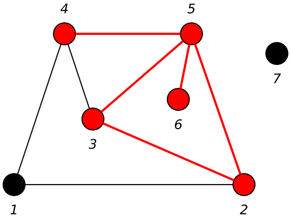
$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \dots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0: **início** do passeio
v_n: **fim** do passeio
v_0 e v_n: **pontas** do passeio

Definição



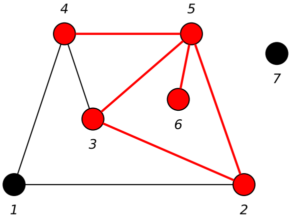
$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0: **início** do passeio
v_n: **fim** do passeio
v_0 e v_n: **pontas** do passeio
$v_1, \ldots, v_{n-1}$

Definição



$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio: sequência $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices, onde vértices consecutivos são vizinhos

v_{i-1} e v_i são vizinhos, para todo $1 \leq i \leq n$

v_0: **início** do passeio
v_n: **fim** do passeio
v_0 e v_n: **pontas** do passeio
$v_1, \ldots, v_{n-1}$: **vértices internos** do passeio

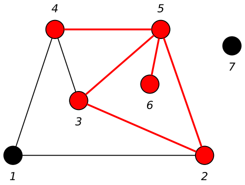
Definições auxiliares

passeio trivial

Definições auxiliares

passeio trivial: passeio com um único vértice

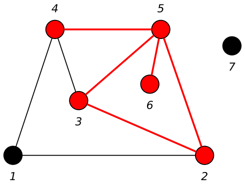
Definições auxiliares



passeio trivial: passeio com um único vértice

passeio **aberto**

Definições auxiliares

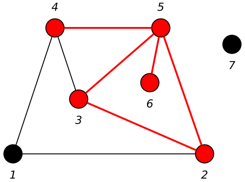


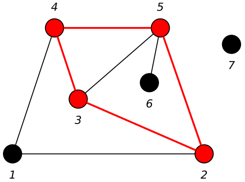
$$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$$

passeio trivial: passeio com um único vértice

passeio **aberto**: pontas distintas

Definições auxiliares





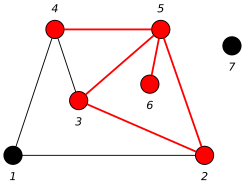
$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$

passeio trivial: passeio com um único vértice

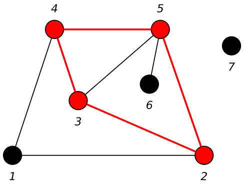
passeio **aberto**: pontas distintas

passeio **fechado**

Definições auxiliares



$(4, 5, 2, 3, 5, 6)$



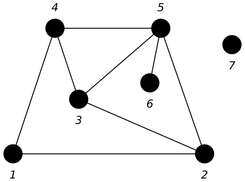
$(4, 5, 2, 3, 4)$

passeio trivial: passeio com um único vértice

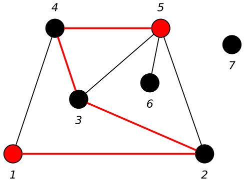
passeio **aberto**: pontas distintas

passeio **fechado**: pontas coincidem

Distância

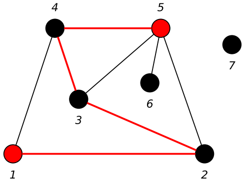


Distância



tamanho do passeio: número “arestas percorridas”

Distância

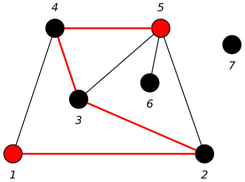


$$(1, 2, 3, 4, 5)$$

tamanho do passeio: número "arestas percorridas"

$P = (v_0, \dots, v_n)$

Distância



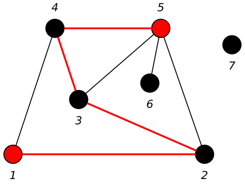
$$|(1, 2, 3, 4, 5)| = 4$$

tamanho do passeio: número "arestas percorridas"

$P = (v_0, \ldots, v_n)$

$|P| = n$

Distância



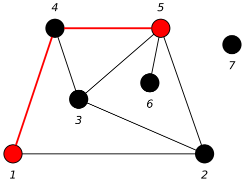
tamanho do passeio: número "arestas percorridas"

$P = (v_0, \ldots, v_n)$

$|P| = n$

distância entre u e v

Distância



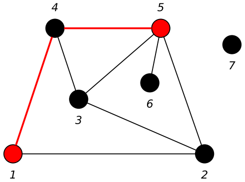
tamanho do passeio: número "arestas percorridas"

$P = (v_0, \ldots, v_n)$

$|P| = n$

distância entre u e v: tamanho do menor passeio de u a v

Distância



$$d_G(1,5) = |(1,4,5)| = 2$$

tamanho do passeio: número "arestas percorridas"

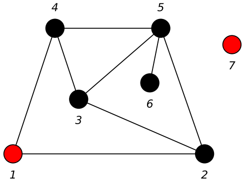
$P = (v_0, \ldots, v_n)$

$|P| = n$

distância entre u e v: tamanho do menor passeio de u a v

$$d_G(u,v) := \min\{|P| \mid P \text{ é passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G\}$$

Distância



tamanho do passeio: número "arestas percorridas"

$P = (v_0, \ldots, v_n)$

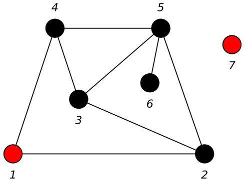
$|P| = n$

distância entre u e v: tamanho do menor passeio de u a v

$$d_G(u, v) := \min \{|P| \mid P \text{ é passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G\}$$

não existe passeio de u a v

Distância



$d_G(1, 7) = \infty$

tamanho do passeio: número "arestas percorridas"

$P = (v_0, \ldots, v_n)$

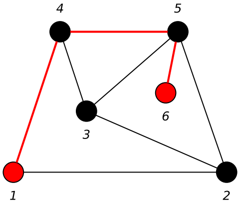
$|P| = n$

distância entre u e v: tamanho do menor passeio de u a v

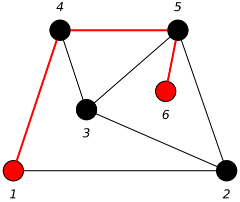
$$d_G(u, v) := \min \{|P| \mid P \text{ é passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G\}$$

não existe passeio de u a v: $d_G(u, v) = \infty$

Diâmetro

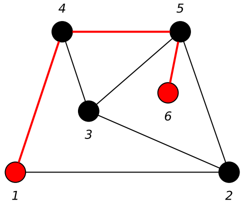


Diâmetro



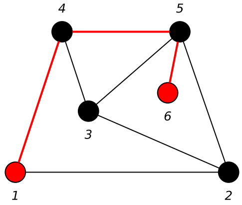
diâmetro de G

Diâmetro



diâmetro de G: maior distância entre dois vértices em G

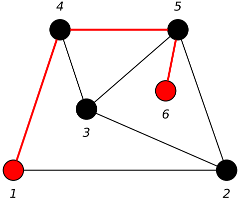
Diâmetro



diâmetro de G: maior distância entre dois vértices em G

$$\mathrm{diam}(G) := \max \{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

Diâmetro

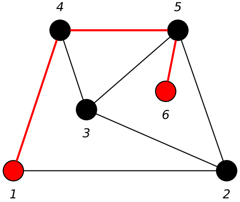


diâmetro de G: maior distância entre dois vértices em G

$$\operatorname{diam}(G) := \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

não existe passeio de u a v

Diâmetro

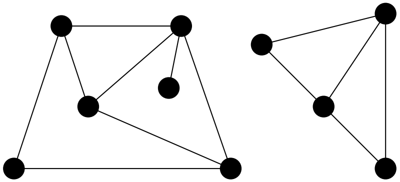


diâmetro de G: maior distância entre dois vértices em G

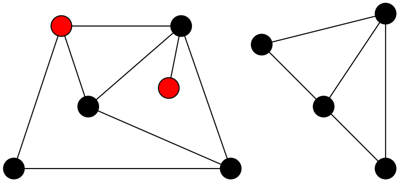
$$\text{diam}(G) := \max\{d_G(u,v) \mid u, v \in V(G)\}$$

não existe passeio de u a v: $\text{diam}(G) = \infty$

Conexidade

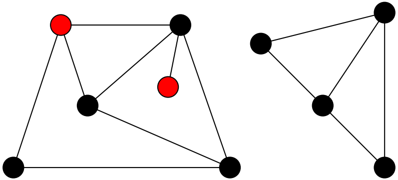


Conexidade



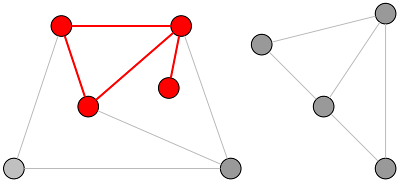
v é **alcançável** a partir de u

Conexidade



v é **alcançável** a partir de u: existe passeio de u a v

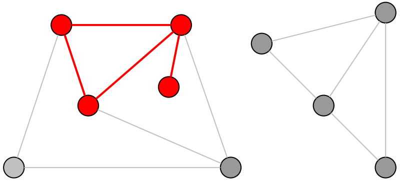
Conexidade



v é **alcançável** a partir de u: existe passeio de u a v

G é **conexo**

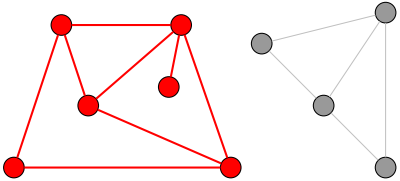
Conexidade



v é **alcançável** a partir de u: existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

Conexidade

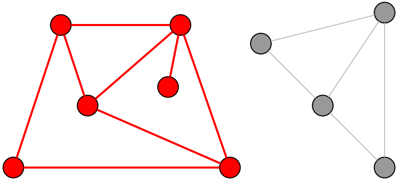


v é **alcançável** a partir de u: existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

componente de G

Conexidade

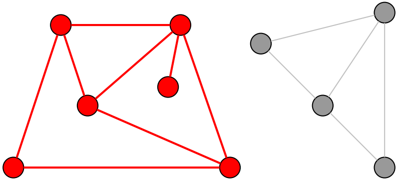


v é **alcançável** a partir de u: existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

componente de G: subgrafo conexo maximal de G

Conexidade



v é **alcançável** a partir de u: existe passeio de u a v

G é **conexo**: todo vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice

componente de G: subgrafo conexo maximal de G

$\mathcal{C}(G)$: conjunto dos componentes de G

Aula de hoje

1. Definições
2. Matrizes de Adjacência
3. Operações
4. Grafos bipartidos

Matrizes de Adjacência e Passeios

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana.

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Observe que

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Observe que

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v].$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Observe que

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v].$$

(note: as operações são booleanas, i.e. multiplicação é "e" e soma é "ou")

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Observe que

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v].$$

(note: as operações são booleanas, i.e. multiplicação é "e" e soma é "ou")

Assim, dados $u, v, w \in V(G)$, temos

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Observe que

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v].$$

(note: as operações são booleanas, i.e. multiplicação é "e" e soma é "ou")

Assim, dados $u, v, w \in V(G)$, temos

$$M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow \{u,w\} \in E(G) \text{ e } \{w,v\} \in E(G)$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Observe que

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v].$$

(note: as operações são booleanas, i.e. multiplicação é “e” e soma é “ou”)

Assim, dados $u, v, w \in V(G)$, temos

$$M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow \{u,w\} \in E(G) \text{ e } \{w,v\} \in E(G)$$

$$M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow (u,w,v) \text{ é passeio em } G.$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Observe que

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v].$$

(note: as operações são booleanas, i.e. multiplicação é "e" e soma é "ou")

Assim, dados $u, v, w \in V(G)$, temos

$$M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow \{u,w\} \in E(G) \text{ e } \{w,v\} \in E(G)$$

$$M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow (u,w,v) \text{ é passeio em } G.$$

Consequentemente,

$$\sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow (u,w,v) \text{ é passeio em } G, \text{ para algum } w \in V(G).$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Em outras palavras,

$$M_G^2[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de tamanho 2 de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Em outras palavras,

$$M_G^2[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de tamanho 2 de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Teorema 27: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana.

Matrizes de Adjacência e Passeios

Em outras palavras,

$$M_G^2[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de tamanho 2 de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Teorema 27: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana.Para todo $k \in \mathbb{N}$,

Matrizes de Adjacência e Passeios

Em outras palavras,

$$M_G^2[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de tamanho 2 de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Teorema 27: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana.Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

Matrizes de Adjacência e Passeios

Em outras palavras,

$$M_G^2[u,v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de tamanho 2 de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Teorema 27: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana.Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

$$M_G^k[u,v] = 1 \text{ se e somente se existe passeio de tamanho } k \text{ de } u \text{ a } v \text{ em } G$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Em outras palavras,

$$M_G^2[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de tamanho 2 de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Teorema 27: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana.Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

$$M_G^k[u, v] = 1 \text{ se e somente se existe passeio de tamanho } k \text{ de } u \text{ a } v \text{ em } G$$

Demonstração.

Exercício 38. □

Matrizes de Adjacência e Passeios

Definimos

Matrizes de Adjacência e Passeios

Definimos

$$M_G^* := \sum_{n \geq 0} M_G^n.$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Definimos
$$M_G^* := \sum_{n \geq 0} M_G^n.$$

Teorema 28: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

$$M_G^*[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Definimos

$$M_G^* := \sum_{n \geq 0} M_G^n.$$

Teorema 28: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

$$M_G^*[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Demonstração.

Exercício 38. $\square$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Definimos
$$M_G^* := \sum_{n \geq 0} M_G^n.$$

Teorema 28: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,
$$M_G^*[u, v] = 1 \Leftrightarrow \text{existe passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

Demonstração.

Exercício 38. $\square$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Corolário 29: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Então

$$M_G^* = \sum_{k=0}^{\mathrm{diam}(G)} M_G^k.$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Corolário 29: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Então

$$M_G^* = \sum_{k=0}^{\operatorname{diam}(G)} M_G^k.$$

Corolário 30: É possível decidir se um grafo de n vértices é conexo em tempo $O(n^4)$.

Matrizes de Adjacência e Passeios

Corolário 29: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência booleana. Então

$$M_G^* = \sum_{k=0}^{\mathrm{diam}(G)} M_G^k.$$

Corolário 30: É possível decidir se um grafo de n vértices é conexo em tempo $O(n^4)$.

Corolário 31: É possível computar os componentes de um grafo de n vértices em tempo $O(n^4)$.

Matrizes de Adjacência e Passeios

Matrizes de Adjacência e Passeios

Do mesmo modo, tomando M_G como uma matriz de inteiros,

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v],$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Do mesmo modo, tomando M_G como uma matriz de inteiros,

$$M_G^2[u, v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u, w] \times M_G[w, v],$$

e, dados $u, v, w \in V(G)$,

Matrizes de Adjacência e Passeios

Do mesmo modo, tomando M_G como uma matriz de inteiros,

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v],$$

e, dados $u, v, w \in V(G)$,

$$M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow \{u,w\} \in E(G) \text{ e } \{w,v\} \in E(G)$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Do mesmo modo, tomando M_G como uma matriz de inteiros,

$$M_G^2[u,v] = \sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v],$$

e, dados $u, v, w \in V(G)$,

$$M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1 \Leftrightarrow \{u,w\} \in E(G) \text{ e } \{w,v\} \in E(G)$$

,

ou seja, $M_G[u,w] \times M_G[w,v] = 1$ se e somente se (u,w,v) é passeio em G.

Matrizes de Adjacência e Passeios

Consequentemente,

$$\sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v] = |\{w \in V(G) \mid (u,w,v) \text{ é passeio em } G\}|$$

Matrizes de Adjacência e Passeios

Consequentemente,

$$\sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v] = |\{w \in V(G) \mid (u,w,v) \text{ é passeio em } G\}|$$

Noutras palavras, $M_G^2[u,v]$ é o número de passeios de tamanho 2 de u a v em G.

Matrizes de Adjacência e Passeios

Consequentemente,

$$\sum_{w \in V(G)} M_G[u, w] \times M_G[w, v] = |\{w \in V(G) \mid (u, w, v) \text{ é passeio em } G\}|$$

Noutras palavras, $M_G^2[u, v]$ é o número de passeios de tamanho 2 de u a v em G.

Teorema 32: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência inteira. Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$, $M_G^k[u, v]$ é o número de passeios de tamanho k de u a v em G.

Matrizes de Adjacência e Passeios

Consequentemente,

$$\sum_{w \in V(G)} M_G[u,w] \times M_G[w,v] = |\{w \in V(G) \mid (u,w,v) \text{ é passeio em } G\}|$$

Noutras palavras, $M_G^2[u,v]$ é o número de passeios de tamanho 2 de u a v em G.

Teorema 32: Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência inteira. Para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$, $M_G^k[u,v]$ é o número de passeios de tamanho k de u a v em G.

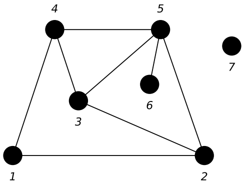
Demonstração.

Exercício 42 $\square$

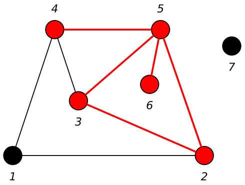
Aula de hoje

1. Definições
2. Matrizes de Adjacência
3. Operações
4. Grafos bipartidos

Grafo induzido por passeio

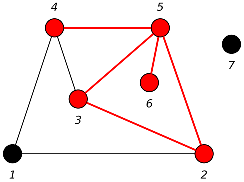


Grafo induzido por passeio



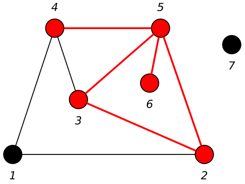
$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P

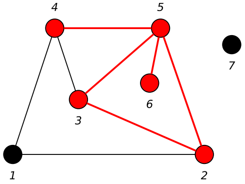
Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$

Grafo induzido por passeio

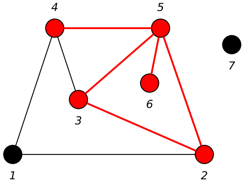


$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$

conjunto das arestas de P

Grafo induzido por passeio

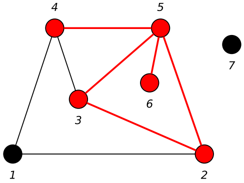


$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio

conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$

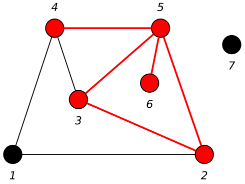
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

Grafo induzido por passeio



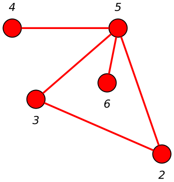
$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
grafo induzido por P

Grafo induzido por passeio



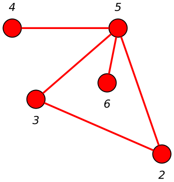
$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
grafo induzido por P: grafo com vértices e arestas de P

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \dots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \dots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
grafo induzido por P: grafo com vértices e arestas de P: $G[P]$

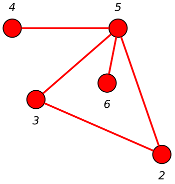
Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
grafo induzido por P: grafo com vértices e arestas de P: $G[P]$

$$V(G[P]) \quad := \quad V(P),$$

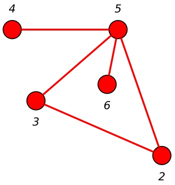
Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
grafo induzido por P: grafo com vértices e arestas de P: $G[P]$

$$\begin{aligned} V(G[P]) &:= V(P), \\ E(G[P]) &:= E(P). \end{aligned}$$

Grafo induzido por passeio

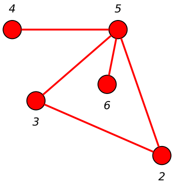


$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
grafo induzido por P: grafo com vértices e arestas de P: $G[P]$

$$\begin{aligned} V(G[P]) &:= V(P), \\ E(G[P]) &:= E(P). \end{aligned}$$

P é **gerador**

Grafo induzido por passeio

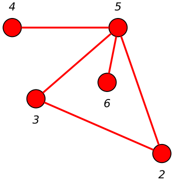


$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \le i \le n\}$
grafo induzido por P: grafo com vértices e arestas de P: $G[P]$

$$\begin{aligned} V(G[P]) &:= V(P), \\ E(G[P]) &:= E(P). \end{aligned}$$

P é **gerador**: $G[P]$ é subgrafo gerador de G

Grafo induzido por passeio



$P = (v_0, \ldots, v_n)$: passeio
conjunto dos vértices de P: $V(P) := \{v_0, \ldots, v_n\}$
conjunto das arestas de P: $E(P) := \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$
grafo induzido por P: grafo com vértices e arestas de P: $G[P]$

$$\begin{aligned} V(G[P]) &:= V(P), \\ E(G[P]) &:= E(P). \end{aligned}$$

P é **gerador**: $G[P]$ é subgrafo gerador de G: P "passa por" todos os vértices de G

Passeio Reverso

$P = (v_0, \ldots, v_n)$

Passeio Reverso

$P = (v_0, \dots, v_n)$

reverso de P

Passeio Reverso

$P = (v_0, \ldots, v_n)$

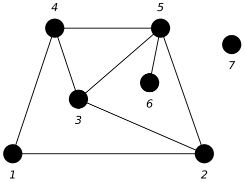
reverso de P: P^{-1}

Passeio Reverso

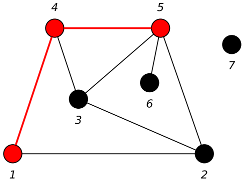
$P = (v_0, \ldots, v_n)$

reverso de P: $P^{-1} := (v_n, \ldots, v_0)$

Concatenação de Passeios

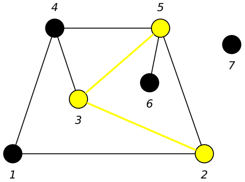


Concatenação de Passeios



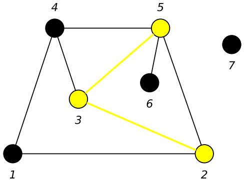
$$P = (v_0, \ldots, v_n)$$

Concatenação de Passeios



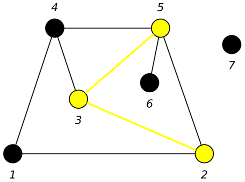
$P = (v_0, \ldots, v_n)$, $Q = (u_0, \ldots, u_m)$: passeios

Concatenação de Passeios



$P = (v_0, \ldots, v_n)$, $Q = (u_0, \ldots, u_m)$: passeios: $v_n = u_0$

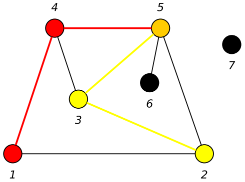
Concatenação de Passeios



$P = (v_0, \ldots, v_n)$, $Q = (u_0, \ldots, u_m)$: passeios: $v_n = u_0$

concatenação de P com Q

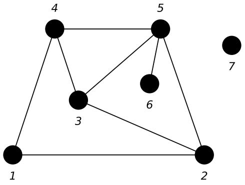
Concatenação de Passeios



$P = (v_0, \ldots, v_n)$, $Q = (u_0, \ldots, u_m)$: passeios: $v_n = u_0$

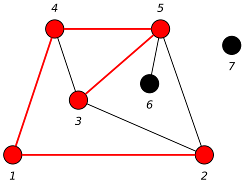
concatenação de P com Q: $P \cdot Q := (v_0, \ldots, v_n = u_0, u_1, \ldots, u_m)$

Segmentos de passeios



P: passeio

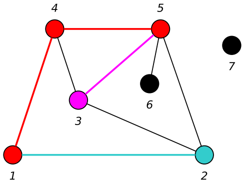
Segmentos de passeios



P: passeio

S é **segmento** de P

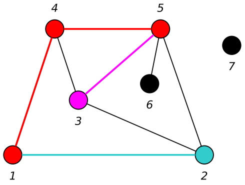
Segmentos de passeios



P: passeio

S é **segmento** de P: se existem passeios I, F tal que $S = I \cdot S \cdot F$.

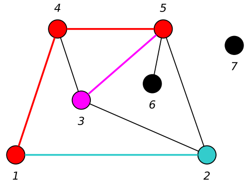
Segmentos de passeios



P: passeio

S é **segmento** de P: se existem passeios I, F tal que $S = I \cdot S \cdot F$.
S é **segmento próprio** de P

Segmentos de passeios



P: passeio

S é **segmento** de P: se existem passeios I, F tal que $S = I \cdot S \cdot F$.
S é **segmento próprio** de P: S é segmento de P e $S \neq P$

Aula de hoje

Teorema 33

Teorema 33

G é bipartido
se e somente se
não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Teorema 33

G é bipartido
se e somente se
não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Demonstração.

Exercício 46 $\square$

Exercício 46

provar que

G é bipartido

se e somente se

não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Exercício 46

provar que

G é bipartido

se e somente se

não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

duas partes

Exercício 46

provar que

G é bipartido

se e somente se

não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

duas partes:

$\Rightarrow$) se G é bipartido, então não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

Exercício 46

provar que

G é bipartido
se e somente se
não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

duas partes:

$\Rightarrow$) se G é bipartido, então não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas

$\Leftarrow$) se G não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas, então G é bipartido

Exercício 46, $\Rightarrow$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido P e Q: passeios de u a v

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\quad$ P e Q: passeios de u a v $\quad$ $p = |P|$ $\quad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\quad$ P e Q: passeios de u a v $\quad$ $p = |P|$ $\quad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ $(\partial(X) = E(G))$
5. $v_2 \in X$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ $(\partial(X) = E(G))$
5. $v_2 \in X$ $(\partial(X) = E(G))$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ $(\partial(X) = E(G))$
5. $v_2 \in X$ $(\partial(X) = E(G))$
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\quad$ P e Q: passeios de u a v $\quad$ $p = |P|$ $\quad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ $(\partial(X) = E(G))$
5. $v_2 \in X$ $(\partial(X) = E(G))$
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u \in X$

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ $(\partial(X) = E(G))$
5. $v_2 \in X$ $(\partial(X) = E(G))$
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u \in X$
8. $p + q$ é par

Exercício 46, $\Rightarrow$

G: grafo bipartido $\qquad$ P e Q: passeios de u a v $\qquad$ $p = |P|$ $\qquad$ $q = |Q|$

Objetivo: p e q tem paridades iguais

1. existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)
2. $PQ^{-1} = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p+q} = u)$ é passeio fechado de u a u
3. $u \in X$ (senão troque X por $V(G) - X$)
4. $v_1 \notin X$ ($\partial(X) = E(G)$)
5. $v_2 \in X$ ($\partial(X) = E(G)$)
6. $v_i \in X$ se e somente se i é par
7. $v_{p+q} = u \in X$
8. $p + q$ é par
9. p e q paridades iguais

Exercício 46, $\Leftarrow$

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

1. G é conexo

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)
3. $x :=$ vértice de G

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)
3. $x :=$ vértice de G
4. $X :=$ vértices de G a distância par de x

Exercício 46, $\Leftarrow$

G: grafo onde passeios com as mesmas pontas tem paridades iguais

Objetivo: G é bipartido $\equiv$ existe $X \subseteq V(G)$ tal que $\partial(X) = E(G)$ (L. 17)

1. G é conexo (senão repita o raciocínio para cada componente)
2. G tem mais de dois vértices (todo grafo com menos de três vértices é bipartido)
3. $x :=$ vértice de G
4. $X :=$ vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G)$

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices

x : vértice de G

X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$

   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$

   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes

   $(d(x, u) = |P_u|$ e

   $d(x, v) = |P_u| - 1)$

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$

   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes

   $(d(x, u) = |P_u|$ e

   $d(x, v) = |P_u| - 1)$

   2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$

   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes

   $(d(x, u) = |P_u|$ e

   $d(x, v) = |P_u| - 1)$

   2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa

   2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
   ($d(x, u) = |P_u|$ e
   $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
     ($d(x, u) = |P_u|$ e
     $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
     ($d(x, u) = |P_u|$ e
     $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
   ($d(x, u) = |P_u|$ e
   $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
   3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
   ($d(x, u) = |P_u|$ e
   $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
   3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
     ($d(x, u) = |P_u|$ e
     $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
   - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
   - 3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
   ($d(x, u) = |P_u|$ e
   $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
   3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
   3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes ($|P_u| = d(x, u) \ldots$)

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes ($d(x, u) = |P_u|$ e $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
   - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
   - 3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes ($|P_u| = d(x, u) \ldots$)
   - 3.4 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa

Exercício 46, $\Leftarrow$ (continuação)

G : grafo conexo com pelo menos três vértices
x : vértice de G
X : vértices de G a distância par de x

Objetivo: provar que $\partial(X) = E(G) \equiv$ dada $\{u, v\} \in E(G)$, provar que $\{u, v\} \in \partial(X)$

1. P_u e P_v : passeios de tamanho mínimo de x a u e de x a v

2. $\{u, v\} \in E(P_u)$
   - 2.1 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes
     ($d(x, u) = |P_u|$ e
     $d(x, v) = |P_u| - 1$)
   - 2.2 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   - 2.3 $\{u, v\} \in \partial(X)$

3. $\{u, v\} \notin E(P_u)$
   - 3.1 $Q := P_u(u, v)$ é passeio de x a v (concatenação)
   - 3.2 $|P_u|$ e $|P_v|$ tem paridades diferentes ($|Q|$ e $|P_v|$ mesmas paridades)
   - 3.3 $d(x, u)$ e $d(x, v)$ tem paridades diferentes ($|P_u| = d(x, u) \ldots$)
   - 3.4 $u \in X$ e $v \notin X$ ou vice–versa
   - 3.5 $\{u, v\} \in \partial(X)$