

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 8: Caminhos e Ciclos

Renato Carmo

André Guedes

Murilo Silva

Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

2026 - Primeiro semestre

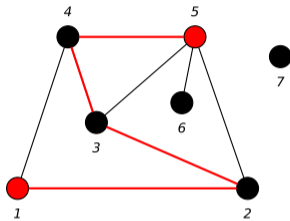
Aula de hoje

- 1 Caminhos
- 2 Ciclos
- 3 Ciclos e grafos bipartidos
- 4 Ciclos hamiltonianos

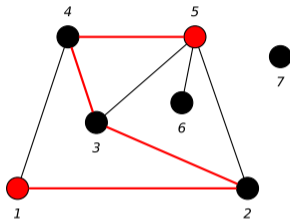
Aula de hoje

- 1 Caminhos
- 2 Ciclos
- 3 Ciclos e grafos bipartidos
- 4 Ciclos hamiltonianos

Definição

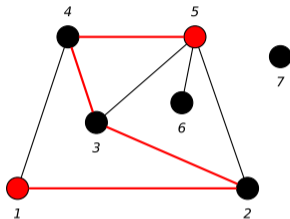


Definição



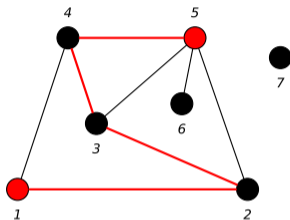
caminho

Definição



caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

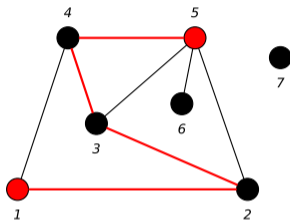
Definição



caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho

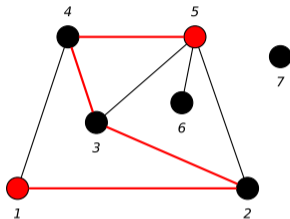
Definição



caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

Definição

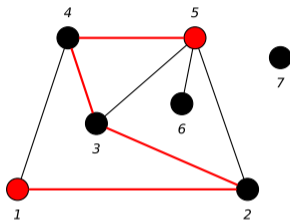


caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

P_n

Definição

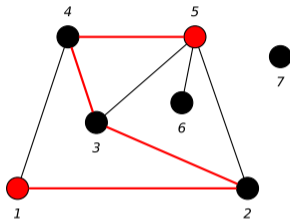


caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

P_n : grafo induzido por um caminho de n vértices

Definição



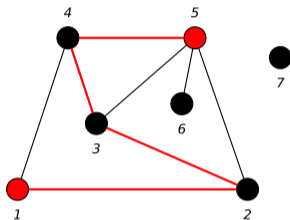
caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

P_n : grafo induzido por um caminho de n vértices

uPv

Definição



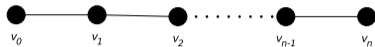
caminho: passeio cujos vértices são todos distintos

caminho: subgrafo induzido por passeio cujos vértices são todos distintos

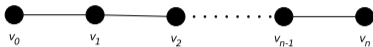
P_n : grafo induzido por um caminho de n vértices

uPv : caminho de u a v que é segmento de P

Teorema 34

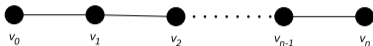


Teorema 34



P : caminho maximal em G

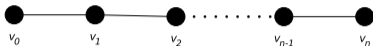
Teorema 34



P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Teorema 34



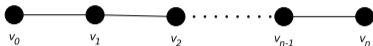
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$

Teorema 34



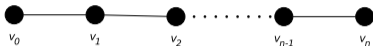
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal

Teorema 34



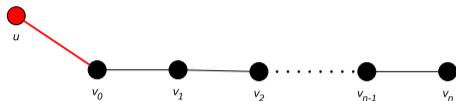
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u

Teorema 34



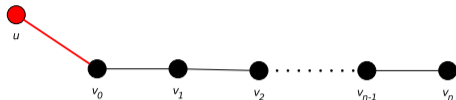
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u : vizinho de v_0 fora de P

Teorema 34



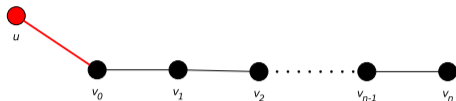
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u : vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$

Teorema 34



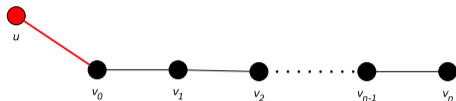
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u : vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho em G

Teorema 34



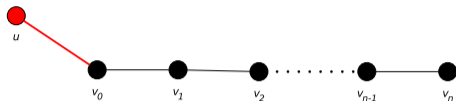
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u : vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q

Teorema 34



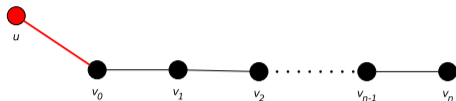
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u : vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q
5. contradiz P ser maximal

Teorema 34



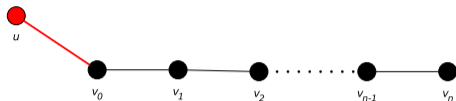
P : caminho maximal em G

todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u : vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q
5. contradiz P ser maximal
6. v_n não pode ter vizinhos fora de P

Teorema 34



P : caminho maximal em G

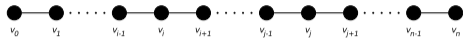
todos os vizinhos das pontas de P estão em P

Demonstração.

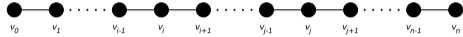
1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal
2. u : vizinho de v_0 fora de P
3. $Q = (u, v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho em G
4. P é segmento próprio de Q
5. contradiz P ser maximal
6. v_n não pode ter vizinhos fora de P : mesmo raciocínio



Teorema 35

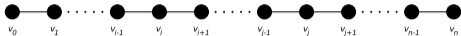


Teorema 35



Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Teorema 35

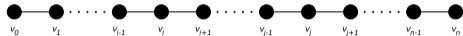


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$

Teorema 35

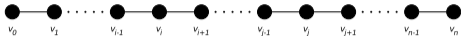


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n

Teorema 35

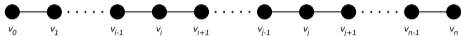


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho

Teorema 35

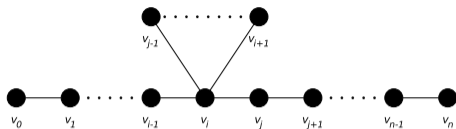


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P

Teorema 35

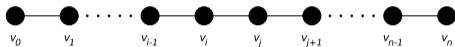


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$

Teorema 35

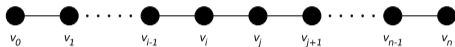


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$

Teorema 35

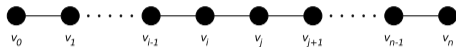


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n

Teorema 35

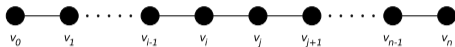


Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n de tamanho $|Q|$

Teorema 35



Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1)$

Teorema 35



Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1) < |P|$

Teorema 35



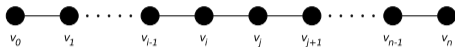
Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1) < |P|$

$(i < j)$

Teorema 35



Todo passeio de tamanho mínimo é caminho

Demonstração.

1. $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$: passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n
2. P não é caminho \implies vértice repetido em P
3. $v_i = v_j$, para algum $0 \leq i < j \leq n$
4. $Q = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$: passeio de v_0 a v_n
de tamanho $|Q| = |P| - (j - i + 1) < |P|$ ($i < j$)
5. contradiz o fato de P ser passeio de tamanho mínimo de v_0 a v_n



Caminhos Mínimos

caminho mínimo em G

caminho mínimo em G : caminho de tamanho mínimo entre suas pontas em G

Teorema 36

Teorema 36

Todo segmento de caminho mínimo é caminho mínimo

Teorema 36

Todo segmento de caminho mínimo é caminho mínimo

Demonstração.

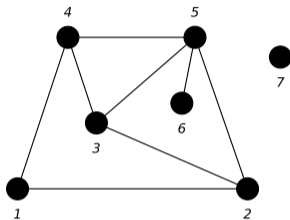
Exercício 48



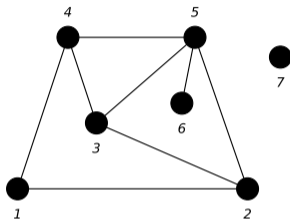
Aula de hoje

- 1 Caminhos
- 2 Ciclos**
- 3 Ciclos e grafos bipartidos
- 4 Ciclos hamiltonianos

Definição

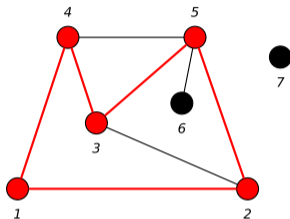


Definição



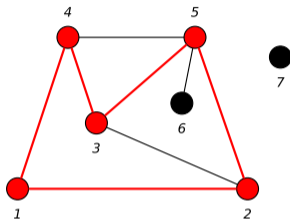
ciclo

Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

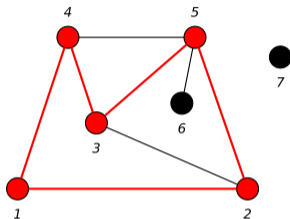
Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo

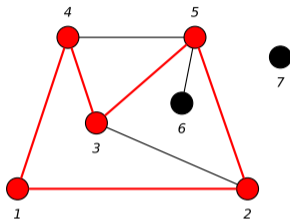
Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo: subgrafo induzido por um “passeio fechado de tamanho ... pontas”

Definição

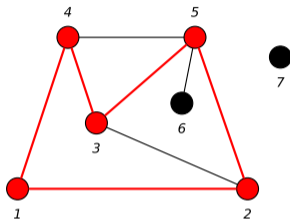


ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo: subgrafo induzido por um “passeio fechado de tamanho ... pontas”

C_n

Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo: subgrafo induzido por um “passeio fechado de tamanho ... pontas”

C_n : grafo induzido por ciclo de n vértices

Conceitos relacionados

Conceitos relacionados

grafo acíclico

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G : tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G : tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G : $\gamma(G)$

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G : tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G : $\gamma(G)$

G é acíclico

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G : tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G : $\gamma(G)$

G é acíclico: $\gamma(G) = \infty$

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G : tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G : $\gamma(G)$

G é acíclico: $\gamma(G) = \infty$

corda no ciclo C

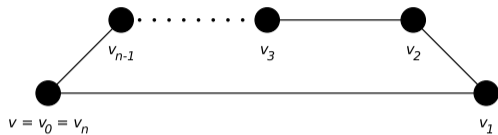
grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G : tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G : $\gamma(G)$

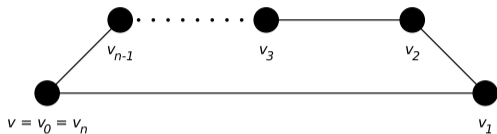
G é acíclico: $\gamma(G) = \infty$

corda no ciclo C : aresta ligando vértices que não são vizinhos no grafo induzido por C

Teorema 37

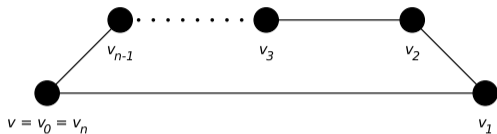


Teorema 37



Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Teorema 37

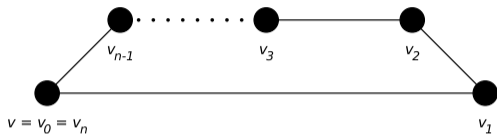


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$

Teorema 37

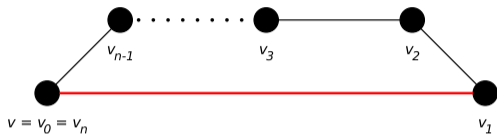


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$: ciclo

Teorema 37

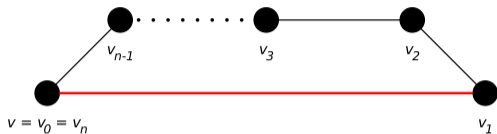


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$

Teorema 37

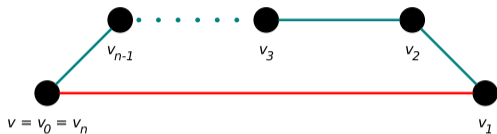


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$: caminho de v a v_1

Teorema 37

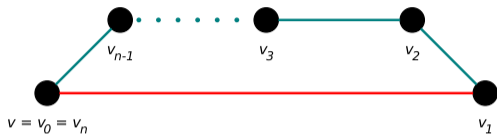


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$: caminho de v a v_1
3. $(v = v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$

Teorema 37



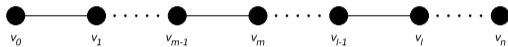
Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração (\Rightarrow).

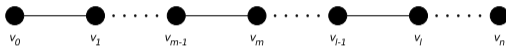
1. $C = (v = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$: caminho de v a v_1
3. $(v = v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$: outro caminho de v a v_1



Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

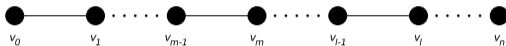


Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)



Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

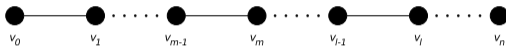


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

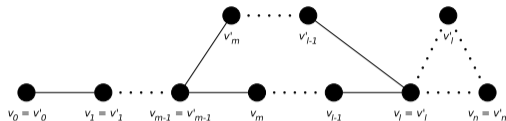


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

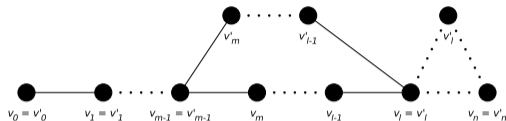


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

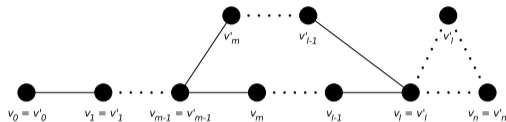


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

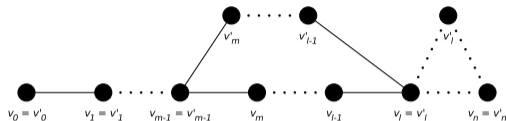


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

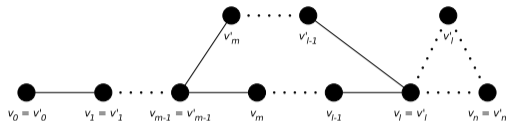


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

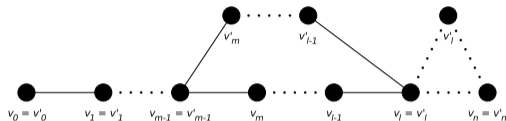


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

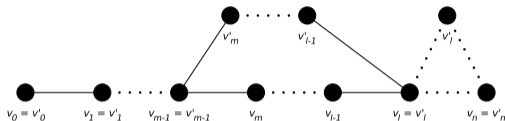


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

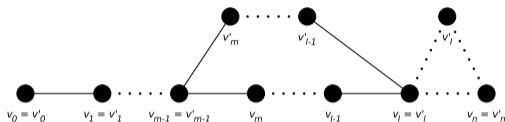


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_i : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

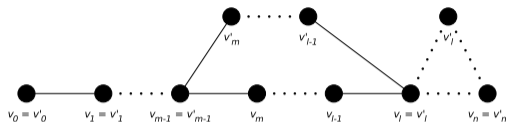


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_n = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

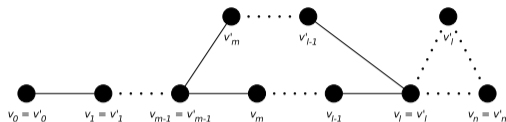


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_n = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l'

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

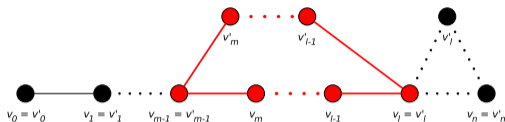


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_n = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l' : índice de v_l em P'

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

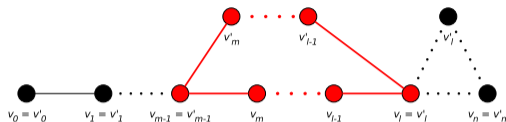


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l' : índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \dots, v_l$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

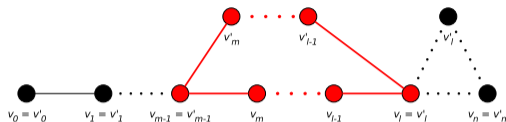


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l' : índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \dots, v_l = v'_{l'})$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

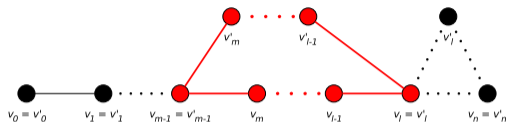


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l' : índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \dots, v_l = v'_{l'}, v'_{l'-1}, \dots, v'_m, v'_{m-1})$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)

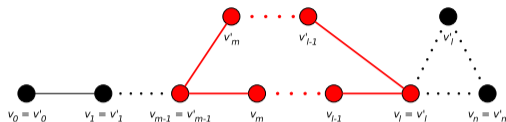


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l' : índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \dots, v_l = v'_{l'}, v'_{l'-1}, \dots, v'_m, v'_{m-1} = v_{m-1})$

Prova do Teorema 37: (\Leftarrow)



Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

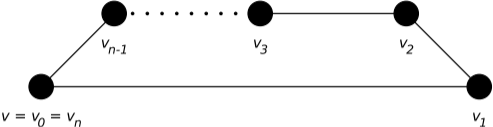
1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m : primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l : primeiro vértice de P , depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l' : índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \dots, v_l = v'_{l'}, v'_{l'-1}, \dots, v'_m, v'_{m-1} = v_{m-1})$: ciclo



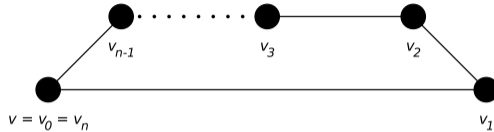
Aula de hoje

- 1 Caminhos
- 2 Ciclos
- 3 Ciclos e grafos bipartidos**
- 4 Ciclos hamiltonianos

Corolário 38

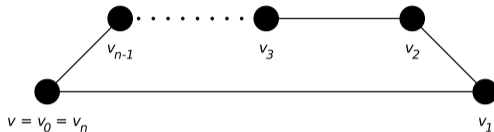


Corolário 38



Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Corolário 38

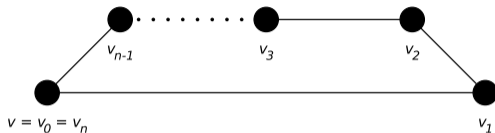


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$

Corolário 38

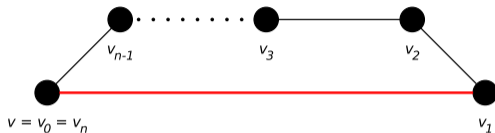


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo

Corolário 38

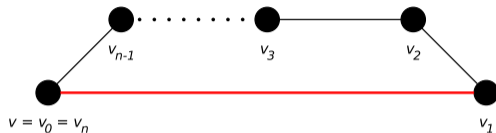


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1)

Corolário 38

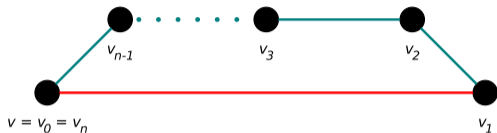


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1) : caminho de v_0 a v_1

Corolário 38

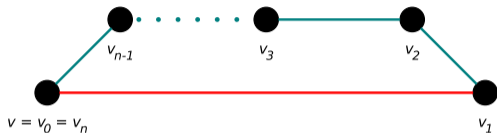


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1) : caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \dots, v_1)$

Corolário 38

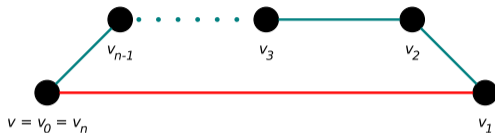


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1) : caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \dots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1

Corolário 38

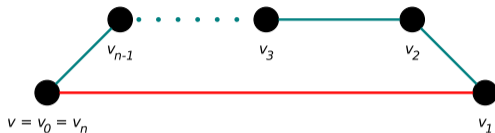


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1) : caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \dots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1
4. ambos tem tamanho ímpar

Corolário 38



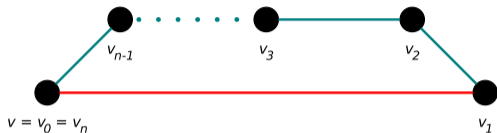
Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1) : caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \dots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1
4. ambos tem tamanho ímpar

(T. 33)

Corolário 38



Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

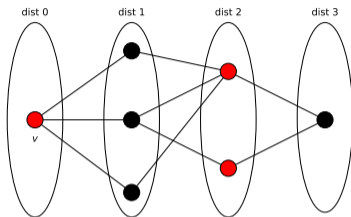
Demonstração (\Rightarrow).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1) : caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \dots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1
4. ambos tem tamanho ímpar
5. C tem tamanho par

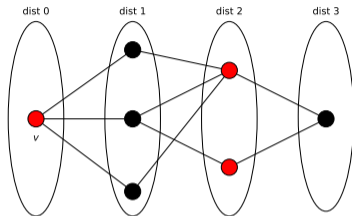
(T. 33)



Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)

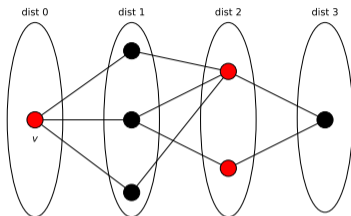


Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)



Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)

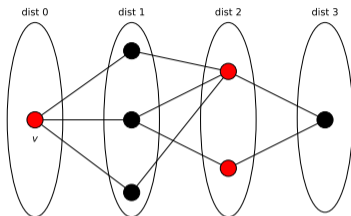


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)

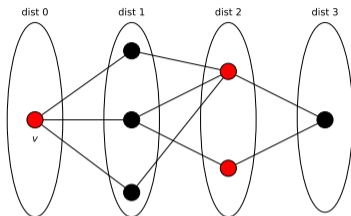


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)

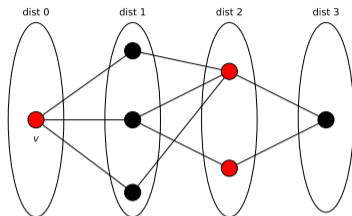


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)



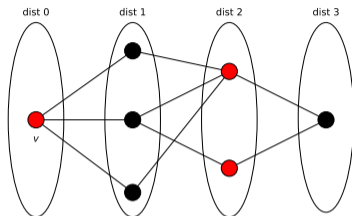
Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo

(SPG)

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)



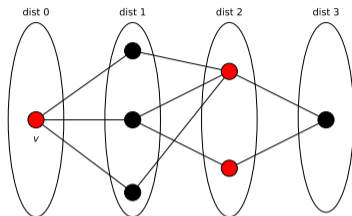
Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo
2. v

(SPG)

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)



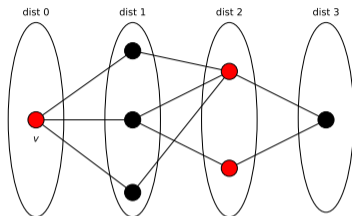
Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo
2. v : vértice de G

(SPG)

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)



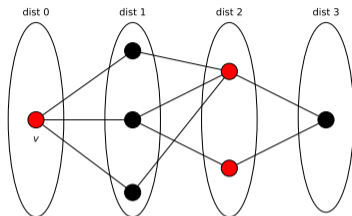
Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo
2. v : vértice de G
3. X

(SPG)

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)



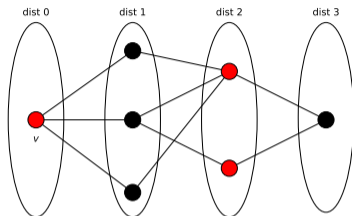
Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo
2. v : vértice de G
3. $X :=$ vértices de G a distância par de v

(SPG)

Prova do Corolário 38: (\Leftarrow)



Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G : grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo
2. v : vértice de G
3. $X :=$ vértices de G a distância par de v
4. $\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

(SPG)



Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
 v : vértice de G

Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

X

Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

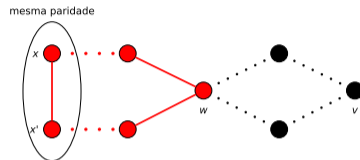
v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

Demonstração.

1. $\{x, x'\}$



Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

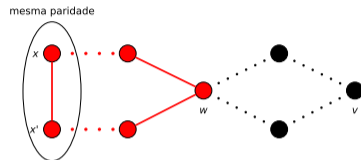
v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X



Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

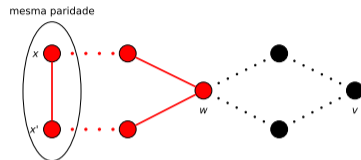
v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. $P (P')$



Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

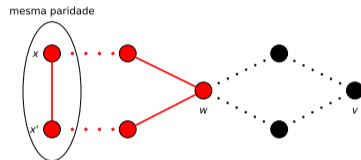
v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v



Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

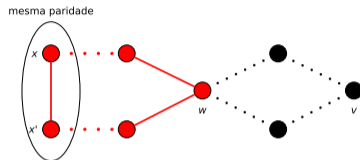
v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade



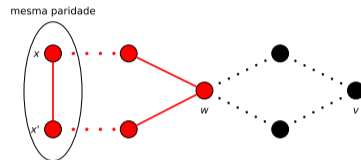
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$

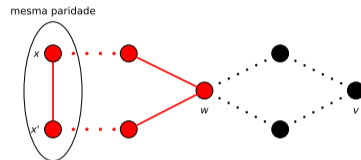
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w

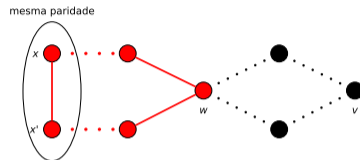
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P'

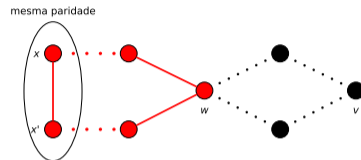
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P' $(v \text{ é comum a } P \text{ e } P')$

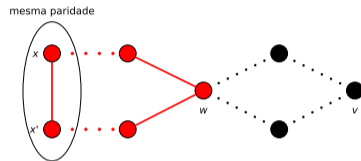
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P' $(v \text{ é comum a } P \text{ e } P')$
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$

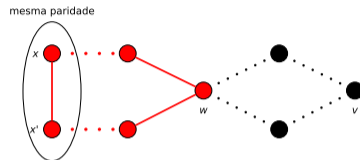
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P' $(v \text{ é comum a } P \text{ e } P')$
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ $(T.36)$

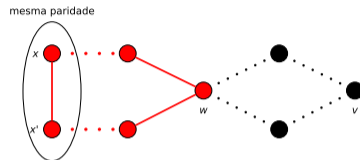
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P' $(v \text{ é comum a } P \text{ e } P')$
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ (T.36)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade

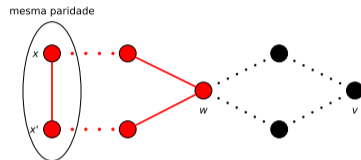
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P' $(v \text{ é comum a } P \text{ e } P')$
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ (T.36)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade
6. C

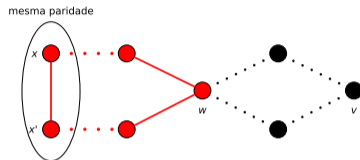
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P' $(v \text{ é comum a } P \text{ e } P')$
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ (T.36)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade
6. $C :=$ ciclo $xPw \cdot wP'x' \cdot (x', x)$

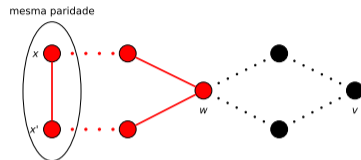
Prova do Corolário 38: (continuação de \Leftarrow)

G : grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v : vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w : primeiro vértice comum a P e P' $(v \text{ é comum a } P \text{ e } P')$
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ (T.36)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade
6. $C :=$ ciclo $xPw \cdot wP'x' \cdot (x', x)$ tem tamanho ímpar



Todo grafo acíclico é bipartido

O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Teorema 41: Ciclos ímpares de tamanho maior que 3 e seus complementos não são grafos perfeitos.

O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Teorema 41: Ciclos ímpares de tamanho maior que 3 e seus complementos não são grafos perfeitos.

Um **Grafo de Berge** é um grafo sem ciclo ímpar induzido cujo complemento também não tem ciclo ímpar induzido.

O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Teorema 41: Ciclos ímpares de tamanho maior que 3 e seus complementos não são grafos perfeitos.

Um **Grafo de Berge** é um grafo sem ciclo ímpar induzido cujo complemento também não tem ciclo ímpar induzido.

Teorema 42: Um grafo é perfeito se e somente se é Grafo de Berge. Chudnovsky et al. (2006)

Aula de hoje

- 1 Caminhos
- 2 Ciclos
- 3 Ciclos e grafos bipartidos
- 4 Ciclos hamiltonianos**

Definição

Um **ciclo hamiltoniano** em um grafo é um ciclo gerador do grafo, ou seja, um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

Definição

Um **ciclo hamiltoniano** em um grafo é um ciclo gerador do grafo, ou seja, um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

Um grafo é **hamiltoniano** se tem ciclo hamiltoniano.

Definição

Um **ciclo hamiltoniano** em um grafo é um ciclo gerador do grafo, ou seja, um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

Um grafo é **hamiltoniano** se tem ciclo hamiltoniano.

Um **caminho hamiltoniano** em um grafo é um um caminho gerador do grafo, ou seja, caminho que passa por todos os vértices do grafo.

Teorema 43(Karp, 1972)

Decidir se um grafo tem ciclo hamiltoniano é um problema \mathcal{NP} -Difícil.

Teorema 43(Karp, 1972)

Decidir se um grafo tem ciclo hamiltoniano é um problema \mathcal{NP} -Difícil.

Corolário 44

Determinar o tamanho do maior ciclo de um grafo é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Teorema 43(Karp, 1972)

Decidir se um grafo tem ciclo hamiltoniano é um problema \mathcal{NP} -Difícil.

Corolário 44

Determinar o tamanho do maior ciclo de um grafo é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Demonstração.

Exercício 58.



Corolário 45

Decidir se um grafo tem caminho hamiltoniano é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Corolário 45

Decidir se um grafo tem caminho hamiltoniano é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Demonstração.

Exercício 60



Corolário 45

Decidir se um grafo tem caminho hamiltoniano é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Demonstração.

Exercício 60



Corolário 46

Determinar um caminho de tamanho máximo em um grafo é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Corolário 45

Decidir se um grafo tem caminho hamiltoniano é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Demonstração.

Exercício 60



Corolário 46

Determinar um caminho de tamanho máximo em um grafo é um problema \mathcal{NP} -difícil.

Demonstração.

Exercício 61

