

# Algoritmos e Teoria dos Grafos

## Tópico 9: Árvores, Florestas e Conectividade

Renato Carmo  
André Guedes  
Murilo Silva  
Nicollas Sdroievski

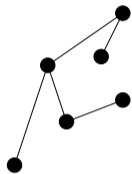
Departamento de Informática da UFPR

2026 - Primeiro semestre

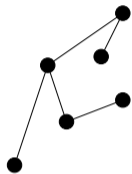
- 1 Árvores e Florestas
- 2 Conectividade por Arestas
- 3 Conectividade por Vértices

- 1 Árvores e Florestas
- 2 Conectividade por Arestas
- 3 Conectividade por Vértices

# Definição

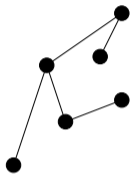


# Definição



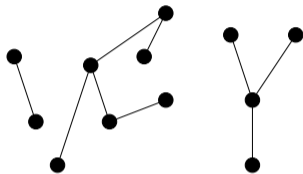
**árvore**

# Definição



**árvore:** grafo acíclico conexo

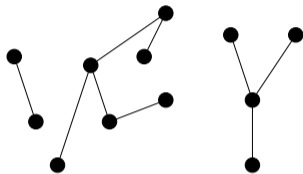
# Definição



**árvore:** grafo acíclico conexo

**floresta**

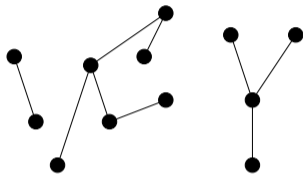
# Definição



**árvore:** grafo acíclico conexo

**floresta:** grafo onde cada componente é árvore

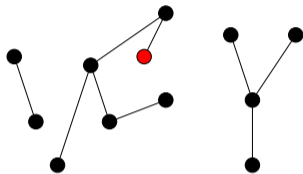
# Definição



**árvore:** grafo acíclico conexo

**floresta:** grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

# Definição

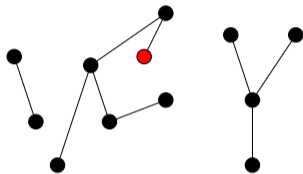


**árvore:** grafo acíclico conexo

**floresta:** grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

**folha**

# Definição

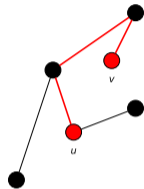


**árvore:** grafo acíclico conexo

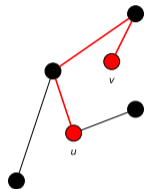
**floresta:** grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

**folha:** vértice de grau 1 em uma floresta

## Corolário 47

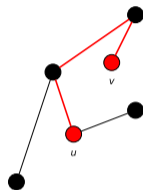


## Corolário 47



Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

## Corolário 47



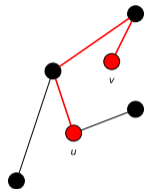
Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

Demonstração.

Imediato a partir do T. 37



## Corolário 47



Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

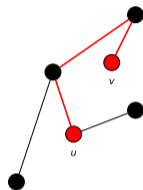
Demonstração.

Imediato a partir do T. 37



$uTv$

## Corolário 47



Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

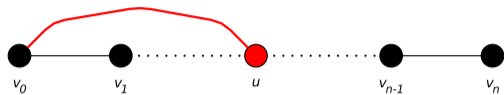
Demonstração.

Imediato a partir do T. 37

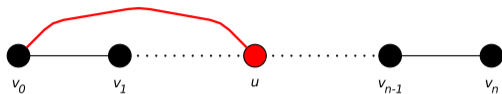


$uTv$ : caminho de  $u$  a  $v$  na árvore  $T$

# Teorema 48



## Teorema 48

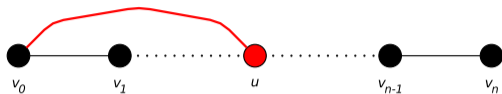


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$

## Teorema 48

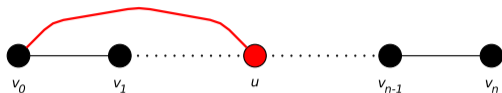


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial

## Teorema 48

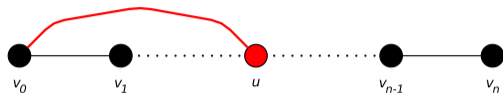


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$

## Teorema 48

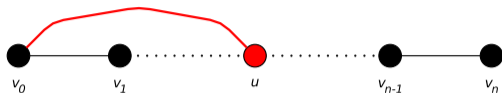


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$

## Teorema 48

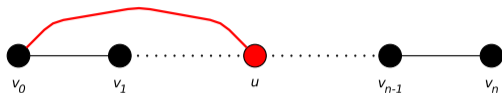


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha

## Teorema 48

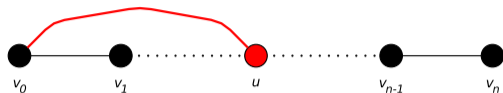


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$

## Teorema 48

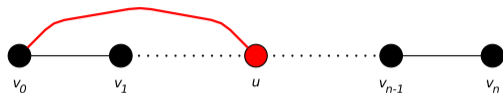


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$

## Teorema 48

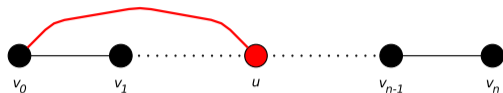


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$
  - 3.2  $u$  tem que estar em  $P$

## Teorema 48



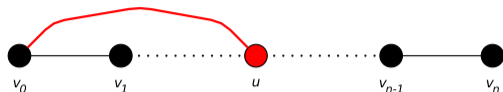
Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$
  - 3.2  $u$  tem que estar em  $P$

(L. 34)

## Teorema 48



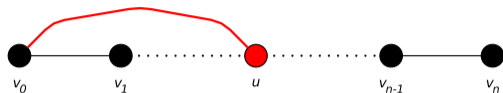
Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$
  - 3.2  $u$  tem que estar em  $P$
  - 3.3  $T$  tem ciclo

(L. 34)

## Teorema 48



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

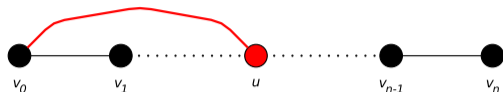
Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$
  - 3.2  $u$  tem que estar em  $P$
  - 3.3  $T$  tem ciclo

(L. 34)

(T. 37)

## Teorema 48



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

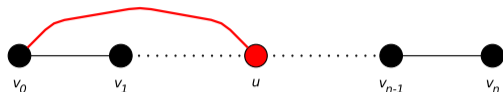
Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$
  - 3.2  $u$  tem que estar em  $P$
  - 3.3  $T$  tem ciclo
  - 3.4 contradiz  $T$  ser árvore

(L. 34)

(T. 37)

## Teorema 48



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

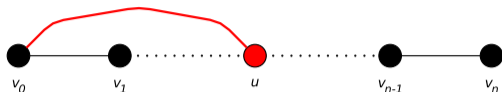
Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$
  - 3.2  $u$  tem que estar em  $P$
  - 3.3  $T$  tem ciclo
  - 3.4 contradiz  $T$  ser árvore
4.  $v_n$  é folha

(L. 34)

(T. 37)

## Teorema 48



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1.  $T$ : árvore não trivial
2.  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ : caminho maximal em  $T$
3.  $v_0$  é folha
  - 3.1  $u$ : vizinho de  $v_0$  em  $T$  distinto de  $v_1$
  - 3.2  $u$  tem que estar em  $P$
  - 3.3  $T$  tem ciclo
  - 3.4 contradiz  $T$  ser árvore
4.  $v_n$  é folha

(L. 34)

(T. 37)

(mesmo argumento)



## Teorema 49

## Teorema 49

Toda árvore de  $n$  vértices tem  $n - 1$  arestas

## Teorema 49

Toda árvore de  $n$  vértices tem  $n - 1$  arestas

indução em  $n$

Base:  $n = 1$

## Teorema 49

Toda árvore de  $n$  vértices tem  $n - 1$  arestas

indução em  $n$

Base:  $n = 1$

( $G$  é trivial)

## Teorema 49

Toda árvore de  $n$  vértices tem  $n - 1$  arestas

indução em  $n$

Base:  $n = 1$

tem  $0 = n - 1$  arestas

( $G$  é trivial)

## Prova do Teorema 49: passo de indução

Hipótese de Indução: se  $G$  é árvore com  $a$  vértices

## Prova do Teorema 49: passo de indução

Hipótese de Indução: se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$

(C. 48)

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$
3.  $G - v$  é conexo

(C. 48)

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico

## Prova do Teorema 49: passo de indução

Hipótese de Indução: se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

Passo: se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)

## Prova do Teorema 49: passo de indução

Hipótese de Indução: se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

Passo: se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore

## Prova do Teorema 49: passo de indução

Hipótese de Indução: se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

Passo: se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices (um a menos que  $G$ )

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices (um a menos que  $G$ )
7.  $G - v$  tem  $a - 1$  arestas

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices (um a menos que  $G$ )
7.  $G - v$  tem  $a - 1$  arestas (Hipótese de Indução)

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices (um a menos que  $G$ )
7.  $G - v$  tem  $a - 1$  arestas (Hipótese de Indução)
8.  $G - v$  tem uma aresta a menos que  $G$

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices (um a menos que  $G$ )
7.  $G - v$  tem  $a - 1$  arestas (Hipótese de Indução)
8.  $G - v$  tem uma aresta a menos que  $G$  ( $v$  é folha)

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices (um a menos que  $G$ )
7.  $G - v$  tem  $a - 1$  arestas (Hipótese de Indução)
8.  $G - v$  tem uma aresta a menos que  $G$  ( $v$  é folha)
9.  $G$  tem  $(a - 1) + 1$

## Prova do Teorema 49: passo de indução

**Hipótese de Indução:** se  $G$  é árvore com  $a$  vértices então  $G$  tem  $a - 1$  arestas

**Passo:** se  $G$  é árvore com  $a + 1$  vértices então  $G$  tem  $a$  arestas

1.  $G$ : árvore com  $a + 1$  vértices
2.  $G$  tem uma folha  $v$  (C. 48)
3.  $G - v$  é conexo ( $G$  é conexo e  $v$  é folha)
4.  $G - v$  é acíclico ( $G$  é acíclico)
5.  $G - v$  é árvore
6.  $G - v$  tem  $a$  vértices (um a menos que  $G$ )
7.  $G - v$  tem  $a - 1$  arestas (Hipótese de Indução)
8.  $G - v$  tem uma aresta a menos que  $G$  ( $v$  é folha)
9.  $G$  tem  $(a - 1) + 1 = a$  arestas

## Teorema 50

## Teorema 50

Todo grafo conexo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas é árvore

## Teorema 50

Todo grafo conexo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas é árvore

Demonstração.

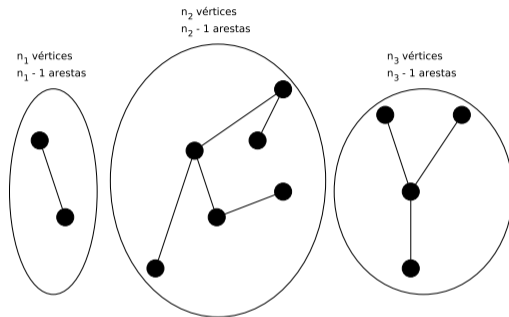
Exercício 84



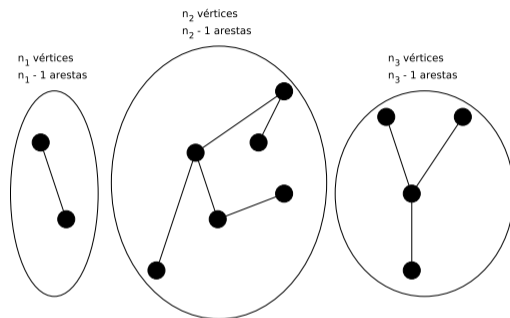
## Corolário 51

Um grafo com  $n$  vértices é árvore se e somente se é conexo e tem  $n - 1$  arestas

# Corolário 52



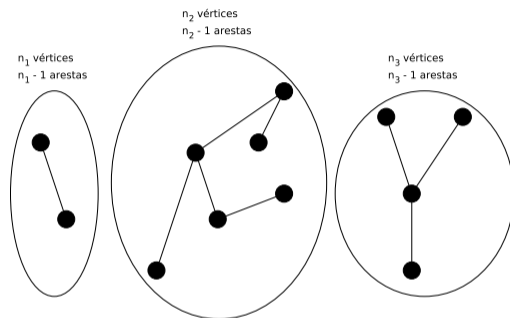
## Corolário 52



O grafo  $G$  é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |C(G)|$$

## Corolário 52



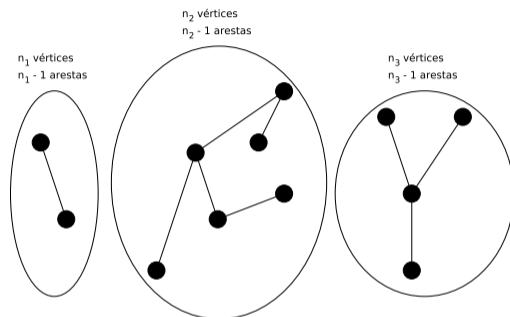
O grafo  $G$  é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |C(G)|$$

Demonstração.

Exercício 85

## Corolário 52



O grafo  $G$  é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |C(G)|$$

Demonstração.

Exercício 85

(aplicar Corolário 51 a cada componente do grafo)



## Teorema 53

## Teorema 53

$T$

## Teorema 53

$T$ : árvore

## Teorema 53

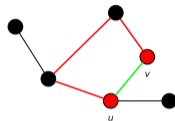
$T$ : árvore;  $u, v$

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$   
 $T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



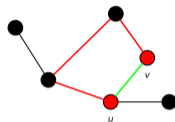
## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo

Demonstração.

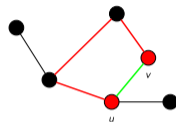
1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$



## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



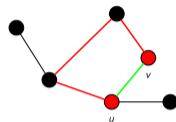
Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



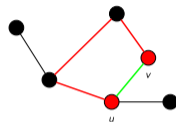
### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$

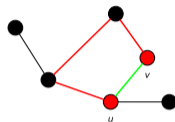
## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo

### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$



(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

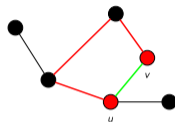
## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo

### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$
4.  $G[C] - \{u, v\}$  é conexo

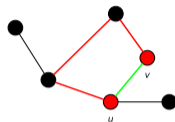


(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



### Demonstração.

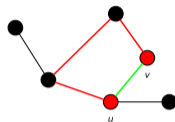
1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$
4.  $G[C] - \{u, v\}$  é conexo
5. existe caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $G[C] - \{u, v\}$

(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$
4.  $G[C] - \{u, v\}$  é conexo
5. existe caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $G[C] - \{u, v\}$
6.  $P$  é caminho de  $u$  a  $v$  em  $T$

(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

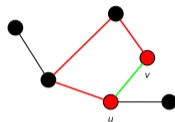
## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo

### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$
4.  $G[C] - \{u, v\}$  é conexo
5. existe caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $G[C] - \{u, v\}$
6.  $P$  é caminho de  $u$  a  $v$  em  $T$  distinto de  $uTv$

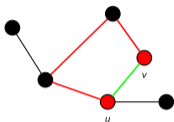


(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



### Demonstração.

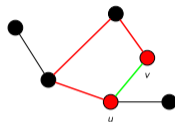
1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$
4.  $G[C] - \{u, v\}$  é conexo
5. existe caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $G[C] - \{u, v\}$
6.  $P$  é caminho de  $u$  a  $v$  em  $T$  distinto de  $uTv$
7.  $T$  tem ciclo

(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$
4.  $G[C] - \{u, v\}$  é conexo
5. existe caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $G[C] - \{u, v\}$
6.  $P$  é caminho de  $u$  a  $v$  em  $T$  distinto de  $uTv$
7.  $T$  tem ciclo

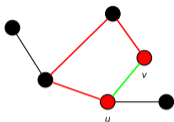
(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

(T.37)

## Teorema 53

$T$ : árvore;  $u, v$ : não vizinhos em  $T$

$T + \{u, v\}$  tem um único ciclo



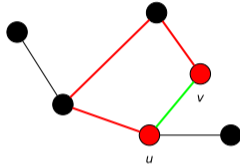
### Demonstração.

1.  $uTv \cdot (v, u)$  é ciclo em  $T + \{u, v\}$
2.  $C$ : outro ciclo  $C$  em  $T + \{u, v\}$
3.  $\{u, v\}$  é aresta de  $C$
4.  $G[C] - \{u, v\}$  é conexo
5. existe caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $G[C] - \{u, v\}$
6.  $P$  é caminho de  $u$  a  $v$  em  $T$  distinto de  $uTv$
7.  $T$  tem ciclo
8. contradiz a hipótese de  $T$  ser árvore

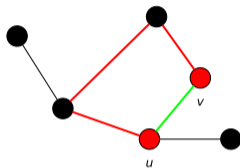
(senão  $C$  seria ciclo em  $T$ )

(T.37)

# Ciclo Fundamental

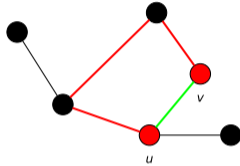


# Ciclo Fundamental



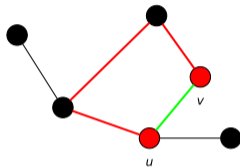
$T$

# Ciclo Fundamental



$T$ : árvore

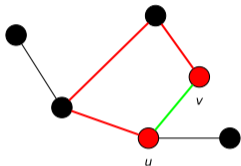
# Ciclo Fundamental



$T$ : árvore

$u, v$

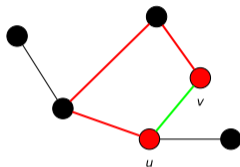
# Ciclo Fundamental



$T$ : árvore

$u, v$ : não vizinhos em  $T$

# Ciclo Fundamental

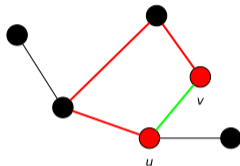


$T$ : árvore

$u, v$ : não vizinhos em  $T$

**ciclo fundamental de  $\{u, v\}$  com relação a  $T$**

# Ciclo Fundamental

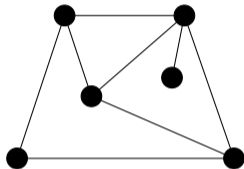


$T$ : árvore

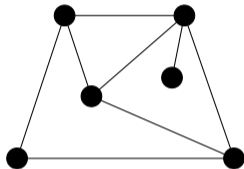
$u, v$ : não vizinhos em  $T$

**ciclo fundamental de  $\{u, v\}$  com relação a  $T$ : único ciclo em  $T + \{u, v\}$**

# Árvores e Florestas Geradoras

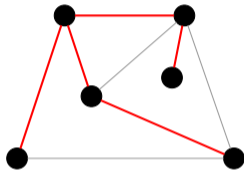


# Árvores e Florestas Geradoras



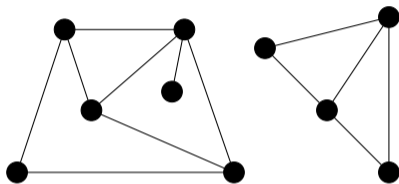
árvore geradora de  $G$

# Árvores e Florestas Geradoras



**árvore geradora de  $G$ :** subgrafo gerador de  $G$  que é árvore

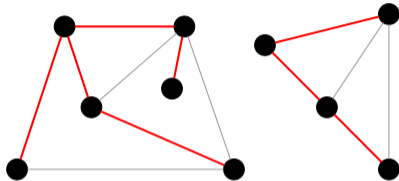
# Árvores e Florestas Geradoras



**árvore geradora de  $G$ :** subgrafo gerador de  $G$  que é árvore

**floresta geradora de  $G$**

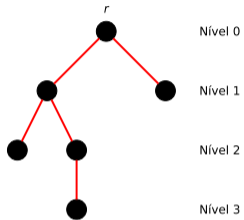
# Árvores e Florestas Geradoras



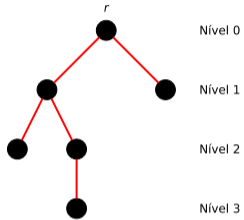
**árvore geradora de  $G$ :** subgrafo gerador de  $G$  que é árvore

**floresta geradora de  $G$ :** subgrafo gerador de  $G$  que é floresta

# Árvore Enraizada

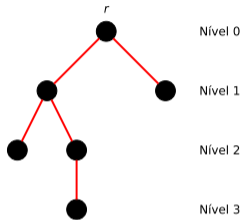


# Árvore Enraizada



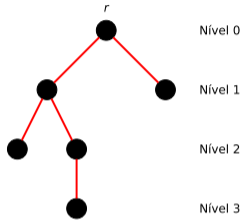
árvore enraizada

# Árvore Enraizada



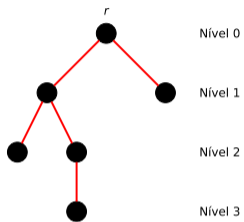
**árvore enraizada:** par  $(T, r)$

# Árvore Enraizada



**árvore enraizada:** par  $(T, r)$   
 $T$

# Árvore Enraizada

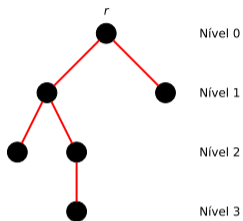


**árvore enraizada:** par  $(T, r)$

$T$ : árvore

$r$

# Árvore Enraizada

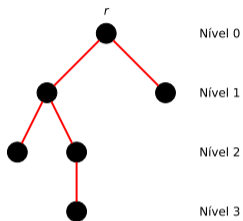


**árvore enraizada:** par  $(T, r)$

$T$ : árvore

$r$ : vértice de  $T$

# Árvore Enraizada

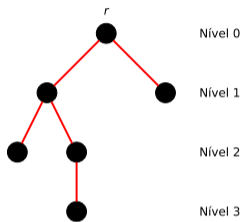


**árvore enraizada:** par  $(T, r)$

$T$ : árvore

$r$ : vértice de  $T$ : **raíz**

# Árvore Enraizada



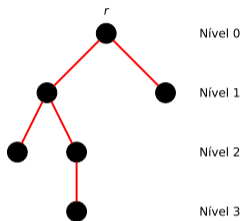
**árvore enraizada:** par  $(T, r)$

$T$ : árvore

$r$ : vértice de  $T$ : **raíz**

**nível de  $v$  em  $(T, r)$**

# Árvore Enraizada



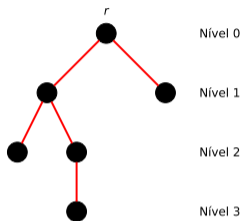
**árvore enraizada:** par  $(T, r)$

$T$ : árvore

$r$ : vértice de  $T$ : **raíz**

**nível de  $v$  em  $(T, r)$ :** distância de  $v$  a  $r$  em  $T$

# Árvore Enraizada



**árvore enraizada:** par  $(T, r)$

$T$ : árvore

$r$ : vértice de  $T$ : **raíz**

**nível de  $v$  em  $(T, r)$ :** distância de  $v$  a  $r$  em  $T$

$L_{T,r}(v) := d_T(r, v)$

- 1 Árvores e Florestas
- 2 **Conectividade por Arestas**
- 3 Conectividade por Vértices

# Corte de Arestas

## Corte de Arestas

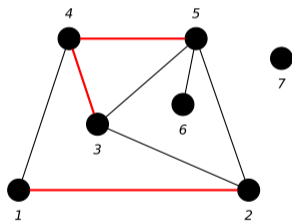
- Ideia: conjunto  $K$  de arestas tal que a remoção desconecta grafo  $G$

## Corte de Arestas

- Ideia: conjunto  $K$  de arestas tal que a remoção desconecta grafo  $G$
- E se o grafo já for desconexo?

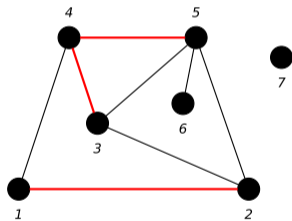
# Corte de Arestas

- Ideia: conjunto  $K$  de arestas tal que a remoção desconecta grafo  $G$
- E se o grafo já for desconexo?



# Corte de Arestas

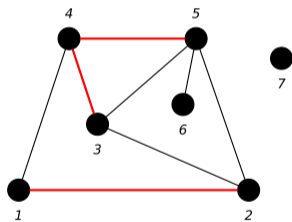
- Ideia: conjunto  $K$  de arestas tal que a remoção desconecta grafo  $G$
- E se o grafo já for desconexo?



- Mais precisamente: remoção aumenta número de componentes

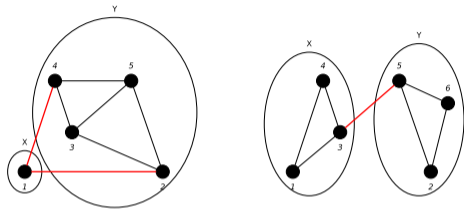
# Corte de Arestas

- Ideia: conjunto  $K$  de arestas tal que a remoção desconecta grafo  $G$
- E se o grafo já for desconexo?

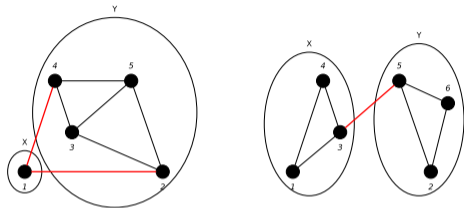


- Mais precisamente: remoção aumenta número de componentes
- O conjunto  $K \subseteq E(G)$  é um *corte* se  $|\mathcal{C}(G - K)| > |\mathcal{C}(G)|$

# Conexidade por Arestas

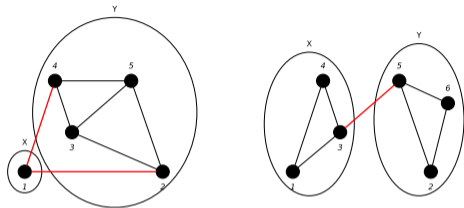


# Conexidade por Arestas



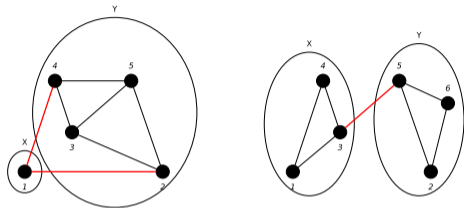
Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo

# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

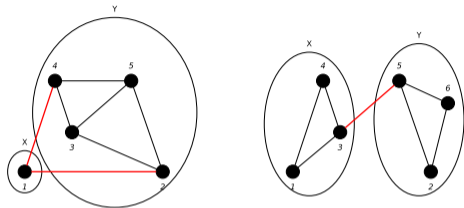
# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ?

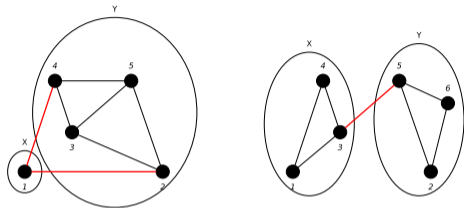
# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

# Conexidade por Arestas

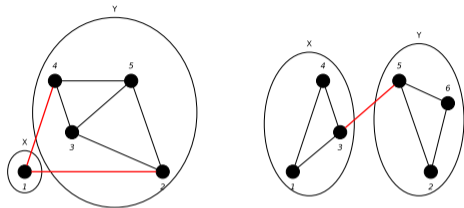


Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo

# Conexidade por Arestas

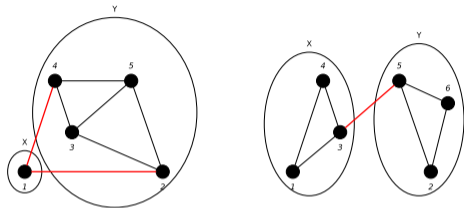


Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

# Conexidade por Arestas



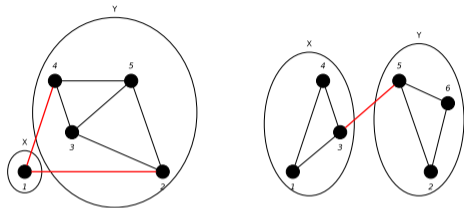
Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

aresta-conexidade de  $G$

# Conexidade por Arestas



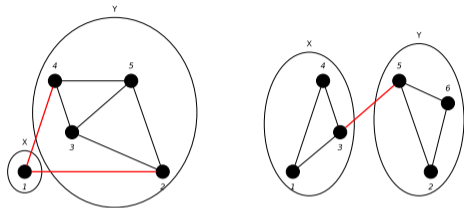
Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

aresta-conexidade de  $G$ :

# Conexidade por Arestas



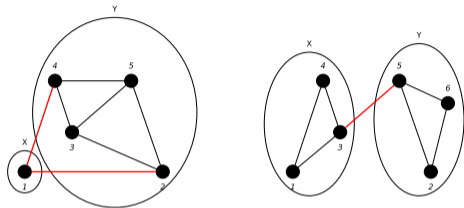
Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

aresta-conexidade de  $G$ :  $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

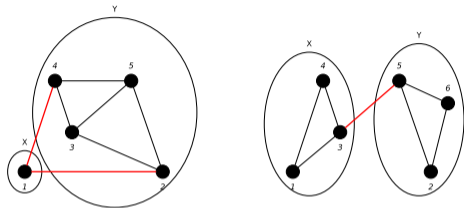
O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

aresta-conexidade de  $G$ :  $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se  $\{a\}$  é corte, dizemos que  $a$  é **aresta de corte**

# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

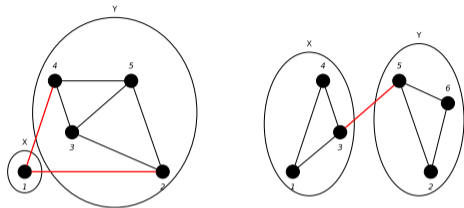
$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

**aresta-conexidade de  $G$ :**  $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se  $\{a\}$  é corte, dizemos que  $a$  é **aresta de corte**

Aresta  $a$  também é chamada de **ponte** de  $G$

# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

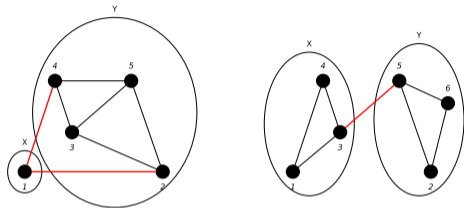
aresta-conexidade de  $G$ :  $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se  $\{a\}$  é corte, dizemos que  $a$  é **aresta de corte**

Aresta  $a$  também é chamada de **ponte** de  $G$

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos de vértices:

# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

**aresta-conexidade de  $G$ :**  $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

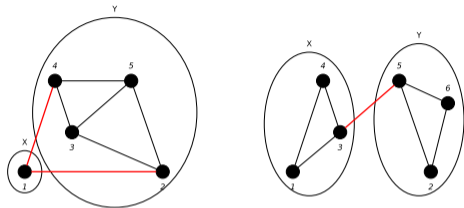
Se  $\{a\}$  é corte, dizemos que  $a$  é **aresta de corte**

Aresta  $a$  também é chamada de **ponte** de  $G$

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos de vértices:

**corte  $K$  separa  $X$  e  $Y$**

# Conexidade por Arestas



Seja  $G$  um grafo conexo não trivial e não completo  
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte  $K$  tal que  $|K| = 1$ ? Não.

$G$  é  $k$ -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho  $< k$ .

**aresta-conexidade de  $G$ :**  $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se  $\{a\}$  é corte, dizemos que  $a$  é **aresta de corte**

Aresta  $a$  também é chamada de **ponte** de  $G$

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos de vértices:

**corte  $K$  separa  $X$  e  $Y$ :**  $X$  e  $Y$  estão em componentes diferentes de  $G - K$

## Teorema 54

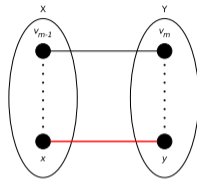
$x$

## Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices

# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

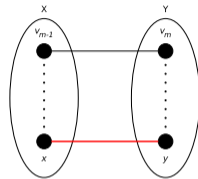


# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$

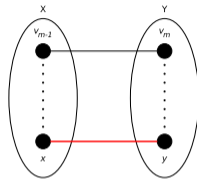


# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$

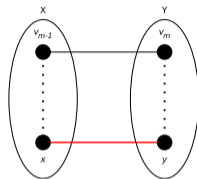


# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

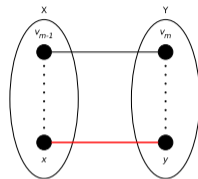
Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$



# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

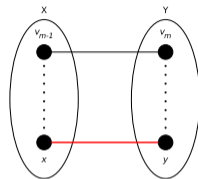


Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$

## Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

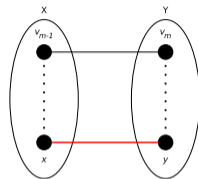


### Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte

## Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

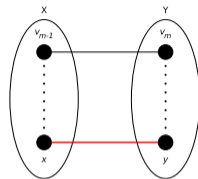


### Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$

## Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte



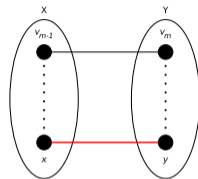
### Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$
  - 3.2  $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$

## Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices

a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

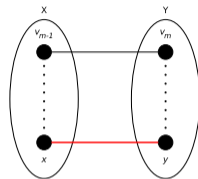


### Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$
  - 3.2  $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$ : caminho em  $G - \partial_G(X)$

# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte

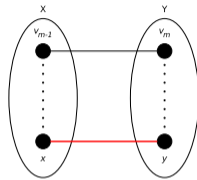


## Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$
  - 3.2  $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$ : caminho em  $G - \partial_G(X)$
  - 3.3  $v_m$  primeiro vértice em  $P$  fora de  $X$

# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte



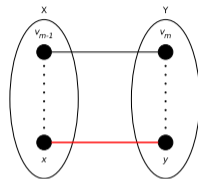
## Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$
  - 3.2  $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$ : caminho em  $G - \partial_G(X)$
  - 3.3  $v_m$  primeiro vértice em  $P$  fora de  $X$

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$$

# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte



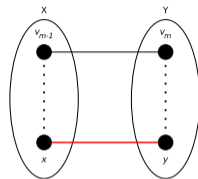
## Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$
  - 3.2  $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$ : caminho em  $G - \partial_G(X)$
  - 3.3  $v_m$  primeiro vértice em  $P$  fora de  $X$
  - 3.4  $\{v_{m-1}, v_m\} \in \partial_G(X)$

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$$

# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte



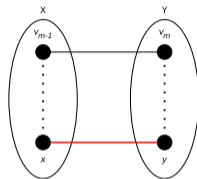
## Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$
  - 3.2  $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$ : caminho em  $G - \partial_G(X)$
  - 3.3  $v_m$  primeiro vértice em  $P$  fora de  $X$
  - 3.4  $\{v_{m-1}, v_m\} \in \partial_G(X)$

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\} \\ (v_{m-1} \in X \text{ e } v_m \notin X)$$

# Teorema 54

$X$ : conjunto de vértices  
a fronteira de  $X$  é vazia ou é corte



## Demonstração.

1.  $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2.  $\{x, y\}$ : aresta em  $\partial_G(X)$ :  $x \in X$  e  $y \notin X$
3. supondo:  $\partial_G(X)$  não é corte
  - 3.1  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente de  $G - \partial_G(X)$
  - 3.2  $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$ : caminho em  $G - \partial_G(X)$
  - 3.3  $v_m$  primeiro vértice em  $P$  fora de  $X$
  - 3.4  $\{v_{m-1}, v_m\} \in \partial_G(X)$
  - 3.5 contradiz  $P$  ser caminho em  $G - \partial_G(X)$

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$$
$$(v_{m-1} \in X \text{ e } v_m \notin X)$$





## Corolário 55

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

( $\Leftarrow$ ) 1.  $h$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

( $\Leftarrow$ ) 1.  $h$ : vértice de  $H$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$
  3. supondo:  $G[V(H) \cup \{v\}]$  é conexo

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$
  3. supondo:  $G[V(H) \cup \{v\}]$  é conexo
    - 3.1 existe caminho de  $h$  a  $v$  em  $G$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$
  3. supondo:  $G[V(H) \cup \{v\}]$  é conexo
    - 3.1 existe caminho de  $h$  a  $v$  em  $G$
    - 3.2 contradiz  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$
  3. supondo:  $G[V(H) \cup \{v\}]$  é conexo
    - 3.1 existe caminho de  $h$  a  $v$  em  $G$
    - 3.2 contradiz  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$  (argumento da prova do Teorema 54)

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$
  3. supondo:  $G[V(H) \cup \{v\}]$  é conexo
    - 3.1 existe caminho de  $h$  a  $v$  em  $G$
    - 3.2 contradiz  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$  (argumento da prova do Teorema 54)
  4. não existe  $v \in V(G) - V(H)$  tal que  $G[V(H) \cup \{v\}]$  seja conexo

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$
  3. supondo:  $G[V(H) \cup \{v\}]$  é conexo
    - 3.1 existe caminho de  $h$  a  $v$  em  $G$
    - 3.2 contradiz  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$  (argumento da prova do Teorema 54)
  4. não existe  $v \in V(G) - V(H)$  tal que  $G[V(H) \cup \{v\}]$  seja conexo
  5.  $H$  é um subgrafo maximal conexo de  $G$

$H$  é componente de  $G$  se e somente se

1.  $H$  é subgrafo conexo de  $G$ , e
2.  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

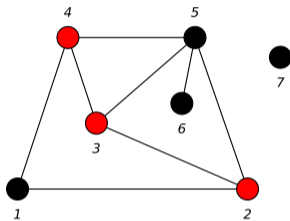
( $\Rightarrow$ ) imediato da definição

- ( $\Leftarrow$ )
1.  $h$ : vértice de  $H$
  2.  $v$ : vértice fora de  $H$
  3. supondo:  $G[V(H) \cup \{v\}]$  é conexo
    - 3.1 existe caminho de  $h$  a  $v$  em  $G$
    - 3.2 contradiz  $\partial_G(V(H)) = \emptyset$  (argumento da prova do Teorema 54)
  4. não existe  $v \in V(G) - V(H)$  tal que  $G[V(H) \cup \{v\}]$  seja conexo
  5.  $H$  é um subgrafo maximal conexo de  $G$
  6.  $H$  é componente de  $G$

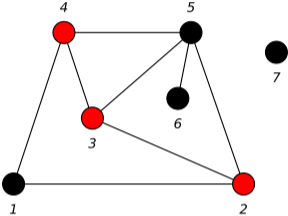


- 1 Árvores e Florestas
- 2 Conectividade por Arestas
- 3 Conectividade por Vértices

# Corte de Vértices

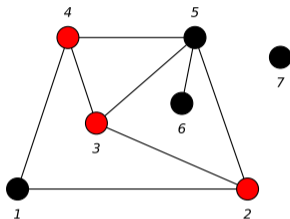


# Corte de Vértices



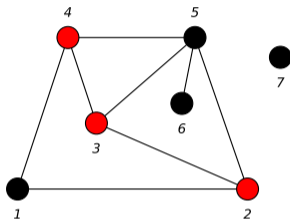
**corte**

# Corte de Vértices



**corte:** conjunto de vértices  $K$

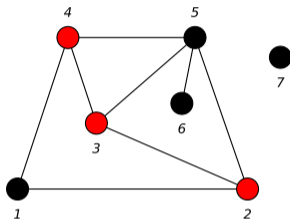
# Corte de Vértices



**corte:** conjunto de vértices  $K$

- remoção desconecta grafo

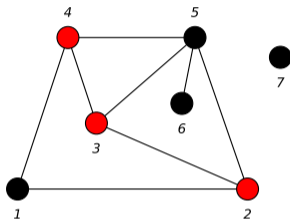
# Corte de Vértices



**corte:** conjunto de vértices  $K$

- remoção desconecta grafo
- remoção aumenta número de componentes

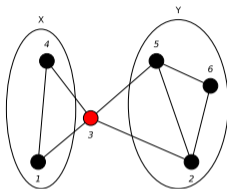
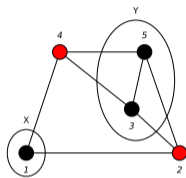
# Corte de Vértices



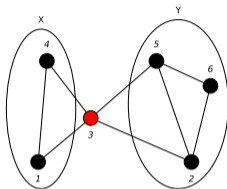
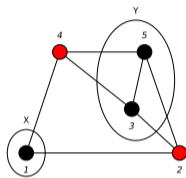
**corte:** conjunto de vértices  $K$

- remoção desconecta grafo
- remoção aumenta número de componentes
- $|\mathcal{C}(G - K)| > |\mathcal{C}(G)|$

# Conexidade por Vértices

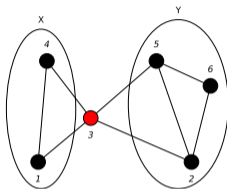
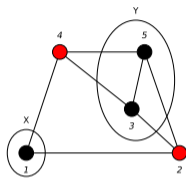


# Conexidade por Vértices



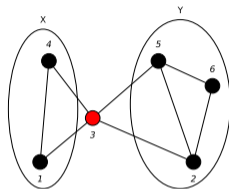
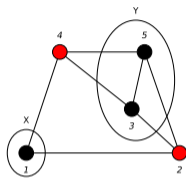
G

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

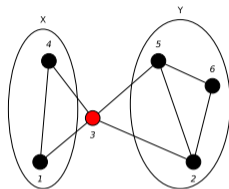
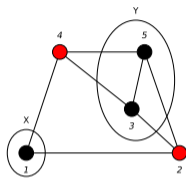
# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

$v$

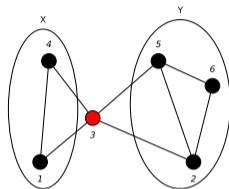
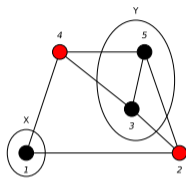
# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

# Conexidade por Vértices

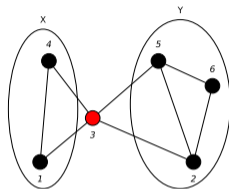
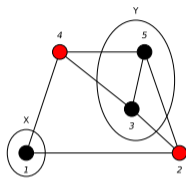


$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

$X, Y$

# Conexidade por Vértices

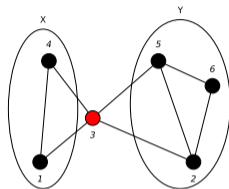
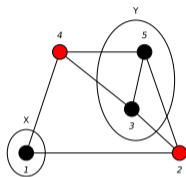


$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

# Conexidade por Vértices



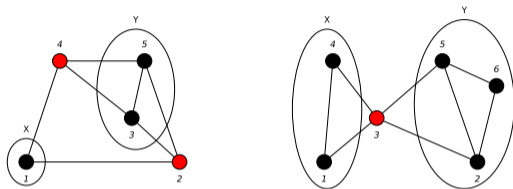
$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -vértice conexo

# Conexidade por Vértices



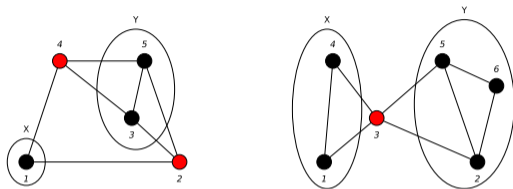
$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

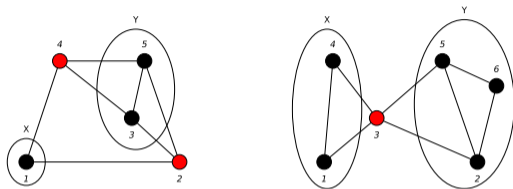
$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

$v$  é **vértice de corte**

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

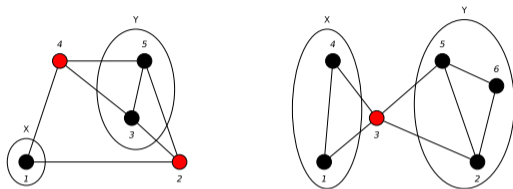
$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

$v$  é **vértice de corte**:  $\{v\}$  é corte

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

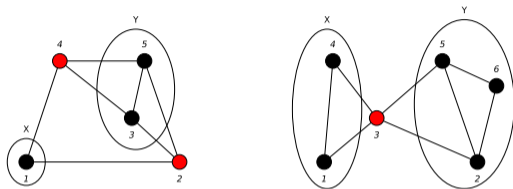
$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

$v$  é **vértice de corte**:  $\{v\}$  é corte: **articulação**

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

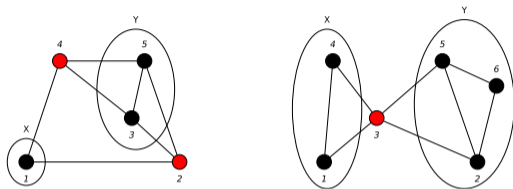
$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

$v$  é **vértice de corte**:  $\{v\}$  é corte: **articulação**

**bloco**

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

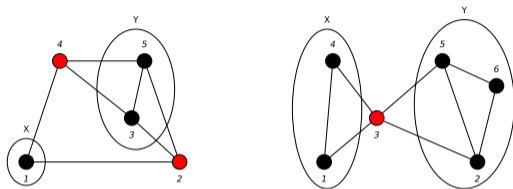
$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

$v$  é **vértice de corte**:  $\{v\}$  é corte: **articulação**

**bloco**: subgrafo maximal sem vértices de corte

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

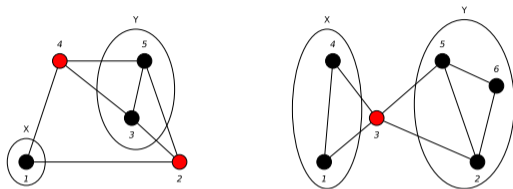
$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

$v$  é **vértice de corte**:  $\{v\}$  é corte: **articulação**

**bloco**: subgrafo maximal sem vértices de corte

**corte  $K$  separa  $X$  e  $Y$**

# Conexidade por Vértices



$G$ : grafo conexo não trivial

$v$ : vértice

$X, Y$ : conjuntos de vértices

$G$  é  $k$ -**vértice conexo**: não tem corte de vértices de tamanho  $< k$

$v$  é **vértice de corte**:  $\{v\}$  é corte: **articulação**

**bloco**: subgrafo maximal sem vértices de corte

**corte  $K$  separa  $X$  e  $Y$** :  $X$  e  $Y$  estão em componentes diferentes de  $G - K$

**vértice–conexidade** de  $G$

**vértice–conexidade** de  $G$ : tamanho do menor corte de vértices de  $G$

**vértice–conexidade** de  $G$ : tamanho do menor corte de vértices de  $G$

$$\kappa(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de vértices de tamanho } k\}$$

**vértice–conexidade** de  $G$ : tamanho do menor corte de vértices de  $G$

$$\kappa(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de vértices de tamanho } k\}$$

$G$  completo

**vértice–conexidade** de  $G$ : tamanho do menor corte de vértices de  $G$

$$\kappa(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de vértices de tamanho } k\}$$

$$G \text{ completo: } \kappa(G) := |V(G)| - 1$$