

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 11: Grafos Direcionados e Ponderados

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva
Nicollas Sdroievski

Departamento de Informática da UFPR

2026 - Primeiro semestre

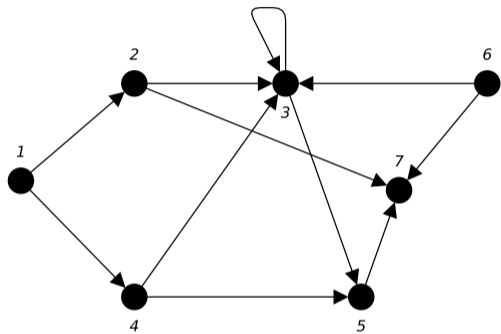
Aula de hoje

- 1 Grafos Direcionados
- 2 Passeios Direcionados
- 3 Arborescências
- 4 Grafos ponderados (e outros tipos)

- 1 Grafos Direcionados
- 2 Passeios Direcionados
- 3 Arborescências
- 4 Grafos ponderados (e outros tipos)

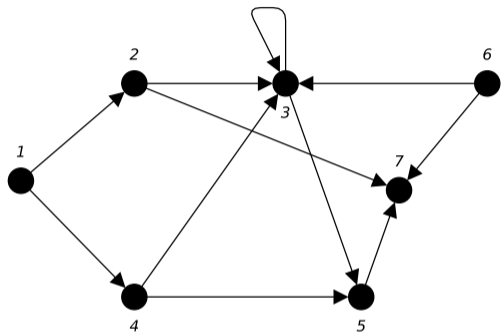
Definição

Definição



grafo direcionado G : par $(V(G), A(G))$

Definição

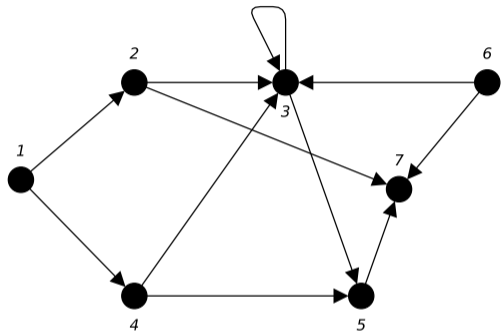


grafo direcionado G : par $(V(G), A(G))$

$V(G)$: conjunto finito

(**vértices**)

Definição



grafo direcionado G : par $(V(G), A(G))$

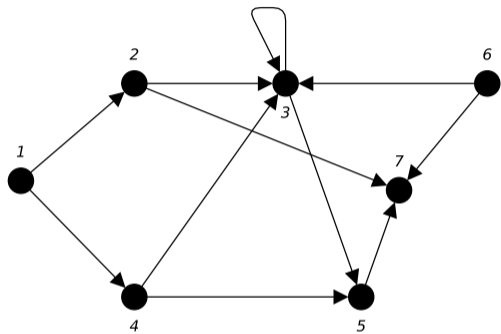
$V(G)$: conjunto finito

(**vértices**)

$A(G)$: $\subseteq V(G) \times V(G)$

(**arcos**)

Definição



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

grafo direcionado G : par $(V(G), A(G))$

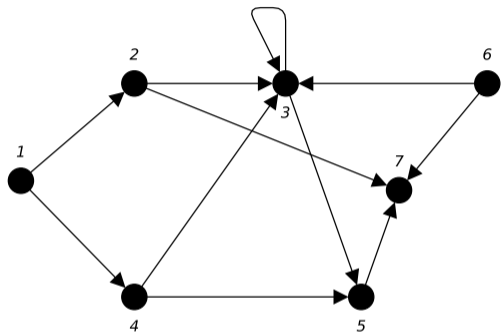
$V(G)$: conjunto finito

(**vértices**)

$A(G)$: $\subseteq V(G) \times V(G)$

(**arcos**)

Definição



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 7), (6, 3), (6, 7)\}$$

grafo direcionado G : par $(V(G), A(G))$

$V(G)$: conjunto finito

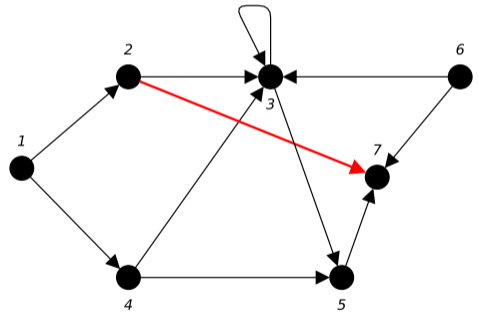
(**vértices**)

$A(G)$: $\subseteq V(G) \times V(G)$

(**arcos**)

Arcos e Vizinhos

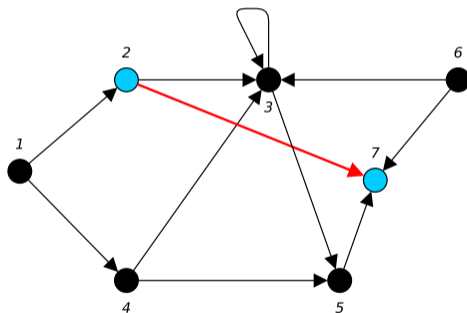
$a = (u, v)$: arco de G



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

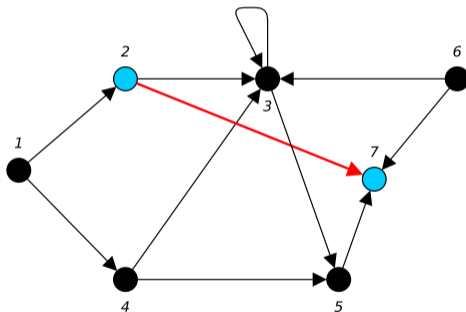
- o arco a está **direcionado de u para v**



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

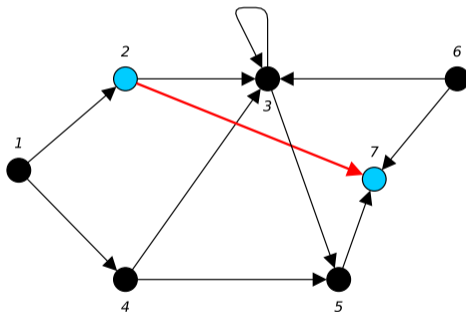
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

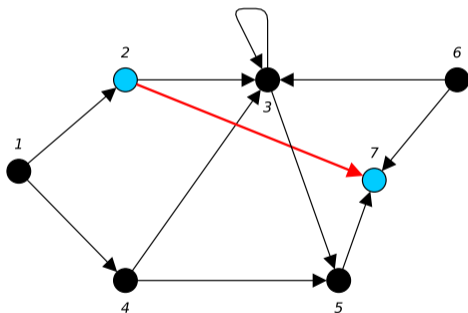
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

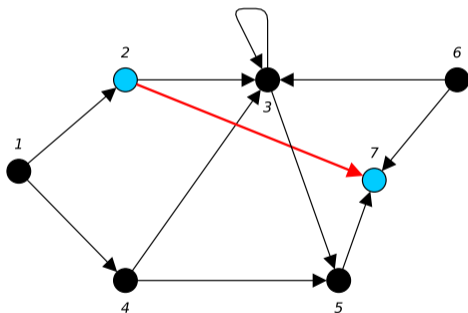
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

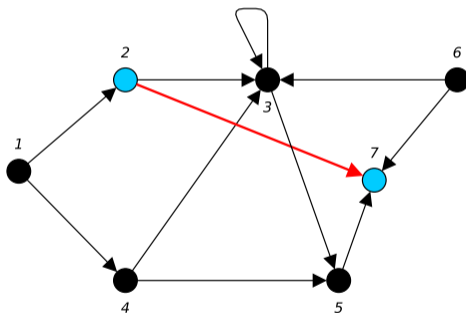
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

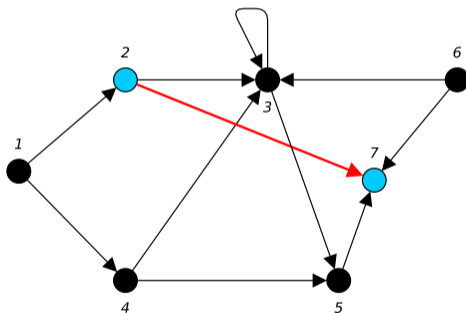
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

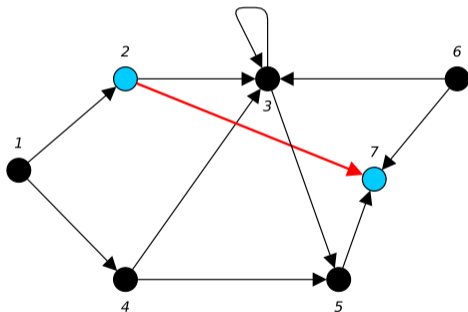
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

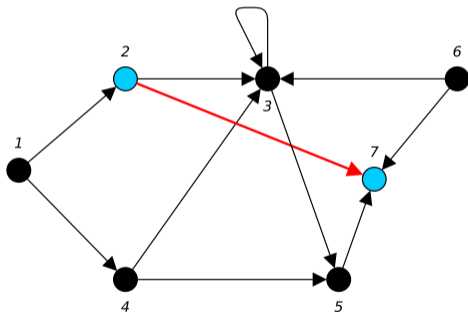
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

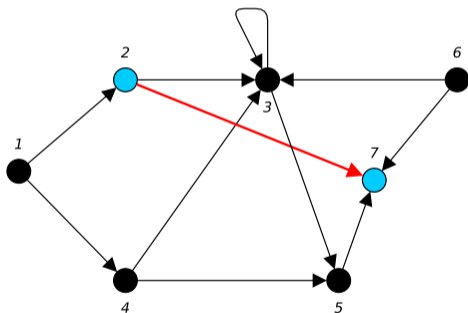
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

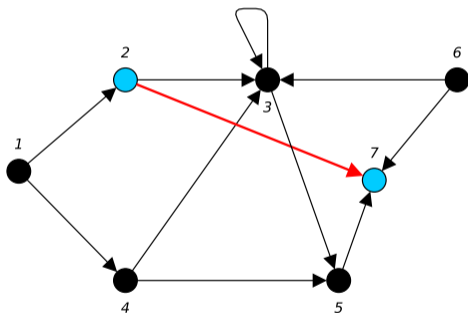
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v
- u e v são **vizinhos**



Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

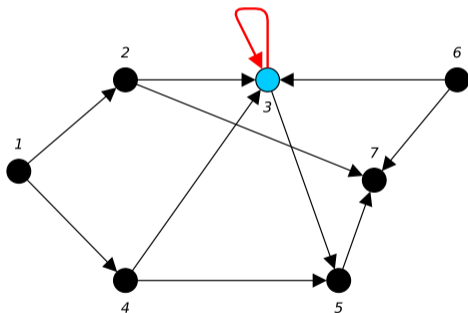
- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v
- u e v são **vizinhos (adjacentes)**



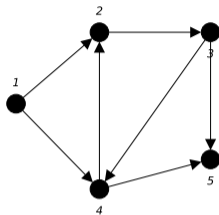
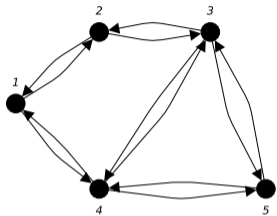
Arcos e Vizinhos

$a = (u, v)$: arco de G

- o arco a está **direcionado de u para v**
- o arco a é um arco de u para v
- o arco a **incide** em u e v
- o vértice u é a **origem** do arco a
- o vértice v é o **destino** do arco a
- o arco a **sai** do vértice u
- o arco a **entra** no vértice v
- v é **vizinho de saída** de u
- u é **vizinho de entrada** de v
- u e v são **vizinhos (adjacentes)**
- o arco a é um **laço** se $u = v$

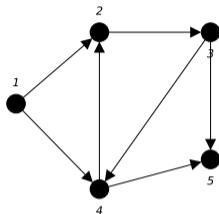
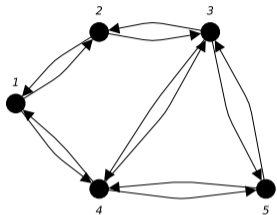


Simetria



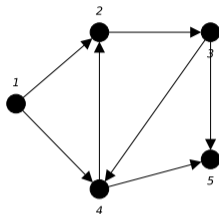
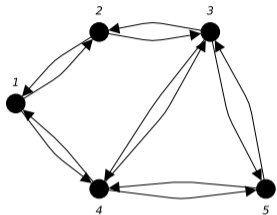
G é **simétrico**:

Simetria



G é **simétrico**: todo arco tem “retorno”

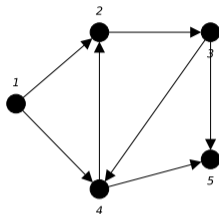
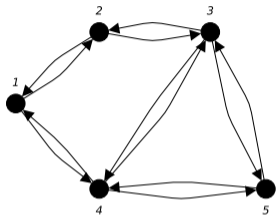
Simetria



G é **simétrico**: todo arco tem “retorno”

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

Simetria

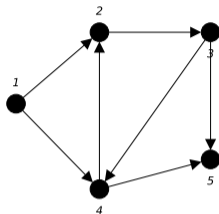
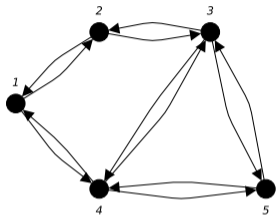


G é **simétrico**: todo arco tem “retorno”

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

G é **anti-simétrico**:

Simetria

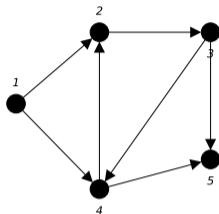
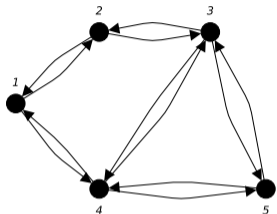


G é **simétrico**: todo arco tem “retorno”

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

G é **anti-simétrico**: nenhum arco tem “retorno”

Simetria



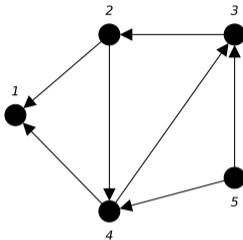
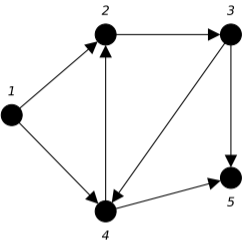
G é **simétrico**: todo arco tem “retorno”

$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \in A(G)$$

G é **anti-simétrico**: nenhum arco tem “retorno”

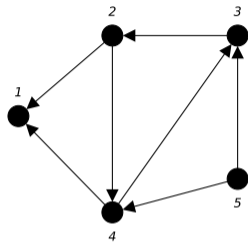
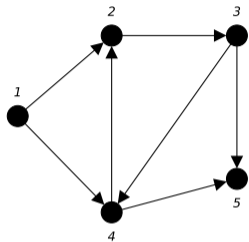
$$(u, v) \in A(G) \implies (v, u) \notin A(G)$$

Grafo Transposto



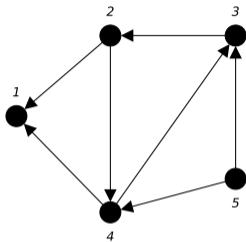
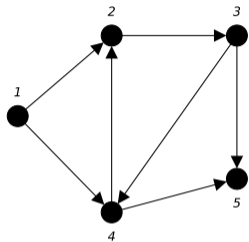
G^T :

Grafo Transposto



G^T : **grafo transposto** de G

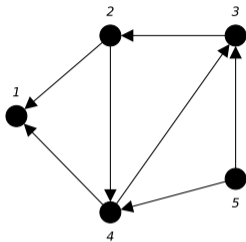
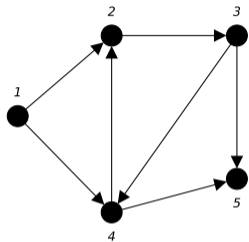
Grafo Transposto



G^T : **grafo transposto** de G

cada arco é trocado por seu "retorno"

Grafo Transposto

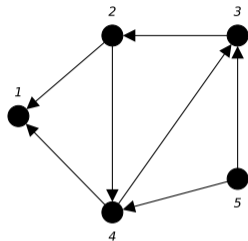
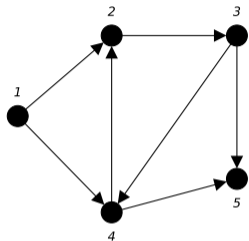


G^T : **grafo transposto** de G

cada arco é trocado por seu “retorno”

$$V(G^T) = V(G)$$

Grafo Transposto



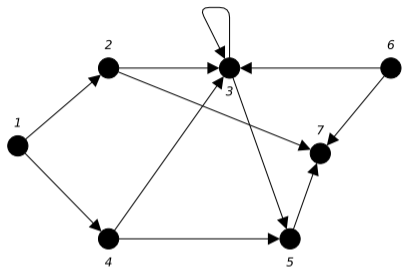
G^T : **grafo transposto** de G

cada arco é trocado por seu “retorno”

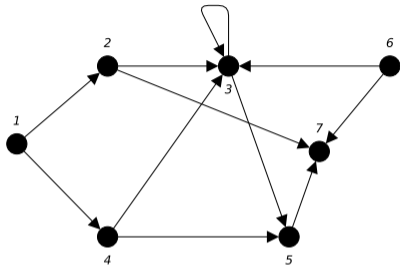
$$V(G^T) = V(G)$$

$$A(G^T) = \{(v, u) \mid (u, v) \in A(G)\}$$

Vizinhanças

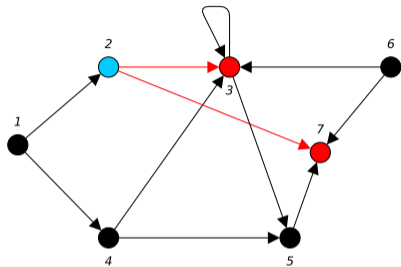


Vizinhanças



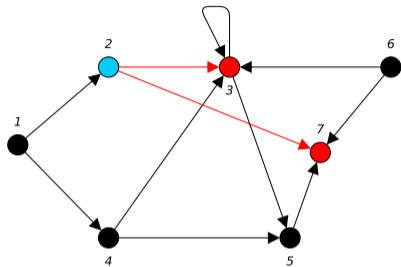
vizinhança de saída:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

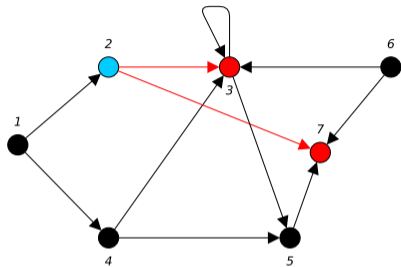
Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

Vizinhanças

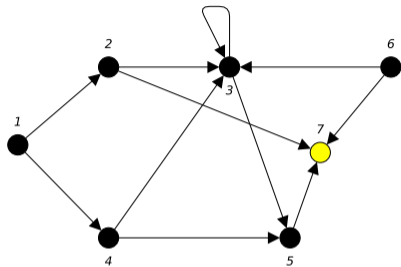


vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro:

Vizinhanças

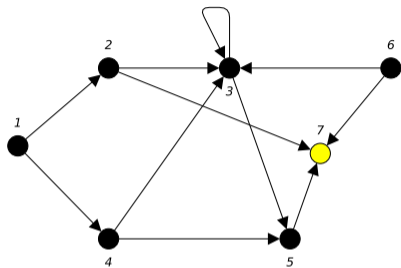


vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

Vizinhanças



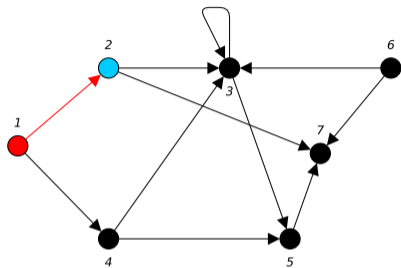
vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada:

Vizinhanças



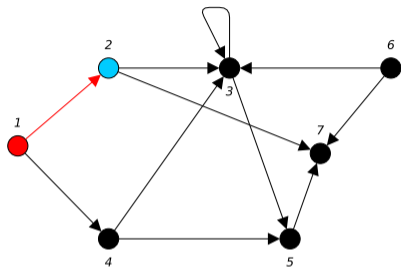
vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

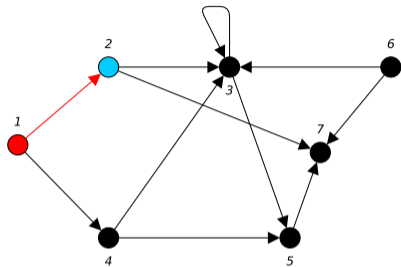
$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$$

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

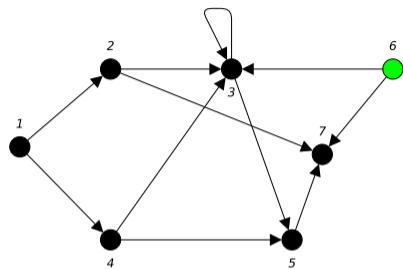
sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$$

fonte:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

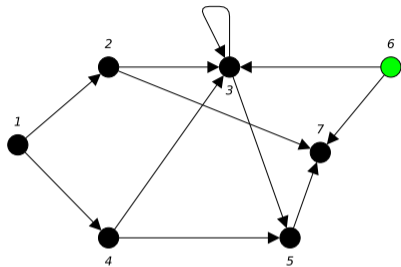
sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$$

fonte: vértice sem vizinhos de entrada

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

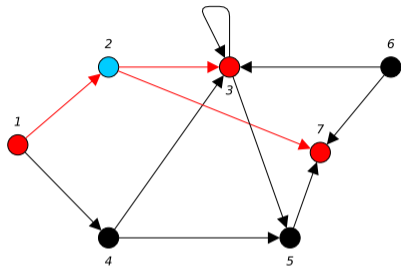
vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$$

fonte: vértice sem vizinhos de entrada

vizinhança:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

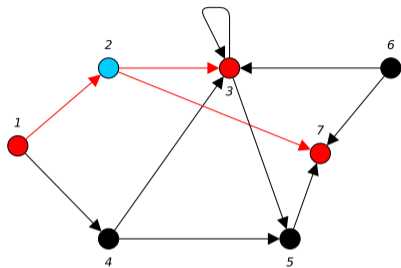
vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$$

fonte: vértice sem vizinhos de entrada

vizinhança: união de ambas:

Vizinhanças



vizinhança de saída: vértices para os quais sai um arco

$$\Gamma_G^+(v) := \{u \in V(G) \mid (v, u) \in A(G)\}$$

sumidouro: vértice sem vizinhos de saída

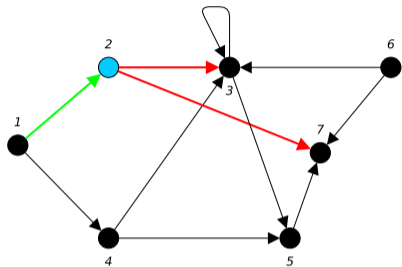
vizinhança de entrada: vértices a partir dos quais entra um arco

$$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V(G) \mid (u, v) \in A(G)\}$$

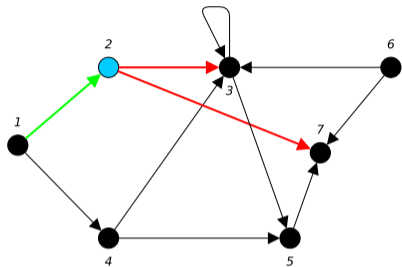
fonte: vértice sem vizinhos de entrada

vizinhança: união de ambas: $\Gamma_G(v) := \Gamma_G^+(v) \cup \Gamma_G^-(v)$

Fronteiras

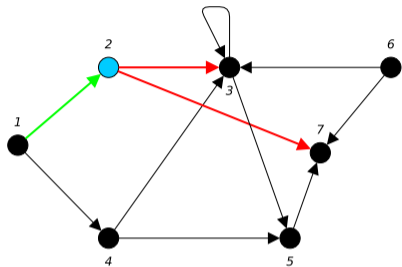


Fronteiras



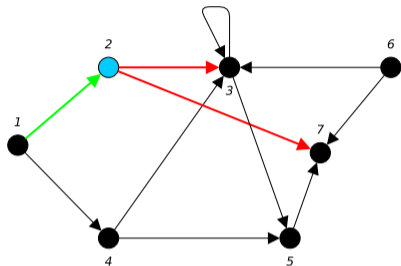
fronteira de saída de v :

Fronteiras



fronteira de saída de v : arcos que saem de v

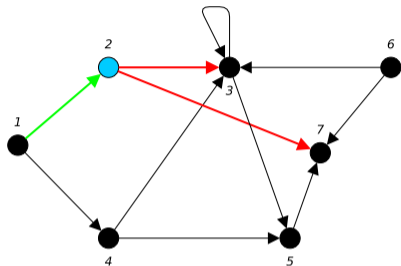
Fronteiras



fronteira de saída de v : arcos que saem de v

$$\partial_G^+(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

Fronteiras

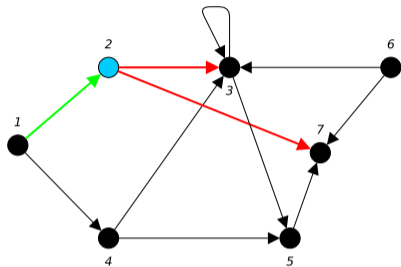


fronteira de saída de v : arcos que saem de v

$$\partial_G^+(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v :

Fronteiras

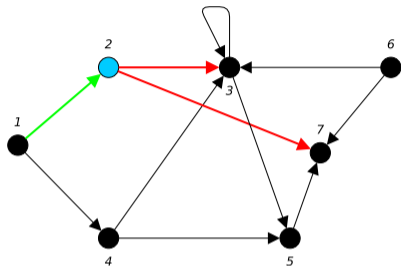


fronteira de saída de v : arcos que saem de v

$$\partial_G^+(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v : arcos que entram em v

Fronteiras



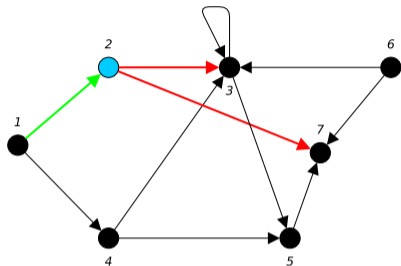
fronteira de saída de v : arcos que saem de v

$$\partial_G^+(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v : arcos que entram em v

$$\partial_G^-(v) := \{(u, v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

Fronteiras



fronteira de saída de v : arcos que saem de v

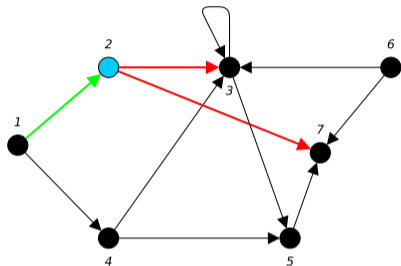
$$\partial_G^+(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v : arcos que entram em v

$$\partial_G^-(v) := \{(u, v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de v :

Fronteiras



fronteira de saída de v : arcos que saem de v

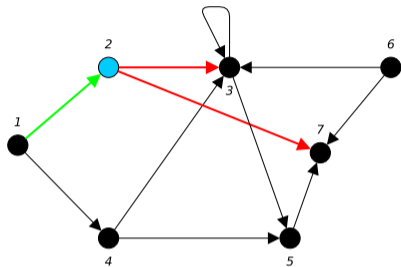
$$\partial_G^+(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v : arcos que entram em v

$$\partial_G^-(v) := \{(u, v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de v : união de ambas

Fronteiras



fronteira de saída de v : arcos que saem de v

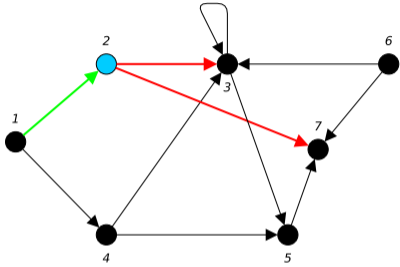
$$\partial_G^+(v) := \{(v, u) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de entrada de v : arcos que entram em v

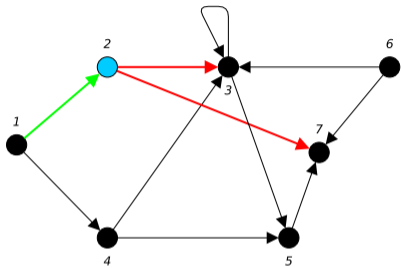
$$\partial_G^-(v) := \{(u, v) \in A(G) \mid u \in V(G)\}$$

fronteira de v : união de ambas: $\partial_G(v) = \partial_G^+(v) \cup \partial_G^-(v)$

Grau

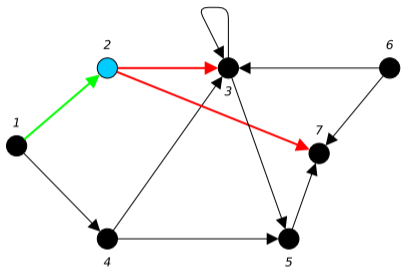


Grau



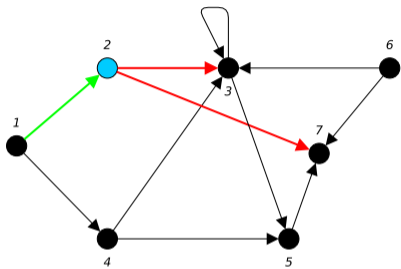
grau de saída de v :

Grau



grau de saída de v : número de arcos que saem de v

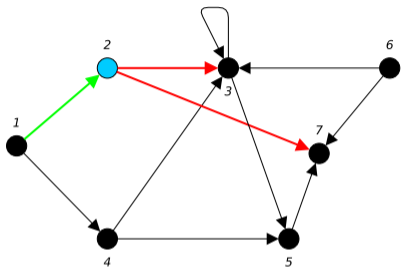
Grau



$$\delta_G^+(v) = 2$$

grau de saída de v : número de arcos que saem de v : $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

Grau

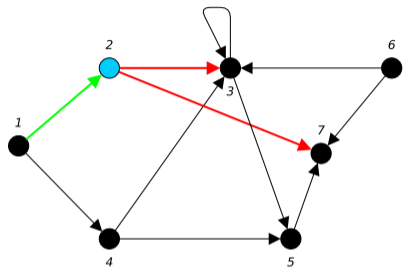


$$\delta_G^+(v) = 2$$

grau de saída de v : número de arcos que saem de v : $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

grau de entrada de v :

Grau

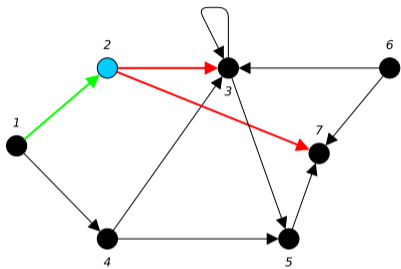


$$\delta_G^+(v) = 2$$

grau de saída de v : número de arcos que saem de v : $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

grau de entrada de v : número de arcos que entram de v

Grau

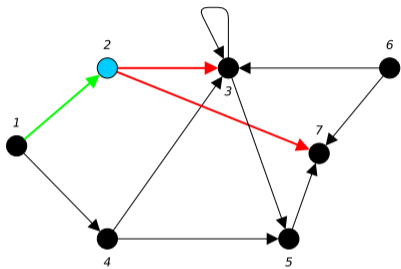


$$\delta_G^+(v) = 2$$
$$\delta_G^-(v) = 1$$

grau de saída de v : número de arcos que saem de v : $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

grau de entrada de v : número de arcos que entram de v : $\delta_G^-(v) := |\partial_G^-(v)|$

Grau



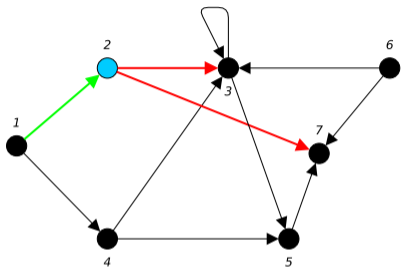
$$\delta_G^+(v) = 2$$
$$\delta_G^-(v) = 1$$

grau de saída de v : número de arcos que saem de v : $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

grau de entrada de v : número de arcos que entram de v : $\delta_G^-(v) := |\partial_G^-(v)|$

grau de v :

Grau



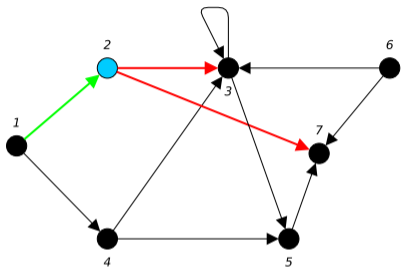
$$\delta_G^+(v) = 2$$
$$\delta_G^-(v) = 1$$

grau de saída de v : número de arcos que saem de v : $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

grau de entrada de v : número de arcos que entram de v : $\delta_G^-(v) := |\partial_G^-(v)|$

grau de v : soma de ambos

Grau



$$\delta_G^+(v) = 2$$

$$\delta_G^-(v) = 1$$

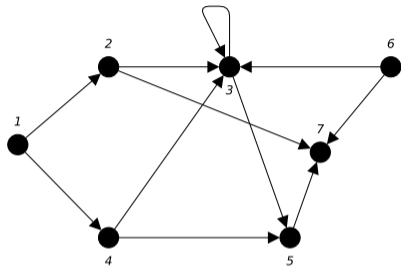
$$\delta_G(v) = 3$$

grau de saída de v : número de arcos que saem de v : $\delta_G^+(v) := |\partial_G^+(v)|$

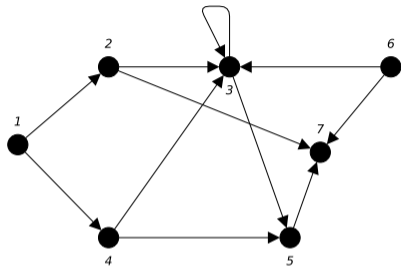
grau de entrada de v : número de arcos que entram de v : $\delta_G^-(v) := |\partial_G^-(v)|$

grau de v : soma de ambos: $\delta_G(v) = \delta_G^+(v) + \delta_G^-(v)$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado

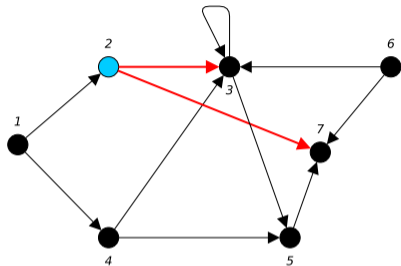


Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



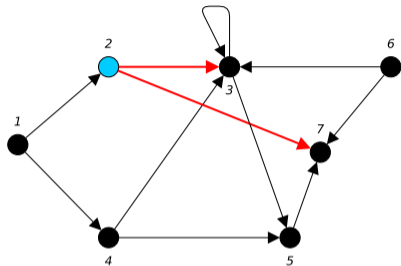
grau máximo de saída:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

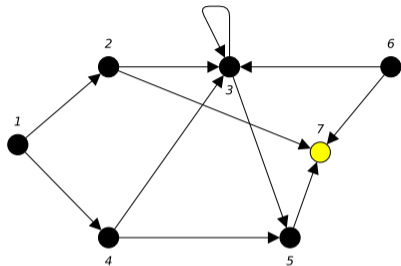
Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída:

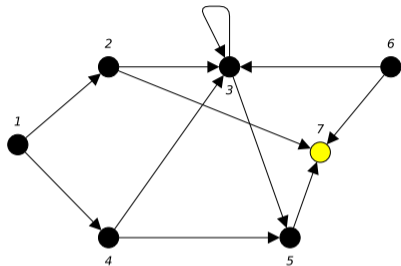
Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado

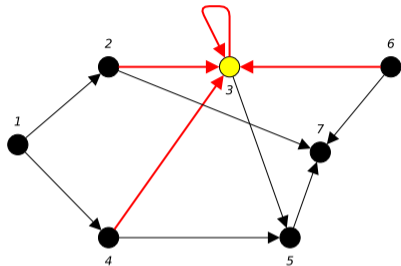


grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo de entrada:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado

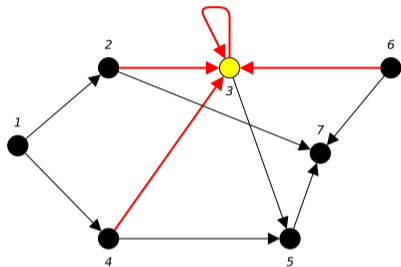


grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



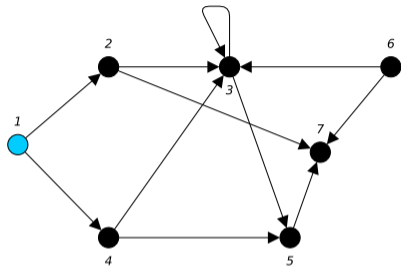
grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de entrada:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



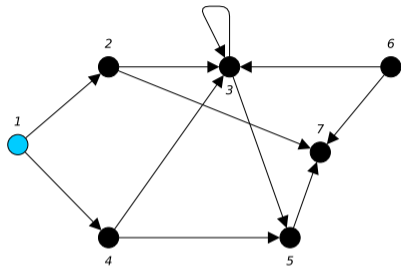
grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

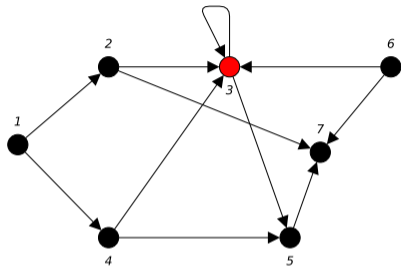
grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

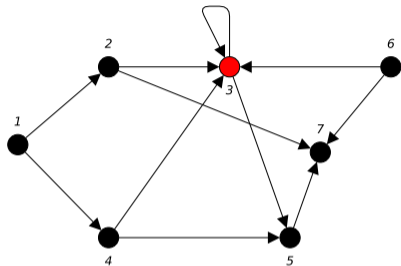
grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo: $\Delta(G) = \max \{ \delta_G(v) \mid v \in V(G) \}$

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

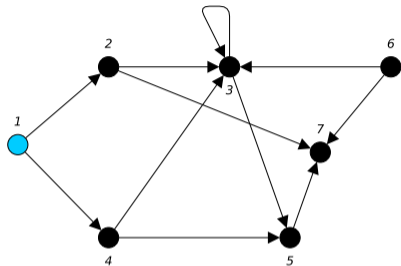
grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo: $\Delta(G) = \max \{ \delta_G(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo:

Graus Máximo e Mínimo de um Grafo Direcionado



grau máximo de saída: $\Delta^+(G) := \max \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de saída: $\delta^+(G) := \min \{ \delta_G^+(v) \mid v \in V(G) \}$

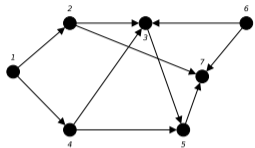
grau máximo de entrada: $\Delta^-(G) := \max \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo de entrada: $\delta^-(G) := \min \{ \delta_G^-(v) \mid v \in V(G) \}$

grau máximo: $\Delta(G) = \max \{ \delta_G(v) \mid v \in V(G) \}$

grau mínimo: $\delta(G) = \min \{ \delta_G(v) \mid v \in V(G) \}$

Matriz de Incidência

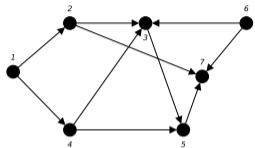


sem laço

$\overline{M}_G =$

--	--	--	--	--	--	--	--

Matriz de Incidência



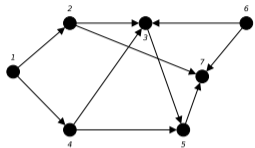
$\overline{M}_G =$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

sem laço

uma linha para cada vértice

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

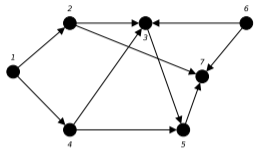
	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

sem laço

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

sem laço

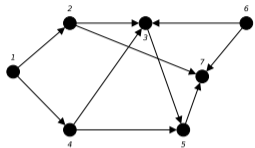
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

na linha v , coluna a tem

1, se a sai de v

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

sem laço

uma linha para cada vértice

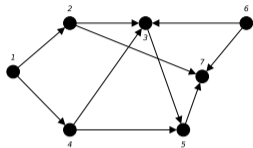
uma coluna para cada arco

na linha v , coluna a tem

1, se a sai de v

-1, se a entra em v

Matriz de Incidência



$\overline{M}_G =$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

sem laço

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

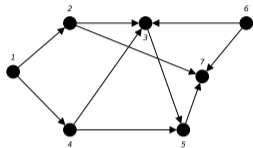
na linha v , coluna a tem

1, se a sai de v

-1, se a entra em v

0, se a não incide em v

Matriz de Incidência


$$\overline{M}_G =$$

	1,2	1,4	2,3	2,7	3,5	4,3	4,5	5,7	6,3	6,7
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-1	0	1	-1	0	0	-1	0
4	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	-1

sem laço

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada arco

na linha v , coluna a tem

1, se a sai de v

-1, se a entra em v

0, se a não incide em v

$$\overline{M}_G[v, a] = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ sai de } v, \\ -1, & \text{se } a \text{ entra em } v, \\ 0, & \text{se } a \text{ não incide em } v. \end{cases}$$

Teorema 64

Versão do Teorema 3 para grafos direcionados

Teorema 64

Versão do Teorema 3 para grafos direcionados

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v)$$

Teorema 64

Versão do Teorema 3 para grafos direcionados

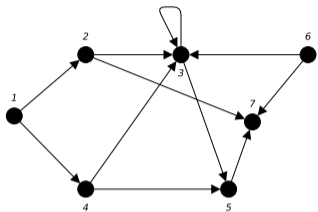
$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v)$$

Demonstração.

Exercício 93



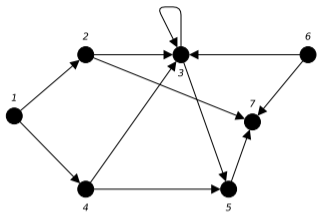
Matriz de Adjacência



$M_G =$



Matriz de Adjacência

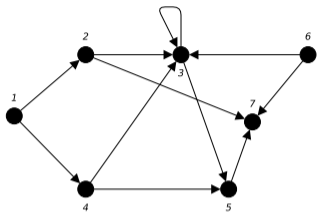


uma linha para cada vértice

$M_G =$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Matriz de Adjacência

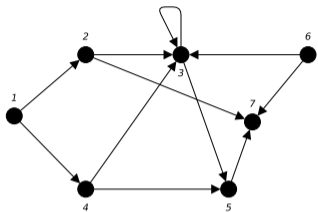


uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice

$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Matriz de Adjacência

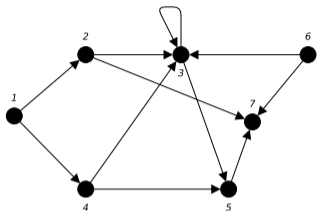


$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice
na linha u , coluna v tem
1

Matriz de Adjacência


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

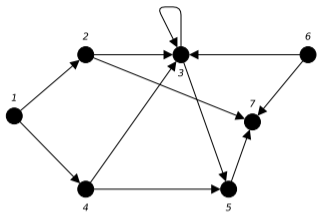
uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u é vizinho de entrada de v

Matriz de Adjacência



$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice

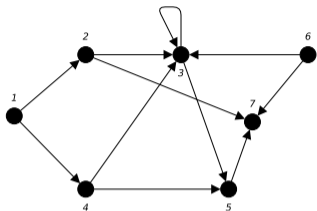
uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u é vizinho de entrada de v

0

Matriz de Adjacência



$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice

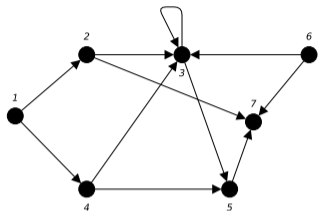
uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u é vizinho de entrada de v

0, caso contrário

Matriz de Adjacência


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

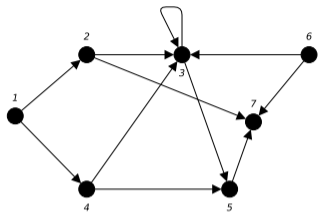
na linha u , coluna v tem

1, se u é vizinho de entrada de v

0, caso contrário

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 1, & \text{se } (u, v) \in A(G), \\ 0, & \text{se } (u, v) \notin A(G). \end{cases}$$

Matriz de Adjacência


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

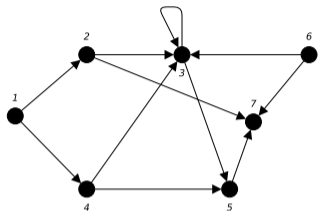
1, se u é vizinho de entrada de v

0, caso contrário

- pode ter 1s na diagonal principal

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 1, & \text{se } (u, v) \in A(G), \\ 0, & \text{se } (u, v) \notin A(G). \end{cases}$$

Matriz de Adjacência


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

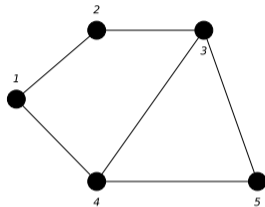
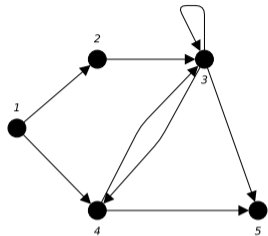
1, se u é vizinho de entrada de v

0, caso contrário

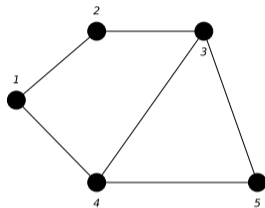
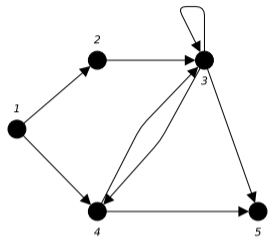
- pode ter 1s na diagonal principal
- só é simétrica se G for simétrico

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 1, & \text{se } (u, v) \in A(G), \\ 0, & \text{se } (u, v) \notin A(G). \end{cases}$$

Grafo Subjacente

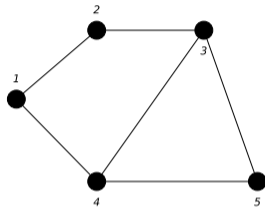
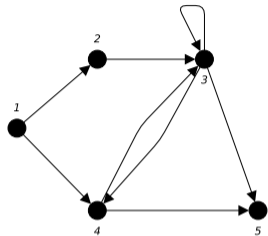


Grafo Subjacente



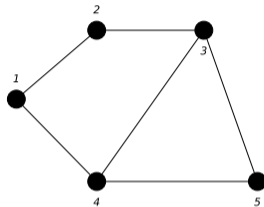
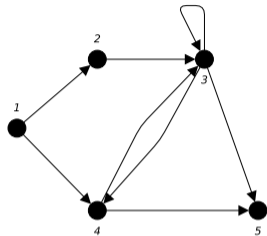
$S(G)$

Grafo Subjacente



$S(G)$: grafo não-direcionado

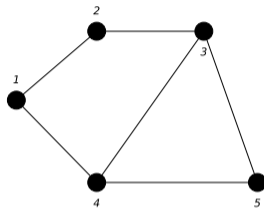
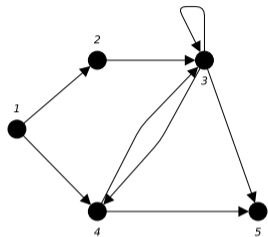
Grafo Subjacente



$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices

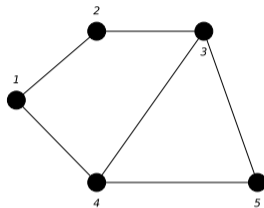
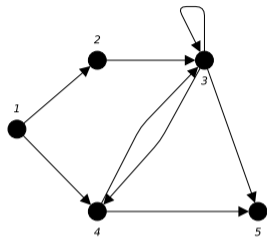
Grafo Subjacente



$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$

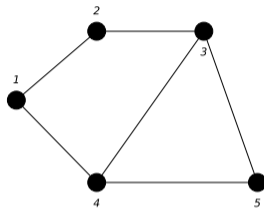
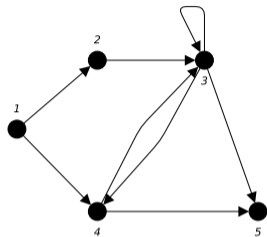
Grafo Subjacente



$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos

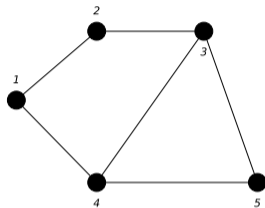
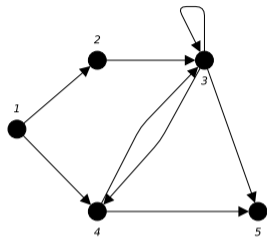
Grafo Subjacente



$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

Grafo Subjacente

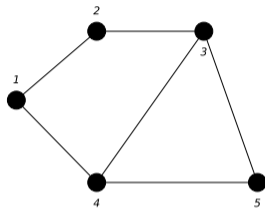
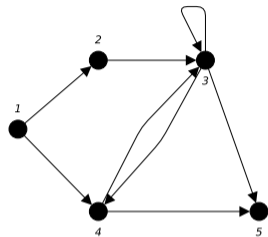


$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

Convenção/abuso de linguagem

Grafo Subjacente



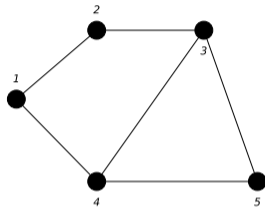
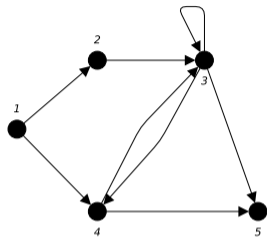
$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

Convenção/abuso de linguagem:

“arestas de G ”

Grafo Subjacente



$S(G)$: grafo não-direcionado

- mesmos vértices: $V(S(G)) = V(G)$
- arestas no lugar dos arcos: $E(S(G)) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(G)\}$

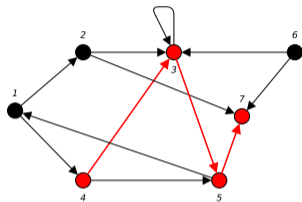
Convenção/abuso de linguagem:

“arestas de G ”: $E(G) := E(S(G))$

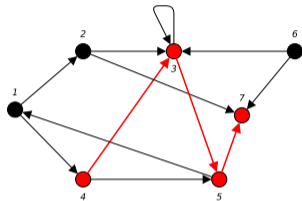
Aula de hoje

- 1 Grafos Direcionados
- 2 Passeios Direcionados**
- 3 Arborescências
- 4 Grafos ponderados (e outros tipos)

Passeio Direcionado

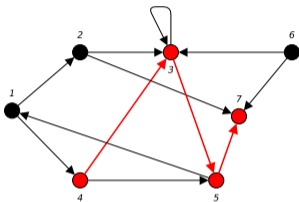


Passeio Direcionado



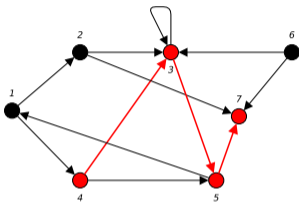
passeio direcionado

Passeio Direcionado



passeio direcionado: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices

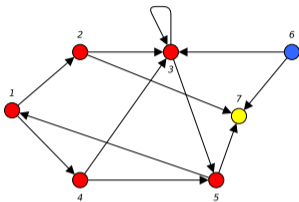
Passeio Direcionado



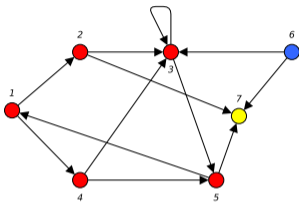
passeio direcionado: sequência (v_0, \dots, v_n) de vértices, satisfazendo

$(v_{i-1}, v_i) \in A(G)$, para todo $1 \leq i \leq n$

Conexidade Forte

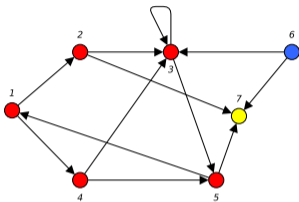


Conexidade Forte



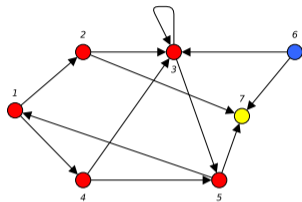
G é fortemente conexo

Conexidade Forte



G é **fortemente conexo**: existe passeio direcionado de qualquer vértice a qualquer outro

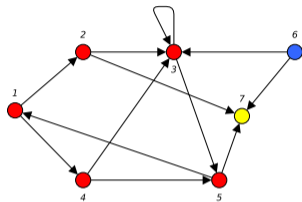
Conexidade Forte



G é **fortemente conexo**: existe passeio direcionado de qualquer vértice a qualquer outro

componente forte

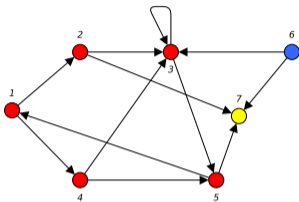
Conexidade Forte



G é **fortemente conexo**: existe passeio direcionado de qualquer vértice a qualquer outro

componente forte: subgrafo fortemente conexo maximal

Conexidade Forte

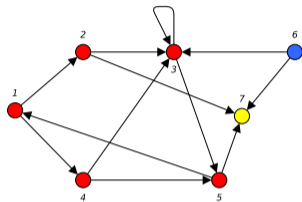


G é **fortemente conexo**: existe passeio direcionado de qualquer vértice a qualquer outro

componente forte: subgrafo fortemente conexo maximal

$\mathcal{C}(G)$

Conexidade Forte

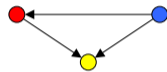
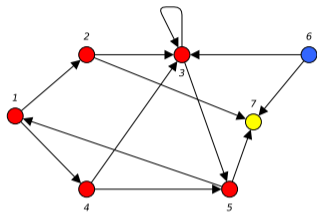


G é **fortemente conexo**: existe passeio direcionado de qualquer vértice a qualquer outro

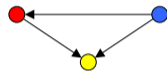
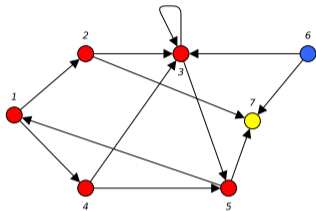
componente forte: subgrafo fortemente conexo maximal

$\mathcal{C}(G)$: conjunto dos componentes fortes de G

Grafo Condensado

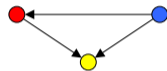
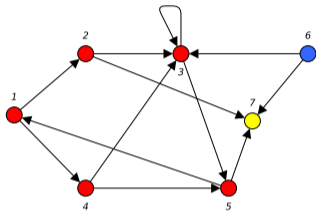


Grafo Condensado



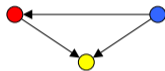
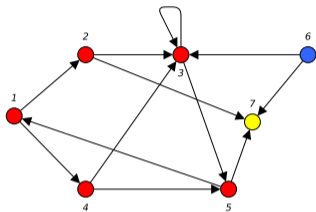
grafo condensado de G

Grafo Condensado



grafo condensado de G : $C(G)$

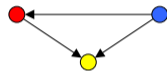
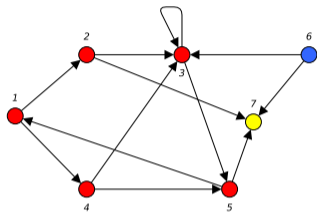
Grafo Condensado



grafo condensado de G : $C(G)$

$V(C(G))$

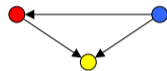
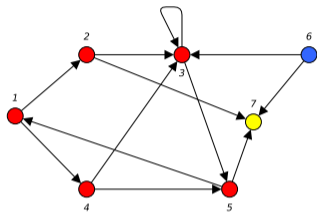
Grafo Condensado



grafo condensado de G : $C(G)$

$V(C(G))$: componentes fortes de G ($\mathcal{C}(G)$)

Grafo Condensado

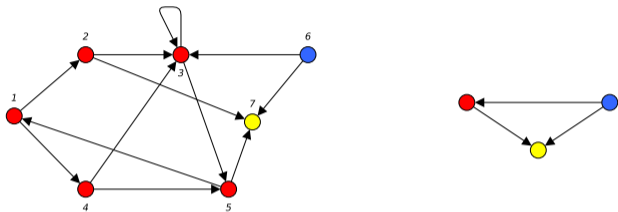


grafo condensado de G : $C(G)$

$V(C(G))$: componentes fortes de G ($\mathcal{C}(G)$)

$A(C(G))$

Grafo Condensado



grafo condensado de G : $C(G)$

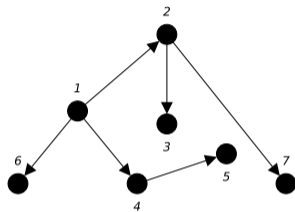
$V(C(G))$: componentes fortes de G ($\mathcal{C}(G)$)

$A(C(G))$: $\{(X, Y) \mid \text{existe arco de } V(X) \text{ para } V(Y) \text{ em } G\}$

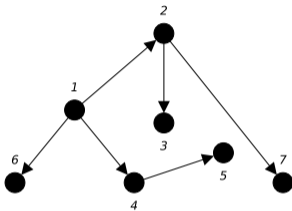
Aula de hoje

- 1 Grafos Direcionados
- 2 Passeios Direcionados
- 3 Arborescências**
- 4 Grafos ponderados (e outros tipos)

Definição

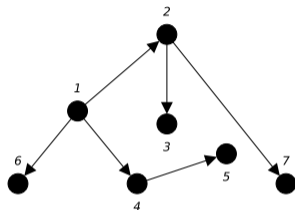


Definição



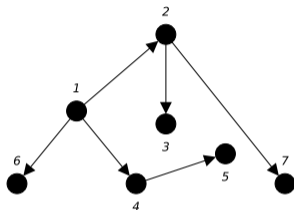
arborescência

Definição



arborescência: grafo direcionado T

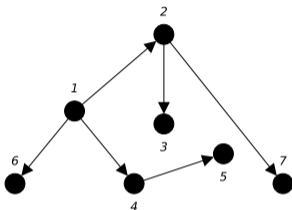
Definição



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo

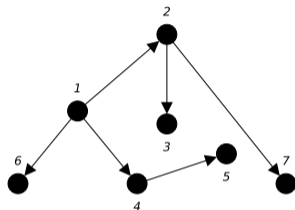
Definição



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte

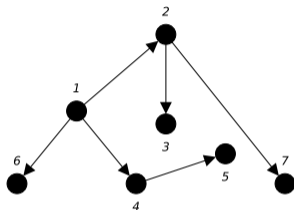
Definição



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte e grau de entrada 1 nos demais vértices

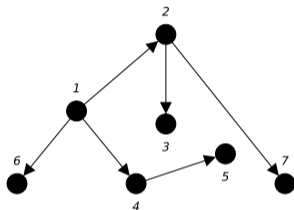
Definição



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte e grau de entrada 1 nos demais vértices
- fonte

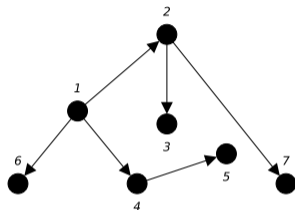
Definição



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte e grau de entrada 1 nos demais vértices
- fonte: chamada de **raiz** da arborescência

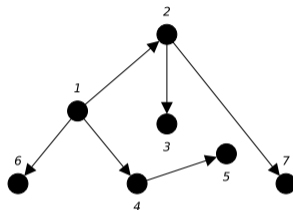
Definição



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte e grau de entrada 1 nos demais vértices
- fonte: chamada de **raiz** da arborescência : $r(T)$

Definição



arborescência: grafo direcionado T

- grafo subjacente conexo
- uma única fonte e grau de entrada 1 nos demais vértices
- fonte: chamada de **raiz** da arborescência : $r(T)$

Teorema 70

Teorema 70

O grafo subjacente de uma árvore é uma árvore.

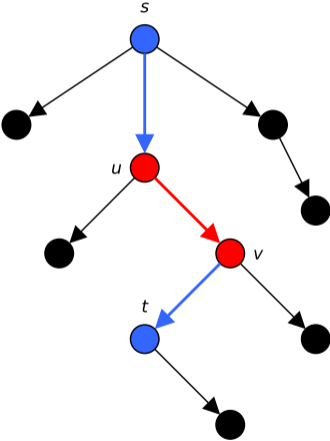
O grafo subjacente de uma árvore é uma árvore.

Demonstração.

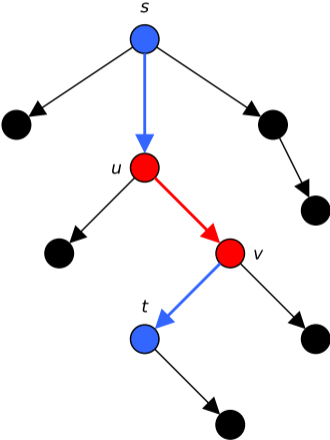
Exercício 12



pais, filhos, ancestrais e descendentes

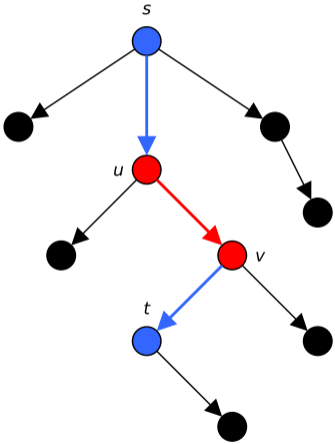


pais, filhos, ancestrais e descendentes



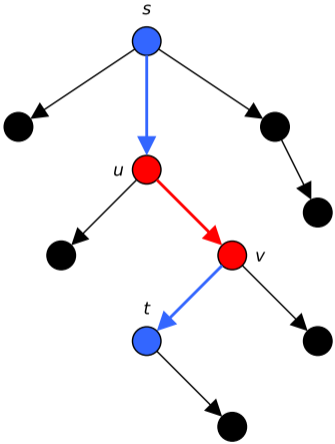
T

pais, filhos, ancestrais e descendentes



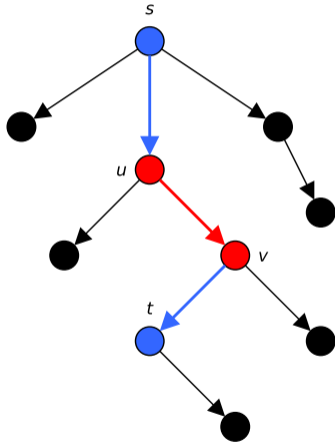
T : arborescência

pais, filhos, ancestrais e descendentes



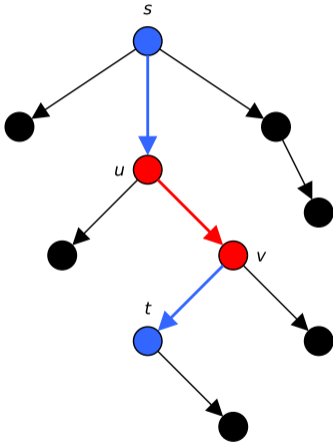
T : arborescência
 (u, v)

pais, filhos, ancestrais e descendentes



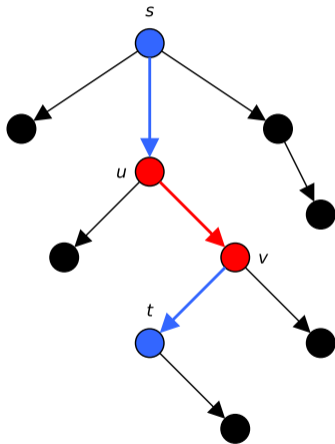
T : arborescência
 (u, v) : arco em T

pais, filhos, ancestrais e descendentes



T : arborescência
 (u, v) : arco em T
 (s, \dots, t)

pais, filhos, ancestrais e descendentes

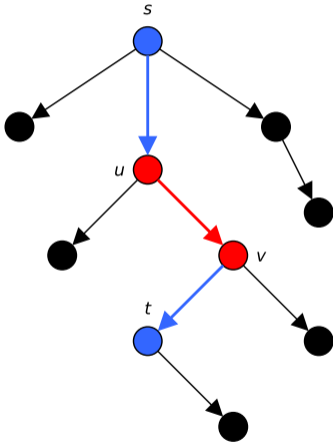


T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

pais, filhos, ancestrais e descendentes



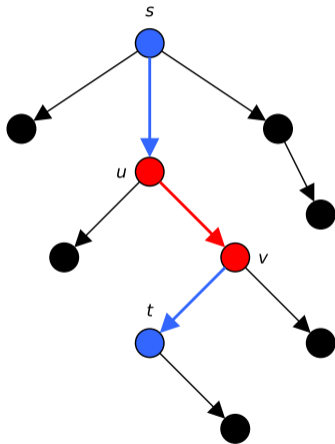
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

• u é **pai** de v

pais, filhos, ancestrais e descendentes



T : arborescência

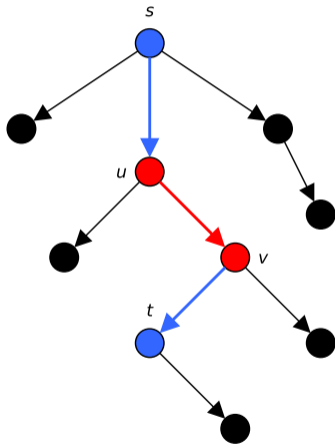
(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

• u é **pai** de v

• v é **filho** de u

pais, filhos, ancestrais e descendentes



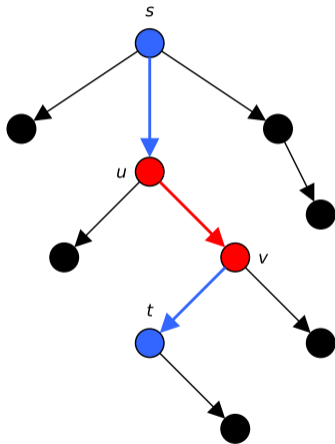
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t

pais, filhos, ancestrais e descendentes



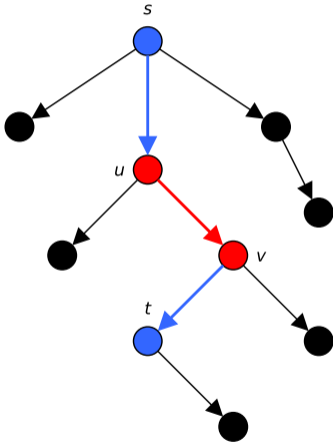
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$

pais, filhos, ancestrais e descendentes



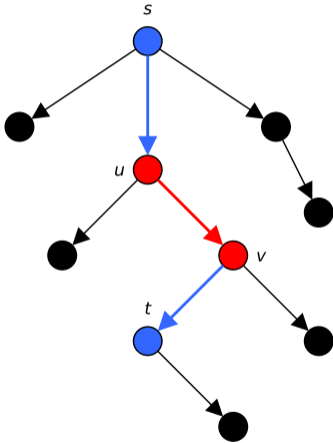
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s

pais, filhos, ancestrais e descendentes



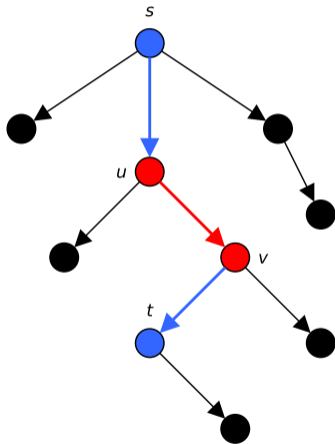
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t

pais, filhos, ancestrais e descendentes



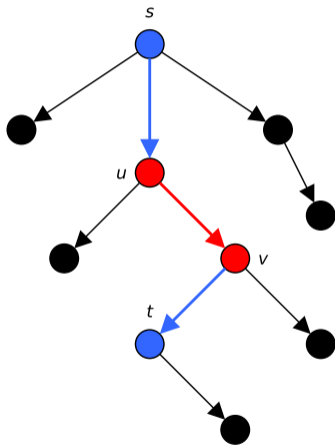
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$

pais, filhos, ancestrais e descendentes



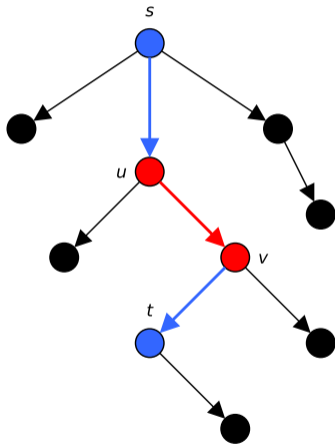
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$

pais, filhos, ancestrais e descendentes



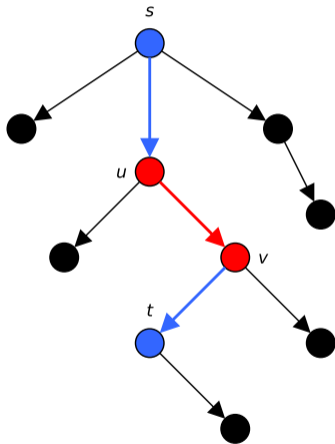
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$
- t **descendente próprio** de s

pais, filhos, ancestrais e descendentes



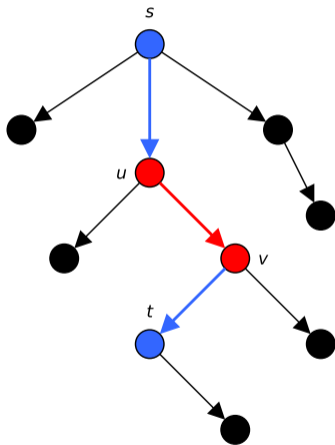
T : arborescência

(u, v) : arco em T

(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$
- t **descendente próprio** de s
- **folha**

pais, filhos, ancestrais e descendentes



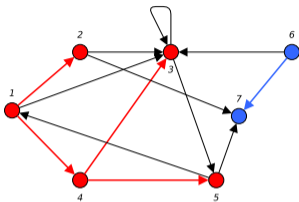
T : arborescência

(u, v) : arco em T

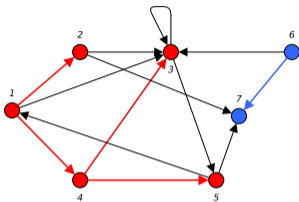
(s, \dots, t) : caminho direcionado em T

- u é **pai** de v
- v é **filho** de u
- s é **ancestral** de t : $s \leq_T t$
- t é **descendente** de s
- s é **ancestral próprio** de t : $s \leq_T t$ e $s \neq t$: $s <_T t$
- t **descendente próprio** de s
- **folha**: vértice sem filhos

Floresta Direcionada

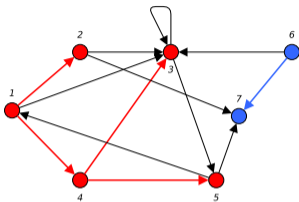


Floresta Direcionada



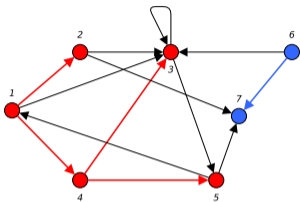
floresta direcionada

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

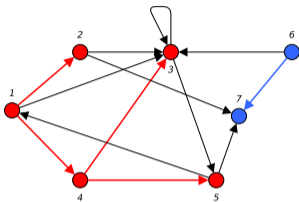
Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

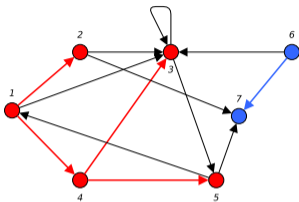
T

Floresta Direcionada



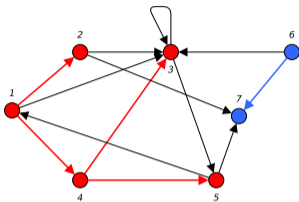
floresta direcionada: cada componente é arborescência
 T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

Floresta Direcionada



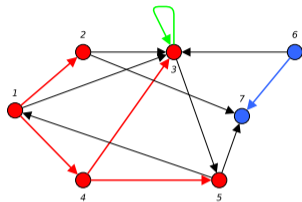
floresta direcionada: cada componente é arborescência
 T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G
(u, v)

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência
 T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G
 (u, v) : arco fora de T

Floresta Direcionada



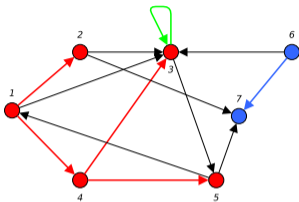
floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

(u, v) : arco fora de T

laço

Floresta Direcionada



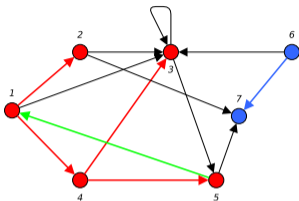
floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

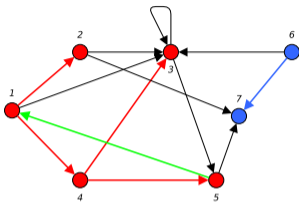
T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

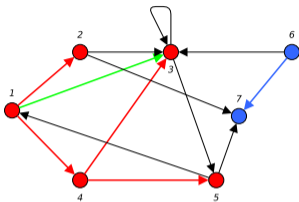
T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

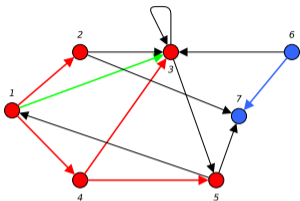
(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

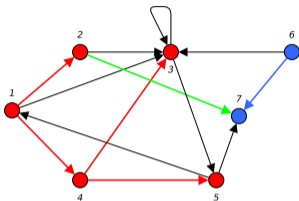
(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço: u é ancestral de v

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

(u, v) : arco fora de T

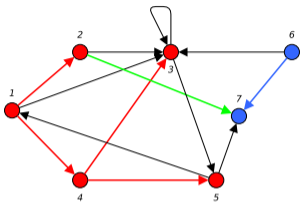
laço: $u = v$

arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço: u é ancestral de v

arco cruzado

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

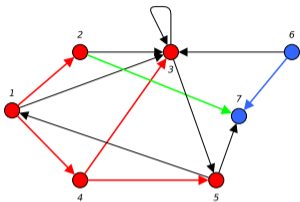
arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço: u é ancestral de v

arco cruzado: $u \not\prec_T v$

Obs: Se G não é direcionado, arcos (u, v)

Floresta Direcionada



floresta direcionada: cada componente é arborescência

T : floresta direcionada geradora de grafo direcionado G

(u, v) : arco fora de T

laço: $u = v$

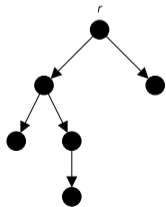
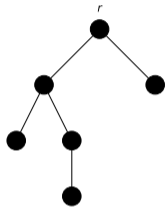
arco de retorno: u é descendente de v

arco de avanço: u é ancestral de v

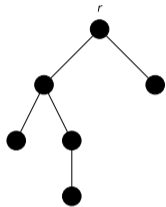
arco cruzado: $u \not\prec_T v$

Obs: Se G não é direcionado, arcos (u, v) fora de T podem ser apenas de retorno e cruzado

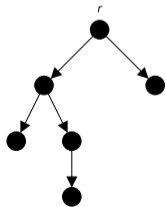
Relação com Árvores Enraizadas



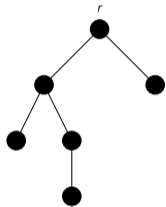
Relação com Árvore Enraizadas



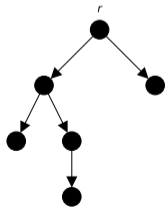
(T, r)



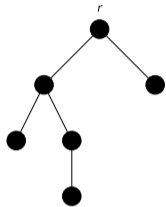
Relação com Árvores Enraizadas



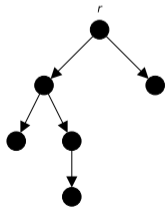
(T, r) : árvore enraizada



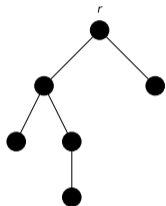
Relação com Árvore Enraizadas



(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

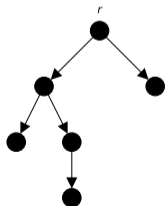


Relação com Árvore Enraizadas

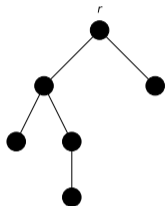


(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

• arborescência

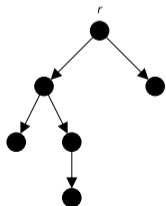


Relação com Árvore Enraizadas

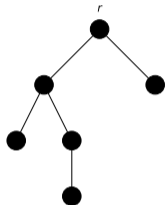


(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T

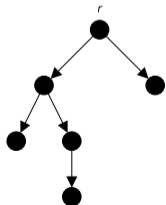


Relação com Árvore Enraizadas

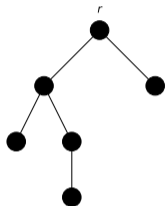


(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r

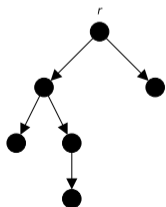


Relação com Árvore Enraizadas



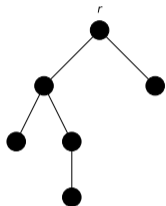
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



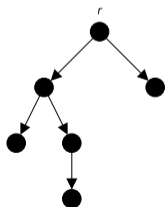
T

Relação com Árvore Enraizadas



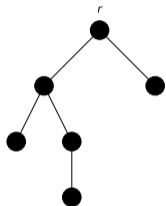
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



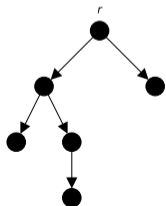
T : arborescência

Relação com Árvore Enraizadas



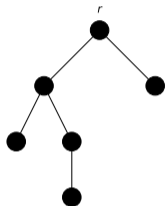
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



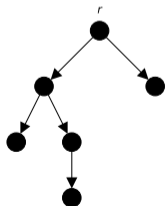
T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T

Relação com Árvore Enraizadas



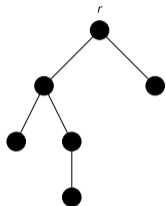
(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



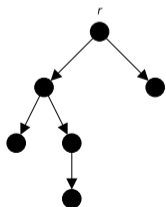
T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T : $(S(T), r(T))$

Relação com Árvore Enraizadas



(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

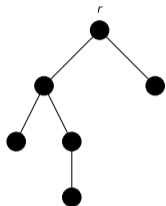
- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T : $(S(T), r(T))$

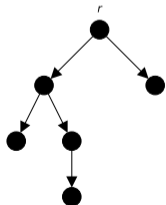
abuso

Relação com Árvore Enraizadas



(T, r) : árvore enraizada
arborescência induzida por r em T

- arborescência
- orientação de T
- do vértice mais próximo para o mais distante de r



T : arborescência
árvore enraizada subjacente a T : $(S(T), r(T))$

abuso: mesmas terminologia e notação para ambos

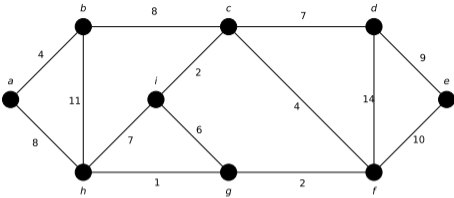
Corolário 71

Se T é uma arborescência e u é ancestral de v em T diferente do pai de v , então $T + (v, u)$ tem um único ciclo direcionado.

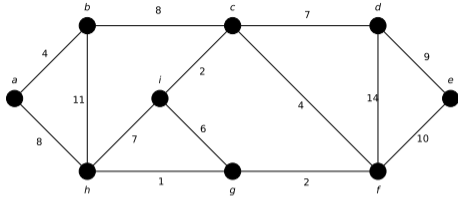
Aula de hoje

- 1 Grafos Direcionados
- 2 Passeios Direcionados
- 3 Arborescências
- 4 Grafos ponderados (e outros tipos)

Grafo Ponderado

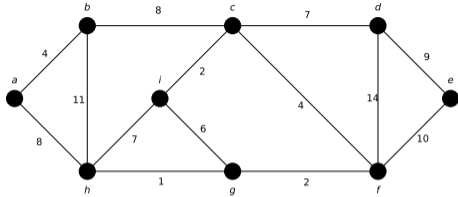


Grafo Ponderado



par (G, w) :

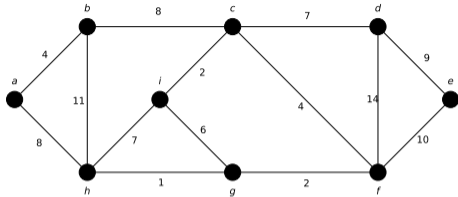
Grafo Ponderado



par (G, w) :

G : grafo (direccionado)

Grafo Ponderado

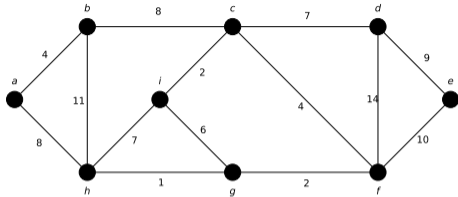


par (G, w) :

G : grafo (direcionado)

w : função que atribui a cada aresta (arco) a de G um **peso** $w(a)$

Grafo Ponderado



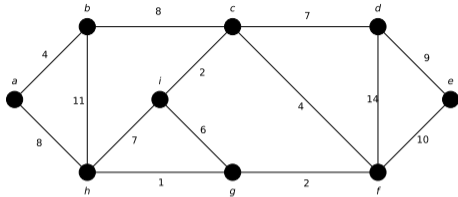
par (G, w) :

G : grafo (direcionado)

w : função que atribui a cada aresta (arco) a de G um **peso** $w(a)$

Dado conjunto de arestas X :

Grafo Ponderado



par (G, w) :

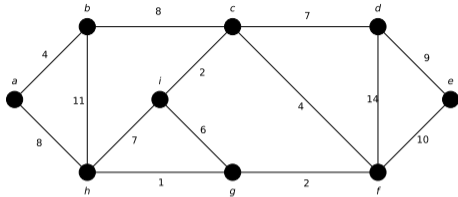
G : grafo (direcionado)

w : função que atribui a cada aresta (arco) a de G um **peso** $w(a)$

Dado conjunto de arestas X :

$w(X)$:

Grafo Ponderado



par (G, w) :

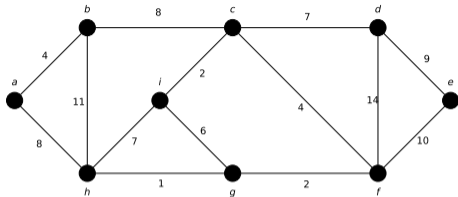
G : grafo (direcionado)

w : função que atribui a cada aresta (arco) a de G um **peso** $w(a)$

Dado conjunto de arestas X :

$w(X)$: soma dos pesos das arestas em X :

Grafo Ponderado



par (G, w) :

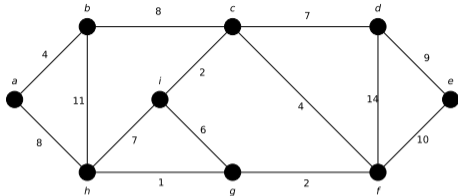
G : grafo (direcionado)

w : função que atribui a cada aresta (arco) a de G um **peso** $w(a)$

Dado conjunto de arestas X :

$w(X)$: soma dos pesos das arestas em X : i.e., $w(X) := \sum_{a \in X} w(a)$

Grafo Ponderado



par (G, w) :

G : grafo (direcionado)

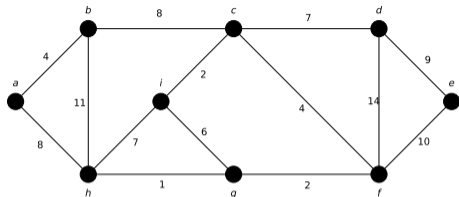
w : função que atribui a cada aresta (arco) a de G um **peso** $w(a)$

Dado conjunto de arestas X :

$w(X)$: soma dos pesos das arestas em X : i.e., $w(X) := \sum_{a \in X} w(a)$

matriz de adjacência:

Grafo Ponderado


$$M_G =$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	0	4	0	0	0	0	0	8	0
b	4	0	8	0	0	0	0	11	0
c	0	8	0	7	0	4	0	0	2
d	0	0	7	0	9	14	0	0	0
e	0	0	0	9	0	10	0	0	0
f	0	0	4	14	10	0	2	0	0
g	0	0	0	0	0	2	0	1	6
h	8	11	0	0	0	0	1	0	7
i	0	0	2	0	0	0	6	7	0

par (G, w) :

G : grafo (direcionado)

w : função que atribui a cada aresta (arco) a de G um **peso** $w(a)$

Dado conjunto de arestas X :

$w(X)$: soma dos pesos das arestas em X : i.e., $w(X) := \sum_{a \in X} w(a)$

matriz de adjacência:

$$M_G[u, v] = \begin{cases} w(\{u, v\}), & \text{se } \{u, v\} \in E(G), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Passeios e Caminhos Ponderados

(G, w) é um grafo (direcionado) ponderado.

Passeios e Caminhos Ponderados

(G, w) é um grafo (direcionado) ponderado.

- **Peso** do passeio $P = (v_0, \dots, v_n)$ em G :

Passeios e Caminhos Ponderados

(G, w) é um grafo (direcionado) ponderado.

- **Peso** do passeio $P = (v_0, \dots, v_n)$ em G :

$$w(P) := \sum_{i=1}^n w(\{v_{i-1}, v_i\}).$$

Passeios e Caminhos Ponderados

(G, w) é um grafo (direcionado) ponderado.

- **Peso** do passeio $P = (v_0, \dots, v_n)$ em G :

$$w(P) := \sum_{i=1}^n w(\{v_{i-1}, v_i\}).$$

- **Caminho mínimo em um grafo ponderado:**

Passeios e Caminhos Ponderados

(G, w) é um grafo (direcionado) ponderado.

- **Peso** do passeio $P = (v_0, \dots, v_n)$ em G :

$$w(P) := \sum_{i=1}^n w(\{v_{i-1}, v_i\}).$$

- **Caminho mínimo em um grafo ponderado:** caminho de peso mínimo no grafo

Caixeiro Viajante

Caixeiro Viajante é o problema de encontrar um ciclo hamiltoniano de peso mínimo em um grafo direcionado com pesos.

Caixeiro Viajante é o problema de encontrar um ciclo hamiltoniano de peso mínimo em um grafo direcionado com pesos.

Corolário 72

Caixeiro Viajante é o problema de encontrar um ciclo hamiltoniano de peso mínimo em um grafo direcionado com pesos.

Corolário 72

O problema do Caixeiro Viajante é \mathcal{NP} -difícil.

Caixeiro Viajante é o problema de encontrar um ciclo hamiltoniano de peso mínimo em um grafo direcionado com pesos.

Corolário 72

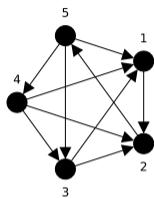
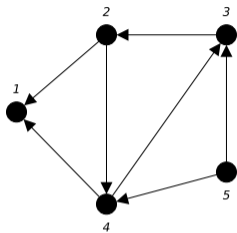
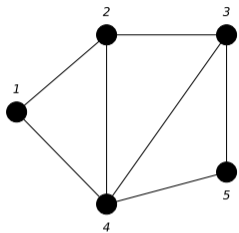
O problema do Caixeiro Viajante é \mathcal{NP} -difícil.

Demonstração.

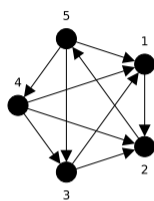
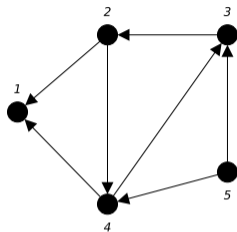
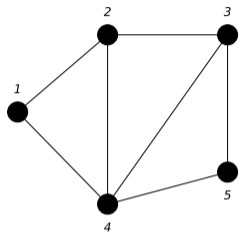
Exercício 104.



Grafo Orientado

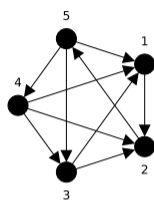
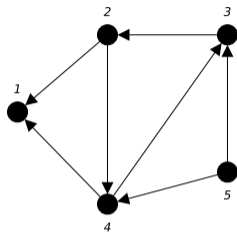
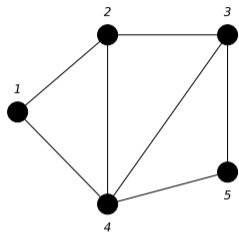


Grafo Orientado



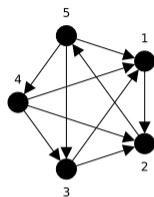
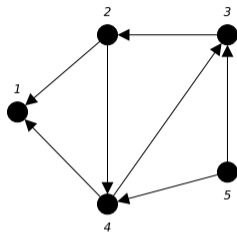
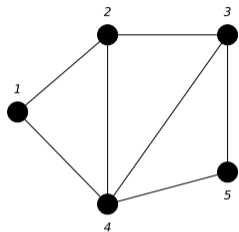
grafo direcionado

Grafo Orientado



grafo direcionado obtido “atribuindo direção” a cada uma das arestas de um grafo não-direcionado

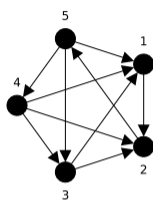
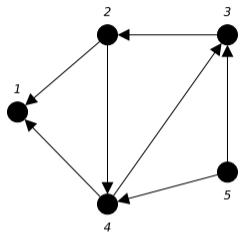
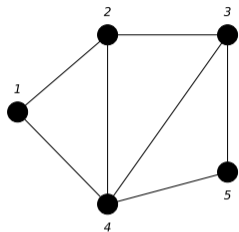
Grafo Orientado



grafo direcionado obtido “atribuindo direção” a cada uma das arestas de um grafo não-direcionado

- o grafo direcionado é uma **orientação** do grafo não-direcionado

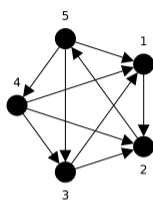
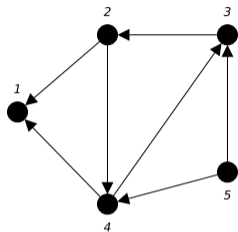
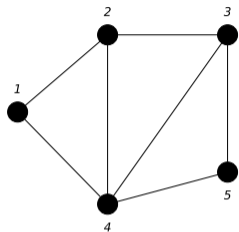
Grafo Orientado



grafo direcionado obtido “atribuindo direção” a cada uma das arestas de um grafo não-direcionado

- o grafo direcionado é uma **orientação** do grafo não-direcionado
- o grafo não-direcionado é o grafo subjacente do grafo direcionado

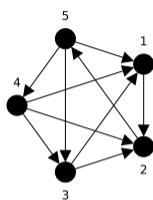
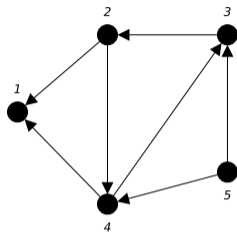
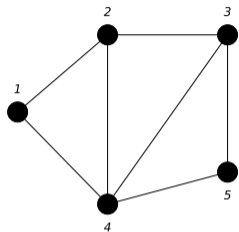
Grafo Orientado



grafo direcionado obtido “atribuindo direção” a cada uma das arestas de um grafo não-direcionado

- o grafo direcionado é uma **orientação** do grafo não-direcionado
- o grafo não-direcionado é o grafo subjacente do grafo direcionado
- um grafo orientado é anti-simétrico

Grafo Orientado

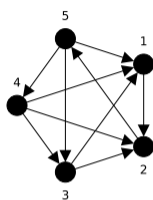
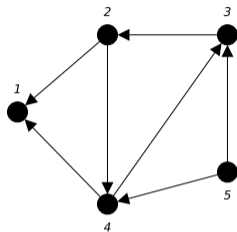
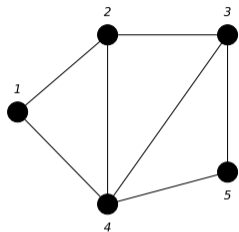


grafo direcionado obtido “atribuindo direção” a cada uma das arestas de um grafo não-direcionado

- o grafo direcionado é uma **orientação** do grafo não-direcionado
- o grafo não-direcionado é o grafo subjacente do grafo direcionado
- um grafo orientado é anti-simétrico

torneio

Grafo Orientado

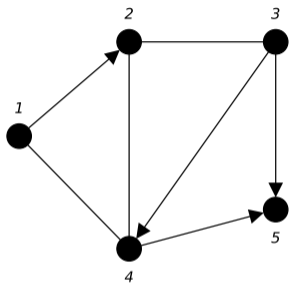


grafo direcionado obtido “atribuindo direção” a cada uma das arestas de um grafo não-direcionado

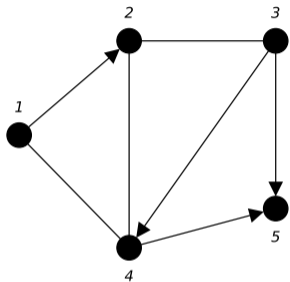
- o grafo direcionado é uma **orientação** do grafo não-direcionado
- o grafo não-direcionado é o grafo subjacente do grafo direcionado
- um grafo orientado é anti-simétrico

torneio: orientação de um grafo completo

Grafo Misto

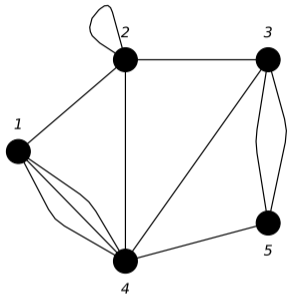


Grafo Misto



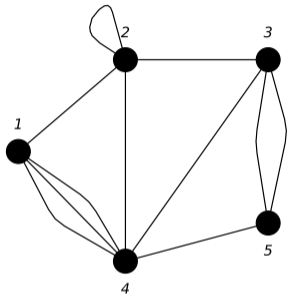
grafo com “arestas e arcos”

Multigrafo



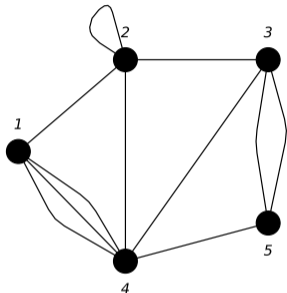
- diferentes arestas podem ter as mesmas pontas (**arestas paralelas**)

Multigrafo



- diferentes arestas podem ter as mesmas pontas (**arestas paralelas**)
- as pontas de uma aresta podem coincidir (**laços**)

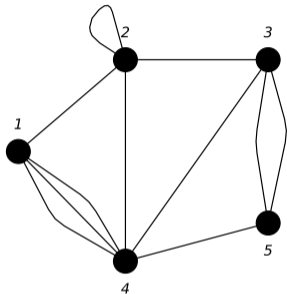
Multigrafo



- diferentes arestas podem ter as mesmas pontas (**arestas paralelas**)
- as pontas de uma aresta podem coincidir (**laços**)

grafo simples

Multigrafo



- diferentes arestas podem ter as mesmas pontas (**arestas paralelas**)
- as pontas de uma aresta podem coincidir (**laços**)

grafo simples: não tem arestas paralelas nem laços