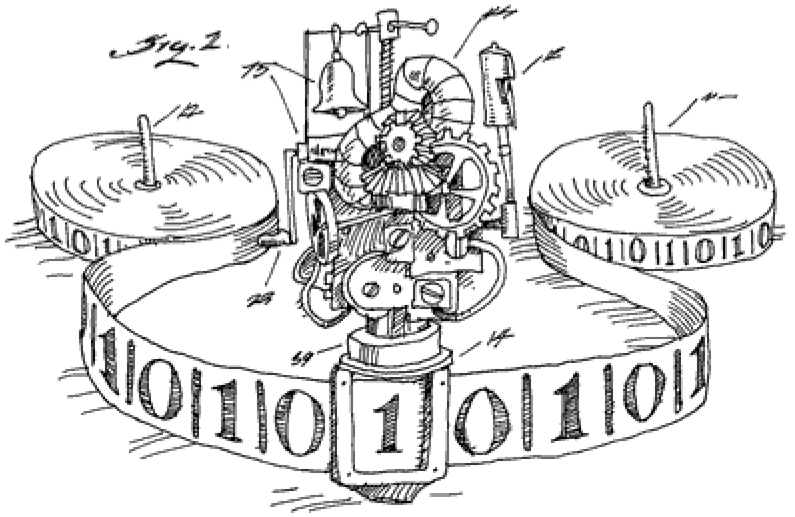
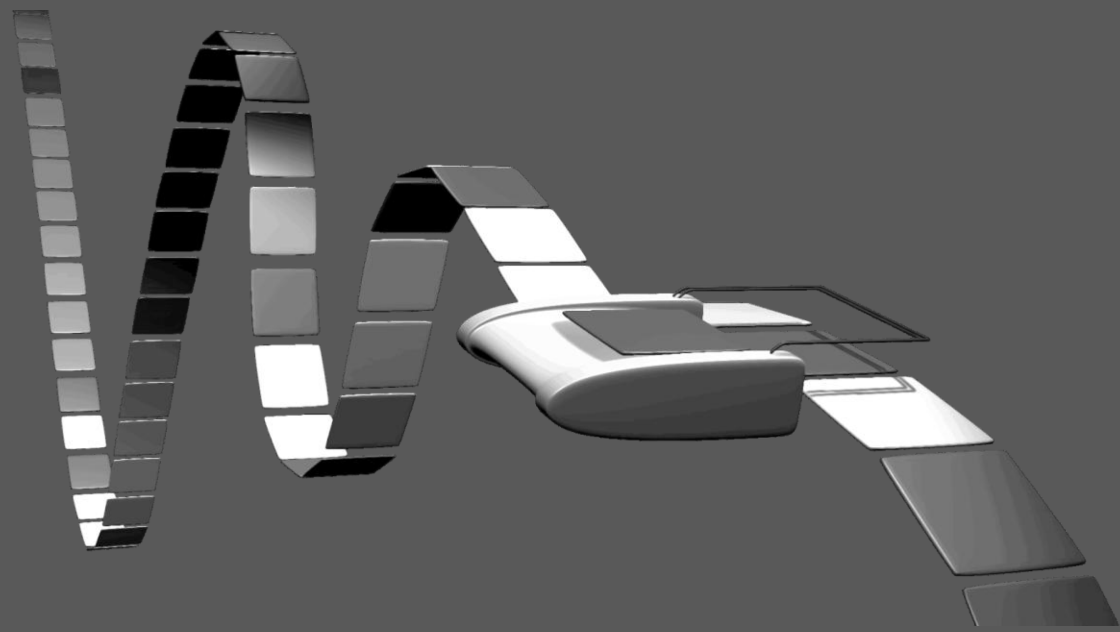
Lema do bombeamento

Introdução à Teoria da Computação

Nicollas Mocelin Sdroievski



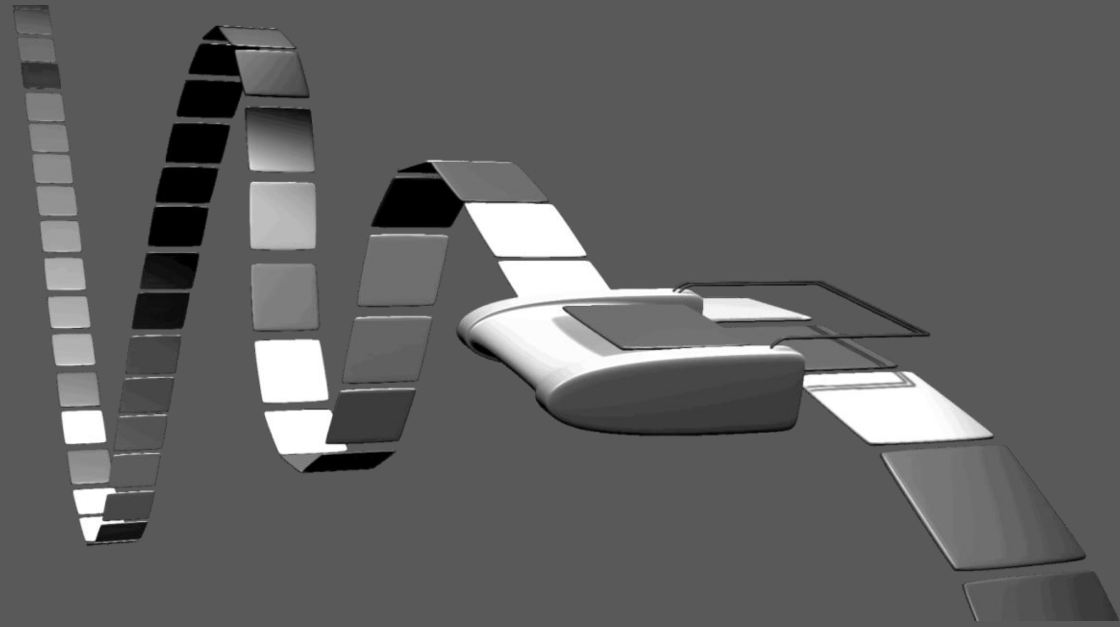
Relembrando



Linguagens regulares

- Linguagens L para as quais as seguintes afirmações são verdade
  - Existe um AFD D tal que $L = L(D)$
  - Existe um AFN N tal que $L = L(N)$
  - Existe um ε-AFN E tal que $L = L(E)$
  - Existe uma expressão regular R tal que $L = L(R)$
- Todos estes modelos são equivalentes na sua expressividade

Algumas propriedades



Propriedades de linguagens regulares

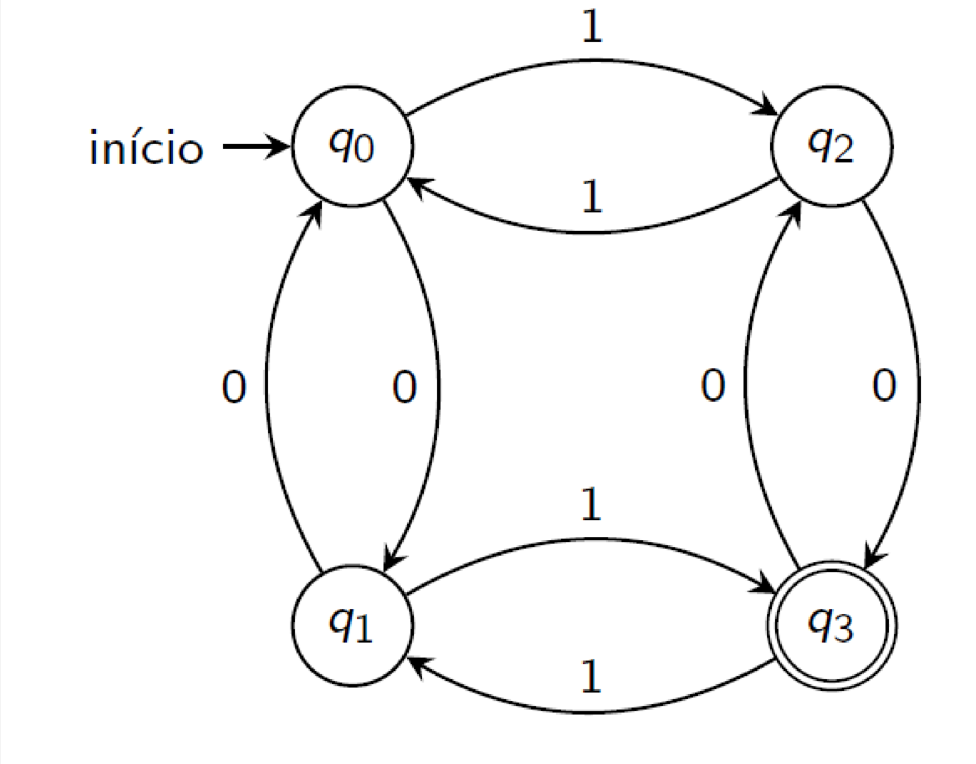
- **Teorema.** Linguagens regulares são fechadas sob complemento. Ou seja, se $L \subseteq \Sigma^*$ é regular, então $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ também é.
- **Demonstração.** No quadro.

- **Teorema.** Linguagens regulares são fechadas sob intersecção.
- **Demonstração.** Exercício 3.10.

- **Teorema.** Linguagens regulares são fechadas sob união e fecho.
- **Demonstração.** No quadro (e também nas aulas sobre ERs).

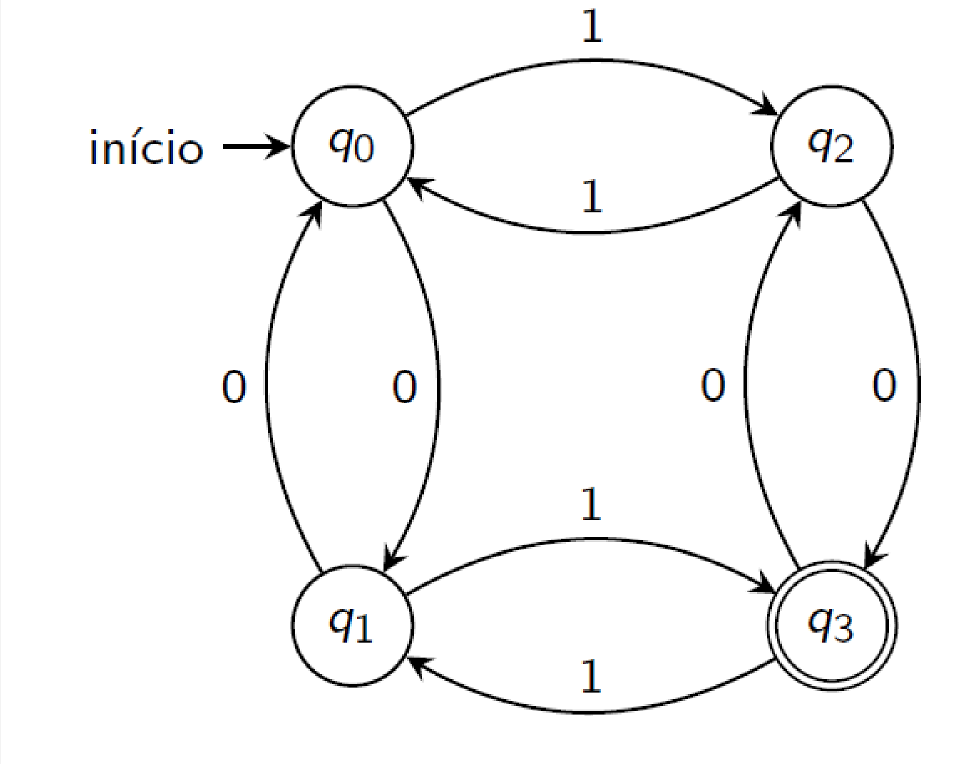
Uma linguagem regular

- Considere a linguagem L das strings binárias com número par de 1's e 0's
- Considere $w = 100101$
- Sequência de estados
  - $q_0, q_2, q_3, q_2, q_0, q_1 q_3$



Uma linguagem regular

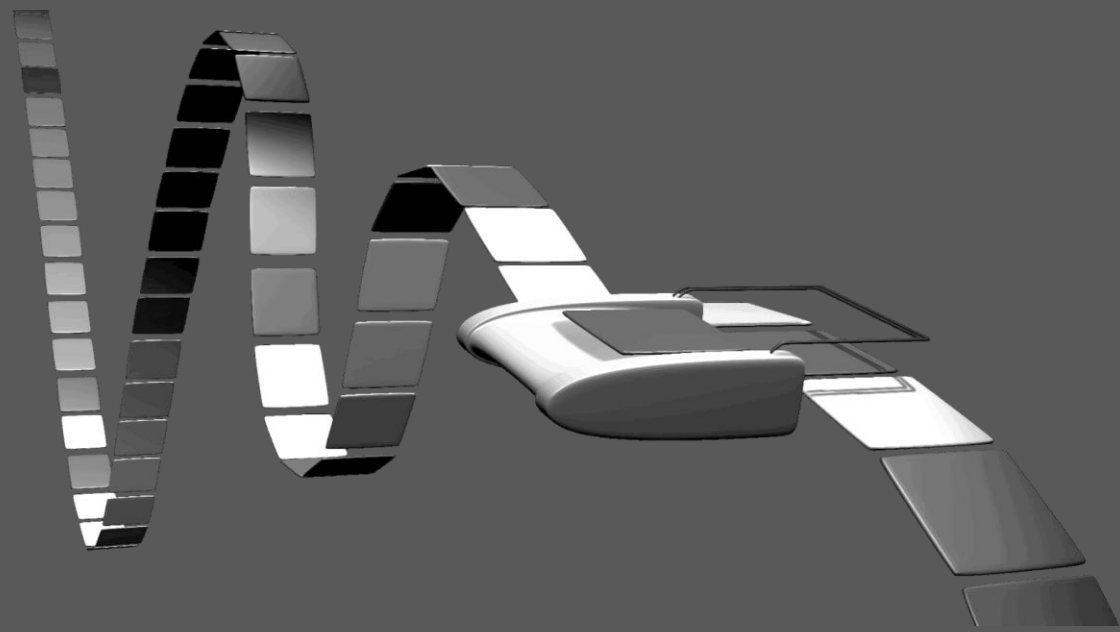
- Considere a linguagem L das strings binárias com número par de 1's e 0's
- Considere $w = 100101$
- Sequência de estados
  - $q_0, q_2, q_3, q_2, q_0, q_1 q_3$
- 10000101 também está em L?
  - Sim
- 1101 também está em L?
  - Sim



Uma linguagem que não é regular

- Considere a linguagem $L = \{\, 0^n 1^n \mid n \geq 0 \,\}$
- Vamos provar que essa linguagem não é regular
- **Teorema.** L não é uma linguagem regular.
- **Demonstração.** No quadro.
- **Ideia da demonstração:** assumindo L regular, deve existir um AFD D que a aceita, digamos com t estados. Considerando a string $0^t 1^t$, segue que algum estado deve ser repetido durante o processamento de 0^t. Repetindo a substring que leva à repetição de estados, segue que D deve também aceitar strings que possuem mais 0’s do que $1's$, uma contradição.

Lema do bombeamento



Lema do bombeamento

- **Lema (do Bombeamento para linguagens regulares)**. Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante inteira $t \geq 1$ tal que para toda string $w \in L$ satisfazendo $|w| \geq t$, existem strings $x, y, z \in \Sigma^*$ satisfazendo o seguinte:
  - $w = xyz$ e as condições abaixo são satisfeitas:
  1. $y \neq \epsilon$
  2. $|xy| \leq t$
  3. Para todo $k \geq 0$, $xy^k z \in L$
- **Demonstração?**
  - Ideia na demonstração do slide 8, completa no livro.

Usando o Lema do Bombeamento

- O Lema do Bombeamento é uma ferramenta poderosa para provar que uma linguagem não é regular
- Como utilizar?

1. Assuma que a linguagem é regular
2. Escolha uma string propícia para realizar o Bombeamento
    - Normalmente usamos o ‘t’ do lema aqui
3. Escolha um valor de k que “estraga” a string original (leva à uma string que não está em L), e justifique

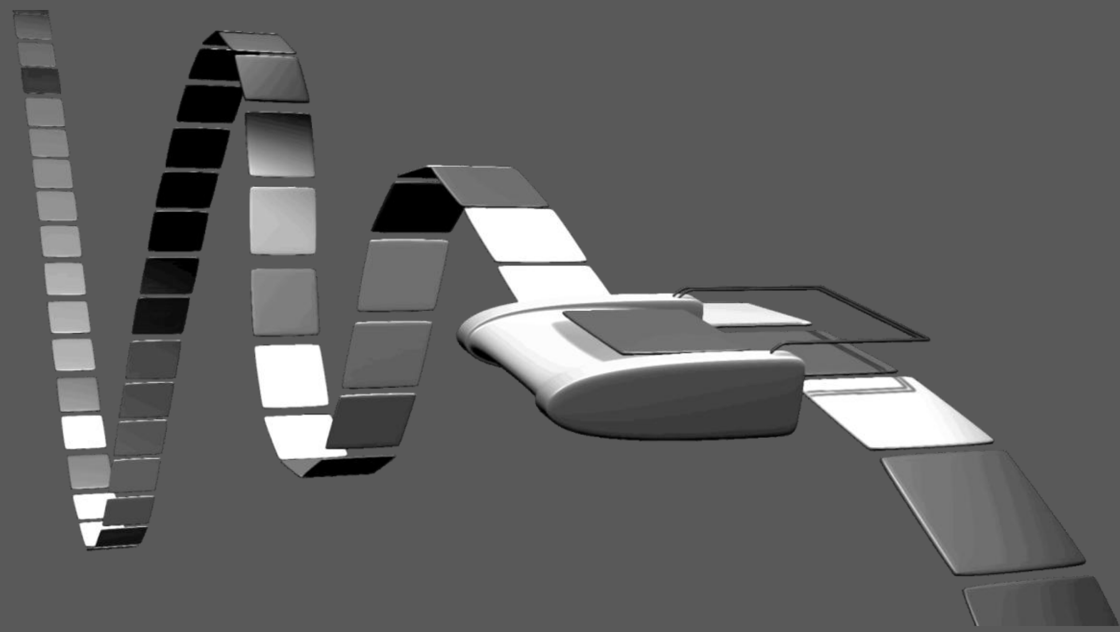
Primeiro exemplo

- **Teorema.** $L_{01} = \left\{ 0^i 1^i \mid i \geq 1 \right\}$ não é regular.
- **Demonstração.**
  - Assuma que L_{01} é regular (logo o LB se aplica à L_{01})
  - String propícia para o bombeamento?
  - Escolha $0^t 1^t \in L$, onde t é a constante do LB
  - Valor de k que "estraga" a string?
  - $k = 0$ ou $k \geq 2$ ambos funcionam
    - Com $k = 0$, é removido pelo menos um zero da string, que fica da forma $0^j 1^i$ com $j < i$, que não está em L_{01}
    - Com $k \geq 2$, é adicionado pelo menos um zero na primeira metade da string, que fica da forma $0^j 1^i$, com $j > i$, que não está em L_{01}

Exemplo mais complexo

- **Teorema.** A linguagem $L_p = \{1^p \mid p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.
- **Demonstração.**
  - Assuma que L_p é regular (logo o LB se aplica à L_p)
  - Escolha a string $w = 1^p$, com p primo maior ou igual à constante t do LB
  - Bombeando a string k vezes, obtemos a string
  $$xy^kz = 1^{p+(k-1)\cdot\ell}$$
  onde $\ell = |y| \geq 1$
  - Escolhendo $k = p + 1$, temos
  $$xy^{p+1}z = 1^{p+(p+1-1)\cdot\ell} = 1^{p+p\cdot\ell} = 1^{p\cdot(1+\ell)}$$
  que não pertence a L_p pois $p \cdot (1 + \ell)$ é um número composto

Exercícios

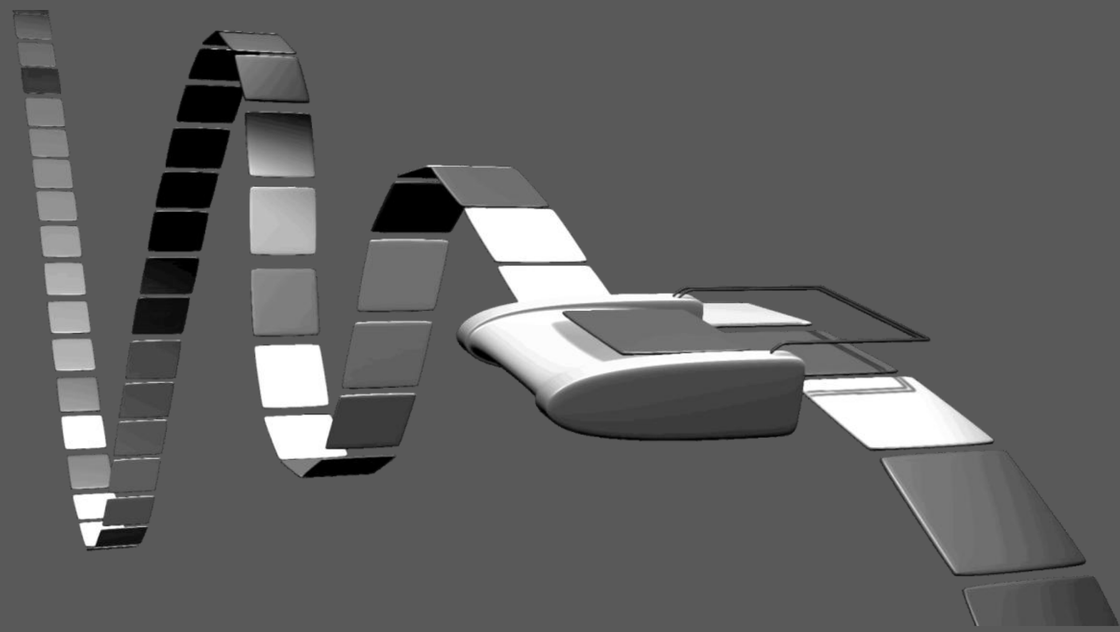


Exercícios

Exercício 4.1 Prove que as seguintes linguagens não são regulares:

- A linguagem L_{WR} das strings binárias da forma ww^R
- A linguagem L_{WW} das strings binárias da forma ww
- A linguagem L_{EQ} das strings binárias que tem a mesma quantidade de 0's e 1's.
- A linguagem $L_{\mathrm{DB}} = \{w :$ o número de 0's em w é o dobro do número de 1's$\}$.
- A linguagem $L_{+0} = \{0^i 1^j \ : \ i > j\}$
- A linguagem $L_{+1} = \{0^i 1^j \ : \ i < j\}$
- A linguagem $L_{\mathrm{SQ}} = \{1^s : s$ é um quadrado perfeito$\}$.

Para fechar



Para fechar

- Hoje
  - Propriedades e limites de linguagens regulares
  - Lema do bombeamento e exemplos
- Próxima aula
  - Autômatos com pilha
    - Novo modelo de computação
    - **Estritamente** mais expressivos que AFDs e amigos

Referências

- [SIL25] – SILVA, M.V.G. **Autômatos, Computabilidade e Complexidade Computacional** , 2025.