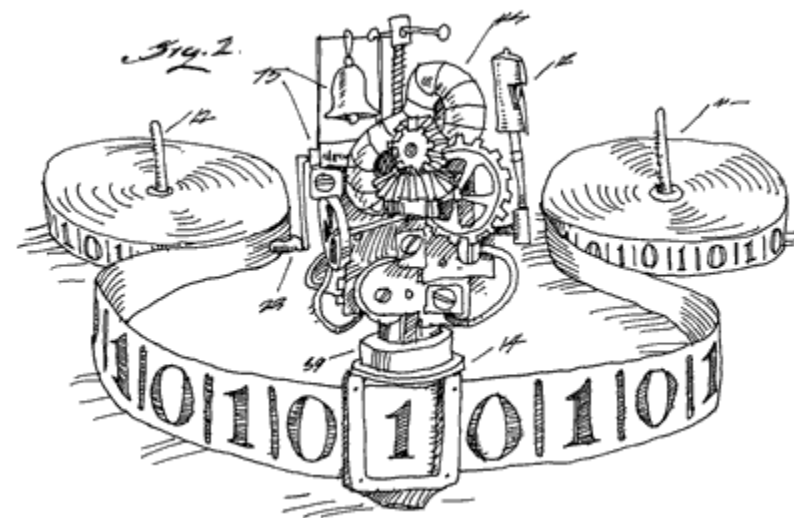


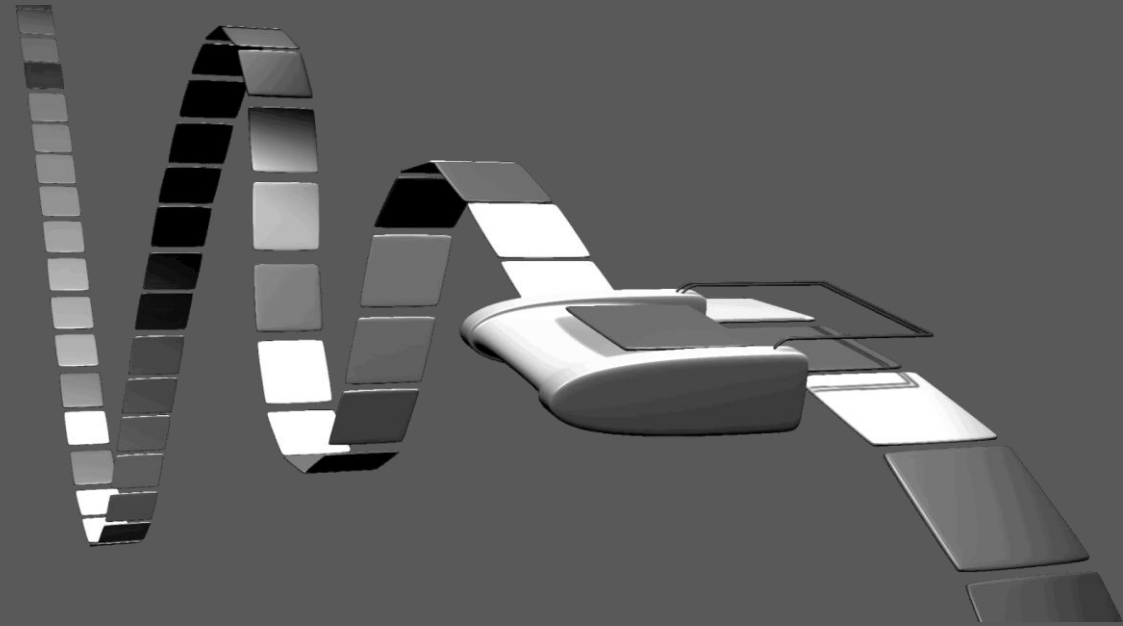
Alfabetos, Strings e Linguagens

Introdução à Teoria da Computação

Nicollas Mocelin Sdroievski



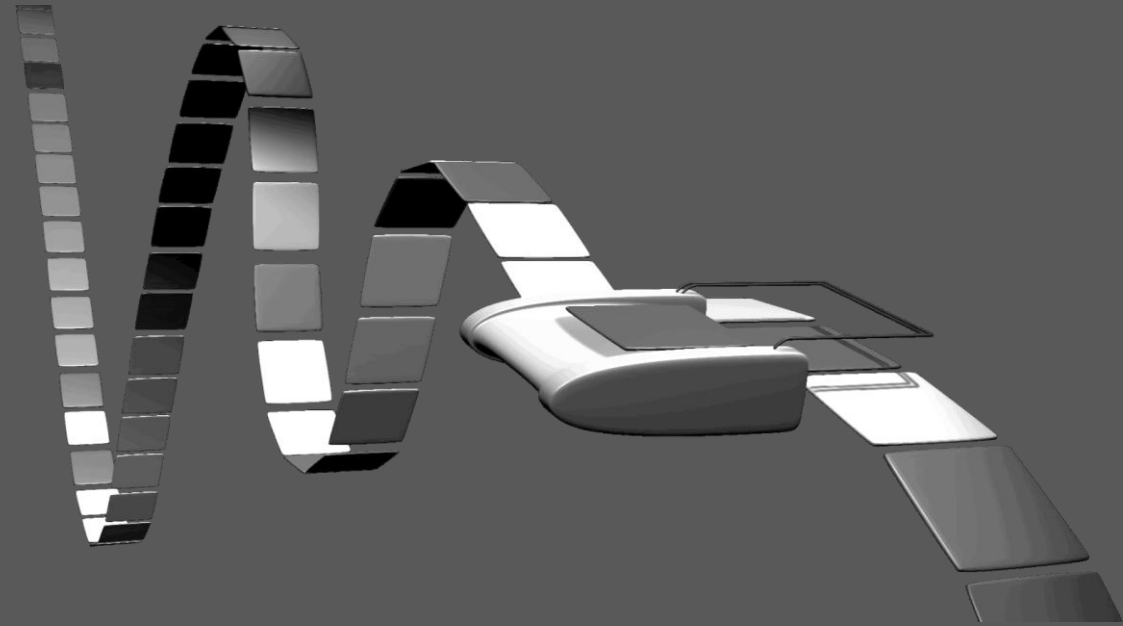
Relembrando



Problemas de decisão

- Um problema de decisão é um problema computacional cuja resposta é sim ou não
- Na disciplina, nosso foco será este tipo de problema
- Muitas vezes, uma versão de decisão é “equivalente” ao problema original

Definições básicas



Alfabeto e símbolos

Definição. Um alfabeto é um conjunto finito e não-vazio, e símbolos são os elementos deste conjunto

- **Exemplos**

- Considere o conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, os elementos a, b, c, d do conjunto X são chamados de símbolos do alfabeto X
- Considere o conjunto $\Sigma = \{0,1\}$, os elementos $0,1$ do conjunto Σ são chamados de símbolos do alfabeto Σ

- **Alfabetos comuns**

- Binário $\Sigma = \{0,1\}$
- ASCII

Strings (palavras em alguns textos)

- **Definição.** Dado um alfabeto Σ , uma string sobre Σ é uma sequência finita de símbolos de Σ justapostos.
- **Exemplos:**
 - A sequência *aaba* é uma string sobre o alfabeto $X = \{a, b, c, d\}$
 - A sequência 00101 é uma string sobre o alfabeto binário
 - Um programa em linguagem C é uma string sobre o alfabeto ASCII (dependendo do SO, compilador, etc.)
- **Observação**
 - Símbolos são normalmente representados com as primeiras letras do alfabeto (*a, b, c ...*), e strings com as últimas (*..., x, y, z*)

Definições sobre Strings

- **Definição (substrings e concatenação).**

- Uma *substring* de uma string w é uma subsequência de símbolos de w .
- A *concatenação* de duas strings x e y , denotada por xy , é a string resultante da justaposição das strings x e y .

- **Exemplos**

- ab, bb, bbc são substrings de $abbbbc$
- A concatenação de abc com cba resulta em $abccba$

Mais definições sobre Strings

- O *tamanho* de uma string w é o número de símbolos de w , e é denotado por $|w|$
- Denotamos por ε a string nula, ou seja, a string que não contém nenhum símbolo
- A *reversa* de uma string w , denotada por w^R , é definida recursivamente:

Base: se $w = \varepsilon$, então $w^R = \varepsilon$

Caso geral: Seja w uma string com pelo menos um símbolo. Se a string w tem a forma xs , onde x é uma string e s uma string de tamanho 1, então $w^R = (xs)^R = sx^R$

Potências

- **Potência de strings.** Seja Σ um alfabeto e $s \in \Sigma$, dizemos que uma string do alfabeto é da forma s^n se é formada por n símbolos s consecutivos. De maneira análoga, se w é uma string sobre Σ , então w^n é formada pela concatenação de n cópias de w .
 - **Exemplo:** 11111 pode ser escrita como 1^5
- **Potência de um alfabeto.** Dado um alfabeto, o conjunto Σ^i formado por strings w sobre Σ , tal que $|w| = i$, é dito uma potência de Σ . Definimos $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$.
 - **Exemplo:** se $\Sigma = \{0,1\}$, então $\Sigma^3 = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$

Conjunto de todas as strings

- **Definição.** Dado um alfabeto Σ , o conjunto de todas as strings sobre Σ é definido como

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$$

- **Exemplos**

- $(ab)^{100}$ pertence ao conjunto $\{a, b\}^*$
- Se $\Sigma = \{0, 1, a\}$, então $0^{10}a1^{10}$ pertence a Σ^*
- Para qualquer Σ , $\varepsilon \in \Sigma^*$

Exercícios

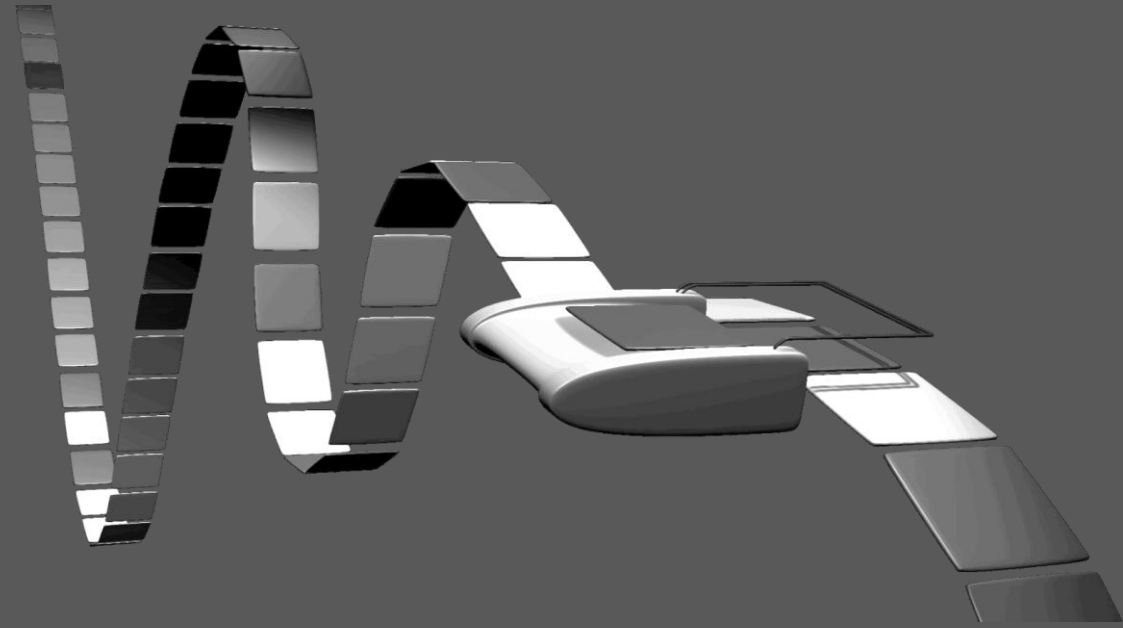
Exercício 2.1 Seja $\Sigma = \{0, 1\}$, $x \in \Sigma^*$ e $y \in \{a, b, c\}^*$. Responda verdadeiro ou falso.

- (a) Se w é uma string da forma $x01$, então $|w| > 2$?
- (b) Se w é uma string da forma $x010$, então $|w| \geq 3$?
- (c) Se w é uma string da forma $y010$, então w é uma string sobre Σ ?

Exercício 2.2 Seja Σ um alfabeto e i um número natural. Qual é a cardinalidade de Σ^i ?

- Ainda sugiro os exercícios 2.4 e 2.5, e o 2.6 caso esteja inseguro com provas por indução

Linguagens



Linguagens

- **Definição.** Seja Σ um alfabeto. Uma linguagem é um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.
 - Por exemplo, $L = \{aba, acccc, b\}$ é uma linguagem sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$.
- Diferenças entre strings e linguagens

- **Exemplo 2.10** $L_{01} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é da forma } 0^n 1^n, \text{ para } n \geq 0\}$. ■
- **Exemplo 2.11** $L_{\text{PAL}} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 010, 101, 000, 111, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um palíndromo}\}$. ■
- **Exemplo 2.12** $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um número primo escrito em binário}\}$. ■
- **Exemplo 2.13** $L_{\text{SQ}} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um número quadrado perfeito escrito em binário}\}$. ■

Notações e convenções

- Por vezes interpretamos strings binárias como números naturais na base binária.
- Denotamos o número natural representado pela string binária w por $N(w)$.
- **Exemplos**
 - Para $w_1 = 101$, $N(w_1) = 5$.
 - Para $w_2 = 1111$, $N(w_2) = 15$.
 - Note que $N(1) = N(01) = N(00001) = 1$.
- Por convenção, $N(\epsilon) = 0$

Linguagens e problemas computacionais

- Linguagens nos ajudam a formalizar problemas computacionais (de decisão)
- Definimos a linguagem que consiste nas instâncias verdadeiras do problemas de decisão (devidamente codificadas)
- **Revisitando Exemplos**

■ **Exemplo 2.10** $L_{01} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é da forma } 0^n 1^n, \text{ para } n \geq 0\}$. ■

■ **Exemplo 2.11** $L_{\text{PAL}} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 010, 101, 000, 111, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um palíndromo}\}$. ■

■ **Exemplo 2.12** $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um número primo escrito em binário}\}$. ■

■ **Exemplo 2.13** $L_{\text{SQ}} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\} = \{w \in \Sigma^* : w \text{ é um número quadrado perfeito escrito em binário}\}$. ■

Exercícios

Exercício 2.7 Seja Σ um alfabeto arbitrário. É verdade que os conjuntos Σ^* , $\emptyset$, $\{\epsilon\}$ e Σ^4 são todos linguagens sobre Σ ? Justifique. ■

Exercício 2.8 Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Forneça uma definição formal para a linguagem sobre Σ das strings que representam números múltiplos de 4 escritos em binário. ■

- Ainda sugiro o exercício 2.9

Operações com linguagens

- A *concatenação* de duas linguagens L e M é o conjunto de todas as strings que podem ser formadas tomando-se uma string x de L e uma string y de M e fazendo a concatenação xy . Denotamos a linguagem resultante por LM ou $L \cdot M$.
- **Exemplos**
 - Se $L = \{00,0\}$ e $L' = \{1,111\}$, então $LL' = \{001,00111,01,0111\}$
 - Se $L = \{a, aa, aaa, \dots\}$ e $M = \{\varepsilon, x, xx, xxx, \dots\}$, então
 $LM = \{a, ax, axx \dots, aa, aax, \dots\}$, ou
 $LM = \{a^i x^k : i \geq 1 \text{ e } k \geq 0\}$

Operações com linguagens

- Usamos a notação L^i , para $i \geq 2$, para denotar a concatenação de uma linguagem L consigo mesma $i - 1$ vezes. Para $i \in \{0,1\}$, temos $L^0 = \{\varepsilon\}$ e $L^1 = L$
- **Definição.** Seja L uma linguagem. O Fecho de Kleene de L , denotado por L^* , é o conjunto de strings que podem ser formadas tomando-se qualquer número de strings de L (possivelmente com repetições) e as concatenando. Isto é,

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

Exercícios resolvidos

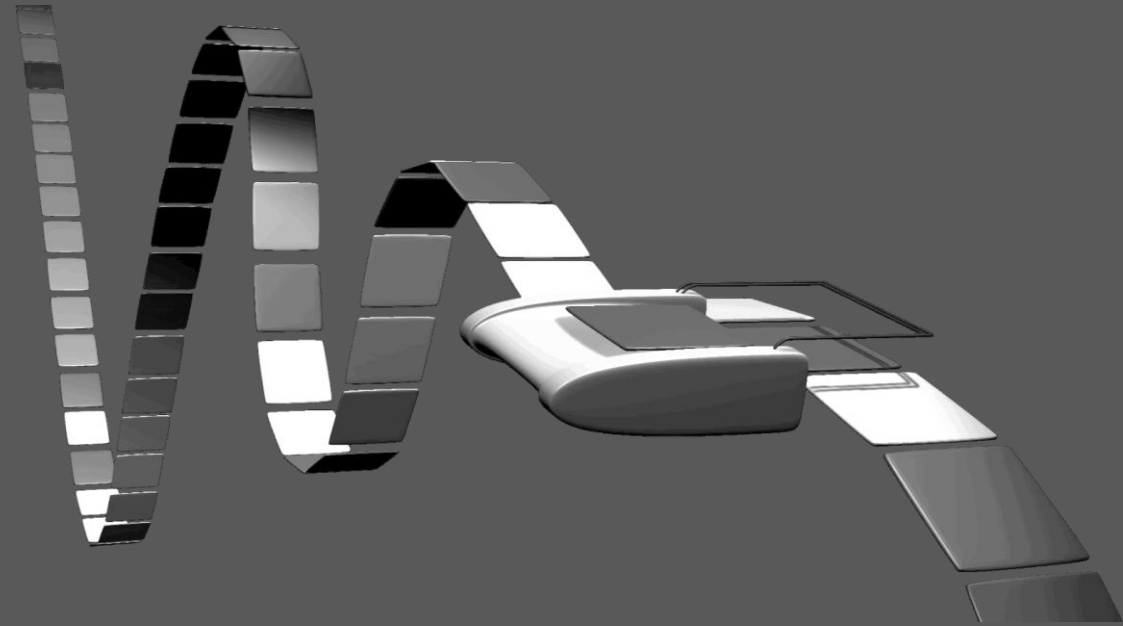
Exercício 2.10 (Resolvido) Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e sejam L_3 e R as linguagens sobre Σ definidas da seguinte forma: $L_3 = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$ e $R = \{0\}$. Qual é a linguagem L_3R ?

Exercício 2.11 (Resolvido) Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Considere a linguagem $R = \{0\}$ sobre Σ . Qual é a linguagem Σ^*R ? E qual é a linguagem Σ^*R^2 ?

Exercício 2.12 (Resolvido) Sejam $L = \{1\}$ e $R = \{0\}$ linguagens. Qual é a linguagem LR^* ?

- Exercício 2.13 na lista de exercícios

Para fechar



Para fechar

- Hoje
 - Várias definições
 - Alfabetos
 - Strings
 - Linguagens e como capturam problemas de decisão
- Próxima aula
 - Autômatos finitos determinísticos
 - Nosso primeiro modelo de computação
 - Aplicações em processamento de texto e compiladores

Referências

- [SIL25] – SILVA, M.V.G. Autômatos, Computabilidade e Complexidade Computacional , 2025.