Lista de Exercícios de Métodos Numéricos

12 de outubro de 2010

Para todos os algoritmos abaixo assumir $n = 0, 1, 2, 3.....$

- Bisseção:
  - Algoritmo:$x_n = \frac{a+b}{2}$
  - Se $f(a) * f(x_n) < 0$ então $b = x_n$ senão $a = x_n$
  - Parada: $|f(x_n)| \leq erro$ ou $|b - a| \leq erro$
- Falsa Posição
  - Algoritmo:$x_n = a - \frac{(b-a)*f(a)}{f(b)-f(a)}$
  - Se $f(a) * f(x_n) < 0$ então $b = x_n$ senão $a = x_n$
  - Parada: $|x_n - x_{n-1}| \leq erro$ $(x_0 = aoux_0 = b)$
- Iteração Linear:
  - Algoritmo:$x_n = g(x_{n-1})$
  - Melhor extremo: $|g'(x) < 1|$ ou Se $|g'(a)| < |g'(b)|$ então $x_0 = a$ senão $x_0 = b$
  - Parada: $|x_n - x_{n-1}| \leq erro$
- Newton-Raphson: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Secante: $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}*f(x_n)-x_n*f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

- Parada do Newton-Raphson ou da Secante: $|x_{n+1} - x_n| \leq erro$
- Método Misto:
  - Se $f(a) * f(x_1^N) < 0$ então $b = x_1^N$ senão $a = x_1^N$
  - Algoritmo:$x_n = \frac{x_n^N + x_n^F}{2}$
  - Parada: $|x_n^F - x_n^N| \leq erro$

1. Considerando o erro=10^{-4}.Use o método da Falsa Posição para obter a menor raiz positiva de:
   (a) $\frac{x}{2} - tg(x) = 0$
   (b) $x^5 - 6 = 0$
2. Dada a equação $f(x) = x^2 + x - 6$ e $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 3$, determinar pelo método iterativo linear as raízes reais, tomando $x_0 = 1.5$ com uma tolerância de $erro \leq 0.01$ entre duas iterações consecutivas, operando com 5 casas decimais.
3. Aplicar o Método de Newton-Raphson a $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ e $f(x) = x^2 - cos(x)$ com $x_0 = 1.9$ e $erro \leq 0.001$.
4. Calcular $\sqrt{5}$ e $\sqrt[5]{25}$ pelo método da Bisseção.
5. Considerando o $erro \leq 10^{-3}$. Calcule uma raiz real utilizando o método misto para as equações abaixo:
   (a) $f(x) = x + ln(x) = 0$
   (b) $f(x) = e^{-x} - sen(x) = 0$
6. Use o Método Misto para encontrar soluções com precisão de 10^{-5} para os seguintes problemas:
   (a) $e^x + 2^{-x} + 2 * cos(x) - 6 = 0$
   (b) $(x-2)^2 - ln(x) = 0$

Exercícios de Cálculo Numérico
Zero de Função

1. Dê um exemplo de função $f(x)$, que tenha pelo menos uma raiz, que não pode ser determinada usando o Método da Bisseção.

2. Dê um exemplo de função $f(x)$, que tenha pelo menos uma raiz, onde o Método de Newton-Raphson não converge.

3. A equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ tem 3 e 4 como raízes. Considere a função de iteração dada por $\varphi(x) = x^2 - 6x + 12$. Determine o intervalo $(a,\ b)$, onde para qualquer que seja x_0 escolhido a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge para a raiz $x = 3$. Mostre que a convergência é quadrática.

4. Para determinar a raiz quadrada de um número $c \geq 0$, basta resolver a equação $x^2 - c = 0$. É possível determinar sua raiz quadrada usando a função de iteração $\varphi(x) = c/x$. Justifique a resposta.

5. As funções de iterações $\varphi_1(x) = x^2/2 - 2x + 4$ e $\varphi_2(x) = x^2/2 - 2.5x + 5$, geram sequências convergentes para a raiz $\overline{x} = 2$, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in (1.5,\ 3)$. Qual das duas funções geram sequências mais rapidamente convergente para esta raiz. Justifique a resposta.

6. Determine um intervalo $(a,\ b)$ e uma função de iteração $\varphi(x)$ associada, de tal forma que $\forall x_0 \in (a,\ b)$ a função de iteração gere uma sequência convergente para a(s) raiz(es) de cada uma das funções abaixo, usando o método iterativo linear (MIL) com tolerância $\epsilon \leq 1.10^{-3}$.

   (a) $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$

   (b) $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$

   (c) $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$

   (d) $f_4(x) = \text{sen}(x) - x^2$

   (e) $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$

7. Determine a(s) raiz(es) da função $f_1(x)$, usando o método da Bisseção, Método da Falsa posição e da Falsa posição modificada com tolerância $\varepsilon = 1.10^{-3}$. Quantas iterações foram necessárias para cada um dos métodos.

8. Determine as raízes do exercício (6), usando o Método de Newton-Raphson.

9. Determine as raízes do exercício (6), usando o Método das Secantes.

10. Determine os pontos extremos do exercício (6), usando o Método de Newton-Raphson.

11. Determine o ponto de intersecção entre as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ e entre $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$.

12. O Teorema do Valor Médio, diz que para função diferenciável $f(x)$, existe um número $0 < \alpha < 1$, tal que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \alpha(x - a))$$

Considere $a = 0$; $\alpha = 1/2$ e $f(x) = \arctan(x)$. Determine o $x > 0$ que satisfaz a igualdade acima.

13. Sabe-se que se $x = \xi$ é uma raiz dupla de $f(x)$ então o Método de Newton-Raphson não converge quadraticamente. Mostre que se $f'(\xi) = 0$, mas todas as outras condições de convergência estão satisfeitas, então a iteração:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge quadraticamente.

14. Seja $x = \xi$ uma raiz de $f(x)$, tal que $f'(\xi) \neq 0$ e $f"(\xi) = 0$. Mostre que neste caso o Método de Newton-Raphson tem convergência cúbica.

15. Encontre todas as raízes reais do polinômio abaixo pelo método de Newton-Raphson.

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1.6$$

16. Uma pessoa tomou um empréstimo de A reais, que acrescenta os juros no total antes de computar o pagamento mensal. Assim, se a taxa mensal de juros, em porcentagem, é q e o empréstimo é pelo prazo de n meses, a quantia total que o tomador concorda em pagar é:

$$C = A + A.n.\,\frac{q}{100}.$$

Isto é dividido por n para dar o total de cada pagamento P, ou seja

$$P = \frac{C}{n} = A\Big(\frac{1}{n} + \frac{q}{100}\Big)$$

Isto é perfeitamente legal e muito usado em lojas de departamento .(É chamado o empréstimo com acréscimo). Mas a verdadeira taxa de juros que o tomador está pagando é alguma coisa além de $q\%$, porque ele não conserva o total do empréstimo por todos os n meses: Ele está pagando-o de volta com o decorrer do tempo. A verdadeira taxa de juros pode ser encontrada pela determinação de uma raiz x da equação:

$$F(x) = (Ax - P)(1 + x)^n + P = 0$$

Isto fornece a taxa de juros por período de pagamento, que pode ser convertida em taxa anual multiplicando-se a mesma por 12. Seja $A = R\$1000$, $n = 24$ e $q = 5\%$. Determine a verdadeira taxa de juros.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
Disciplina MAT 174 – Cálculo Numérico I

Lista de Exercícios

1) Quantas iterações são necessárias para calcular a raiz de $f(x) = e^x - x - 2$, que fica no intervalo (1,2), utilizando o método da Bisseção com erro absoluto $< 10^{-1}$?

2) Encontre as raízes das funções abaixo utilizando o método da Bisseção, usando cinco iterações. Informe o erro máximo cometido.

   a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$
   b) $f(x) = 2x - \cos x$
   c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

3) Calcule a raiz de $f(x) = x^3 + x - 100$ que fica no intervalo (4, 5) utilizando o método da Iteração Linear, erro relativo $< 10^{-2}$.

4) Considerando as funções polinomiais abaixo, faça:
   - Enumere as suas raízes positivas, negativas e complexas.
   - Calcule os limites superior e inferior das raízes positivas.
   - Separe e calcule as suas raízes reais positivas, com erro relativo $< 10^{-2}$.

   a) $f(x) = x^4 - 14x^3 + 24x - 10$
   b) $f(x) = 4x^3 + 1{,}5x^2 - 5{,}75x + 4{,}37$
   c) $f(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 7x + 15$
   d) $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x - 25$
   e) $f(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1$

5) Encontre ao menos uma raiz real das funções abaixo, com erro relativo $< 10^{-3}$, usando método da Falsa Posição (Regula Falsi):
   a) $f(x) = x^3 - x.e^x + 3$
   b) $f(x) = \operatorname{sen} x - \ln x$

6) Encontre as raízes das funções abaixo, com erro relativo $< 10^{-5}$, utilizando o método de Newton. Escolha um X_0 adequado.
   a) $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x + 4$
   b) $f(x) = 10^x + x^3 + 2$
   c) $f(x) = x^2 + e^{3x} - 3$

7) Considere $f(x) = x^3 - x - 5$, que possui um zero no intervalo (0, 3). Calcule a sua raiz com erro inferior a 10^{-2}, utilizando o método da Iteração Linear.

8) Encontre as raízes reais das funções abaixo com erro relativo inferior a 10^{-2}, usando o método da Iteração Linear:
   a) $f(x) = x^3 - \cos x$
   b) $f(x) = x^2 + e^{3x} - 3$
   c) $f(x) = 3x^4 - x - 3$
   d) $f(x) = e^x + \cos x - 5$

9) Calcule a raiz cúbica de 7, usando o método de Newton, com erro relativo inferior a 10^{-5}.

10) Utilize os métodos da Bisseção, Regula Falsi, Iteração Linear e de Newton, e calcule, com cada um deles, o valor de $\sqrt[7]{2359}$ com cinco casas decimais exatas.