

Disciplina de Cálculo Numérico

Prof: *Luis Allan Künzle*

DAINF / CPGEI

- 60 ou mais horas-aula;
- três provas;
- desenvolvimento de software matemático;
- aprendizado do uso e programação de uma ferramenta de cálculo matemático:
 - ~~Scilab~~ C++ / gnuplot
 - ~~http://www.inf.ufpr.br/scilab~~
- livro-texto: CÁLCULO NUMÉRICO - ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS, Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, 2a. edição, São Paulo, Makron Books, 1996. e Apoio' em <http://www.inf.ufpr.br/nicolu>
- laboratórios: Departamento Acadêmico de INFormática

A Matemática Computacional

cálculos numéricos manuais



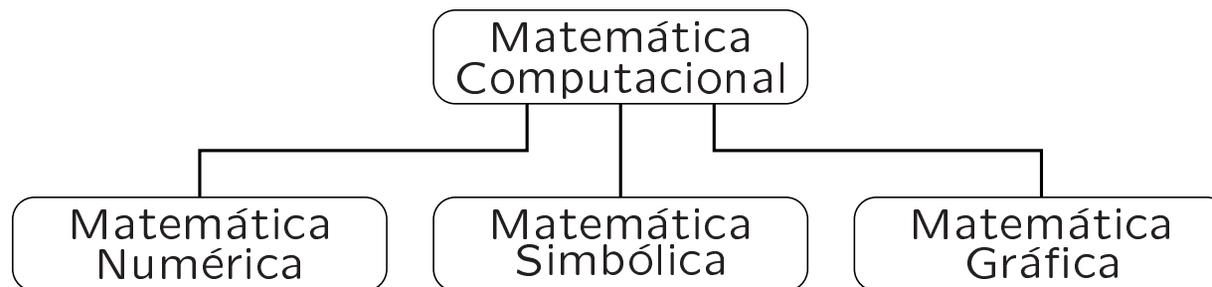
uso dos computadores na matemática



maior número de dados tratados;
maior velocidade de tratamento;
novos problemas e em maior número.

Problema: aritmética real \neq aritmética do computador
(p.ex. números irracionais)

Solução:



A Matemática Computacional

■ Matemática Numérica:

- desenvolvimento de *métodos operacionais construtivos* para a *resolução aproximada* de problemas que podem ser representados por um modelo matemático.

■ Matemática Simbólica:

- utiliza modelos de forma literal, buscando soluções analíticas exatas para os problemas matemáticos.

■ Matemática Gráfica:

- trabalha com dados de forma gráfica e busca representar a solução de seus problemas também na forma gráfica.

A Matemática Numérica

■ *Métodos operacionais construtivos* ➤ **algoritmos**

- apenas um sistema de operações elementares definidas “a priori”
- um número finito de passos
- os cálculos intermediários são usados para “construir” o resultado do processo.

■ **Objetivos da Matemática Numérica:**

- estudar processos numéricos (algoritmos) para a solução de problemas;
- obter os resultados com uma confiabilidade pré-definida (erro);
- garantir um desempenho satisfatório no processo de busca da solução (tempo de execução, memória utilizada).

A Matemática Numérica

Algoritmos: Sequência de instruções ordenadas de forma a encontrar pelo menos uma solução para um problema específico.

■ Características:

- número finito de instruções;
- quantidade limitada de esforço na sua execução;
- pode depender ou não de dados de entrada;
- deve produzir pelo menos um resultado final;
- deve ter apenas um ponto de entrada e pelo menos um ponto de parada.

■ Processamento numérico:

- operações numéricas;
- resultados numéricos.

Características dos Algoritmos Numéricos

1. Inexistência de Erro Lógico

Prever completa e exaustivamente todas as tendências do processo de execução do algoritmo, considerando as características das operações aritméticas e dos modelos matemáticos em questão.

Solução x^* da equação $a.x = b$

- $x^* = \frac{b}{a}$: ingênuo e incorreto
- `function[x*] = erro_logico(a,b)`

```
if a = 0 then
  if b = 0 then
    error('identidade'),
  else
    error('contradicao'),
  end if
else
   $x^* = \frac{b}{a}$ ,
end if
```

Características dos Algoritmos Numéricos

2. Inexistência de Erro Operacional

A não violação de restrições físicas da máquina. Este tipo de erro é detectado em tempo de execução.

Calcular $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $\sqrt{x^2 + y^2}$: podemos ter *overflow*
- `function[z] = erro_operacional(x,y)`

```
    if (x = 0) & (y = 0) then
```

```
        z = 0,
```

```
    else
```

```
        if |x| ≥ |y| then
```

```
            z = |x|.√1 + (y/x)2,
```

```
        else
```

```
            z = |y|.√1 + (x/y)2,
```

```
        end if
```

```
    end if
```

Características dos Algoritmos Numéricos

3. Quantidade finita de cálculos

Exemplo: Determinar pelo método de Newton uma raiz da

equação: $f(x) = \text{SIGN}(x) \cdot \sqrt{|x|}$

onde $\text{SIGN}(x)$ vale 1 se $x > 0$, 0 se $x = 0$ e -1 se $x < 0$.

■ `function[i, xi] = Newton(x0, γ)`

`while |f(xi)| > γ do`

`if f'(xi) ≠ 0 then`

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

`end if`

`end while`

■ `function[i, xi, MAX] = Newton(x0, γ)`

`while (|f(xi)| > γ) & (i < MAX) do`

`...`

`end while`



Características dos Algoritmos Numéricos

4. Existência de um critério de exatidão

Resultado \leftarrow Valor Aproximado \pm Limite de Erro

5. Independência da máquina

- o algoritmo deve ter portabilidade;
- as constantes devem ser utilizadas como instruções genéricas.

P.ex. constante de Euler:

- %e em Scilab;
- EXP(1) em Pascal.

Características dos Algoritmos Numéricos

6. Com precisão infinita, os limites de erro devem convergir à zero

Dependência entre a solução ideal em \mathcal{R} e a solução da máquina.

Exemplo: Dado $a \in \mathcal{R}$, determinar $x = \text{seno}(a)$

■ function $[x] = \text{seno}(a)$

$$x = 0 \pm 1$$

satisfaz os critérios de 1 à 5



Características dos Algoritmos Numéricos

7. Eficiência

Economia dos *recursos* envolvidos.

Eficiência \neq eficácia.

Recursos: fatores do processo de execução do algoritmo.

- tempo;
- exatidão;
- volume de dados;
- dificuldade de representação.

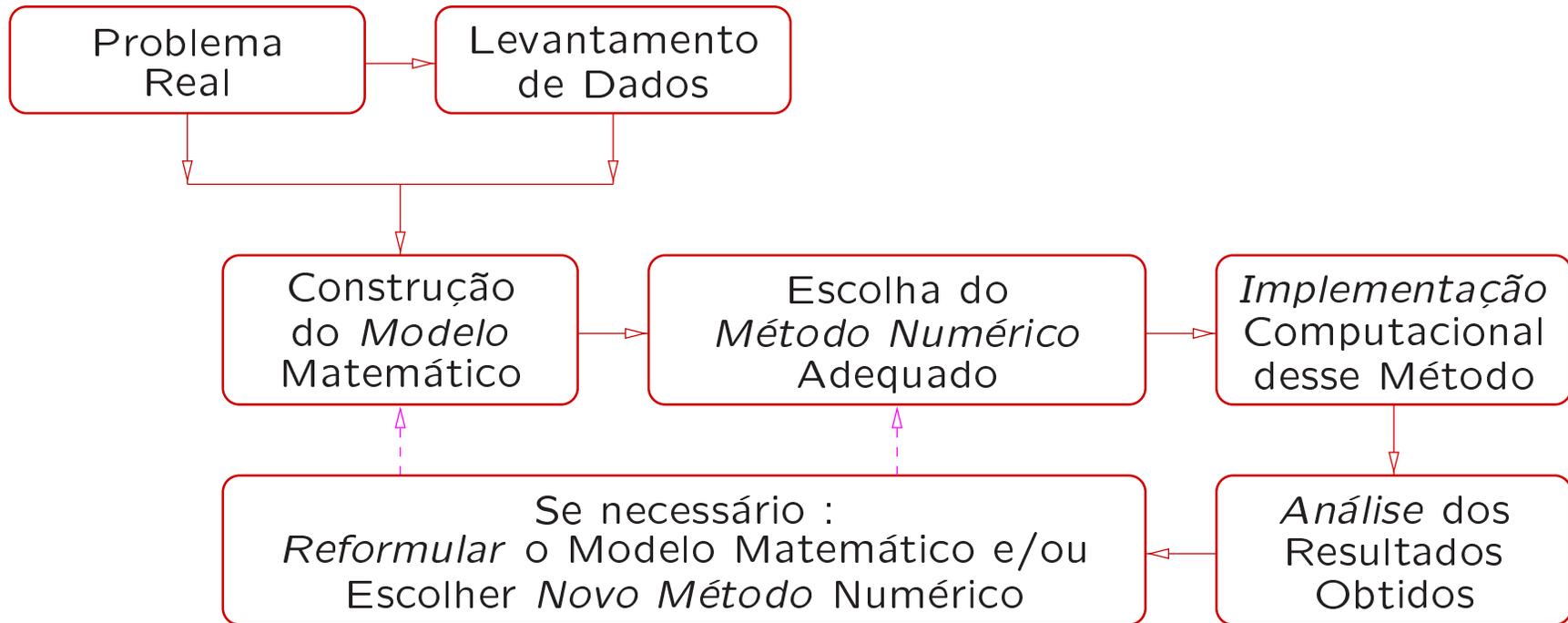
Características dos Algoritmos Numéricos

7. Eficiência

Solução de sistemas de equações lineares $n \times n$

	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
Cramer (determinantes por $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$)	2.5 s	3.4 dias	20 bilhões de anos
Cramer (determinantes por Laplace)	0.4 s	6 min	5 meses
Gauss (Método de Eliminação)	36 ms	0.22 s	1.5 s

Passos na Resolução de Problemas Numéricos



■ Elementos que influem no resultado :

- a precisão dos dados de entrada;
- a forma como os dados são representados no computador;
- as operações numéricas efetuadas.