# Métodos Numéricos - Notas de Aula

Profª Olga Regina Bellon

Junho 2007

# 2. Conceito de Erro

## 2.1. Introdução

- Erros estão presentes em todos os campos do cálculo numérico.
  - Dados em si nem sempre são exatos.
  - Operações sobre valores não exatos propagam esses erros a seus resultados.
- Erro = Diferença entre o valor exato e o apresentado.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.1. Introdução

- Métodos numéricos.
  - Métodos aproximados.
  - Buscam minimizar os erros.
  - Procuram resultados o mais próximo possível dos valores exatos.

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- Erros absolutos.
  - Diferença entre o valor exato de um número *N* e o seu valor aproximado *N'*.
    - $N = N' + EA_N$
    - $EA_N = N - N' \Rightarrow$ Erro absoluto

$$N > N' \rightarrow EA_N > 0$$

$$N < N' \rightarrow EA_N < 0$$



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- Erros absolutos.
  - Exemplo.
    - Sabe-se que $\Pi \in (3{,}14 ; 3{,}15)$.
    - Toma-se para $\Pi$ um valor neste intervalo.
      - Então:
        - $| EA_{\Pi} | = | \Pi - \Pi' | < 0{,}01$



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- Erros relativos.
  - Erro absoluto dividido pelo valor aproximado.

$$ER_N = \frac{EA_N}{N'} = \frac{\text{N-N'}}{N'}$$

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- Observações:
  - EAN só poderá ser determinado se N for exatamente conhecido.
  - Em cálculos numéricos costuma-se trabalhar com uma limitação máxima para erro, ao invés do próprio erro.
    - $| E | < \varepsilon$, onde $\varepsilon$ é o limite.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- Exemplo.
  - $\alpha = 2655{,}233$, deseja-se somente a parte inteira $\alpha'$
    - $\Delta\alpha = |\ \alpha - \alpha'\ | = 0{,}233$
  - $\beta = 10{,}233$
    - $\Delta\beta = |\ \beta - \beta'\ | = 0{,}233$
  - Em que caso o efeito de aproximação é maior?


IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- O efeito da aproximação de $\beta$ é muito maior do que em $\alpha$.
- O erro absoluto é o mesmo em ambos os casos.
- O erro relativo é o que melhor traduz o efeito da aproximação.
  - $\delta\alpha = 0{,}233 / 2655 \cong 0{,}00008775894$
  - $\delta\beta = 0{,}233 / 10 = 0{,}0233$


IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erros de Arredondamento

- Erro global:
  - diferença entre o exato e o obtido, os erros derivam:
    - dos valores iniciais.
    - dos valores intermediários.
    - dos valores finais.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erros de Arredondamento

- Erros iniciais:
  - Cometidos no arredondamento dos dados iniciais.
- Erros Intermediários:
  - Decorrentes dos erros cometidos durante a aplicação do método numérico.
- Erros finais:
  - Decorrem da apresentação final do resultado.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erros de Arredondamento

- Critério de arredondamento.
  - Ao registrar um valor aproximado, costuma-se usar a seguinte regra:
    - 1) Somar meia unidade após a última casa decimal a conservar.
    - 2) Desprezar as demais casas.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erros de Arredondamento

- Exemplo.
  - Com dois números significativos tem-se:
    - $\sqrt{3} = 1,732... \equiv 1,73 \rightarrow (1,732... + 0,005 = 1,737... \rightarrow 1,73)$
    - $\sqrt[3]{2} = 1,259... \equiv 1,26 \rightarrow (1,259... + 0,005 = 1,264... \rightarrow 1,26)$
  - Este critério limita o erro a meia unidade da última casa conservada:
    - $E = \sqrt{2} = 1,73 = 1,73205... - 1,73 = 0,00205 < 0,005$



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erros de Arredondamento

- Critério de Arredondamento
  - Os valores aproximados obtidos podem ser:
    - Inferiores aos exatos (valor aproximado por falta):
      - 1,73 é o valor aproximado por falto de $\sqrt{3}$
    - Superiores (valor aproximado por excesso):
      - 1,26 é o valor aproximado por excesso de $\sqrt[3]{2}$



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erros de Arredondamento

- Critério de Arredondamento.
  - É importante saber:
    - O número de dígitos significativos do sistema de representação da máquina.
      - Precisão do resultado obtido.
    - O Épsilon da máquina.
      - Exatidão da máquina.
      - É o menor número de ponto flutuante, tal que $1 + \varepsilon > 1$.
  - Exercício: Implementar o cálculo do $\varepsilon$ da máquina.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erro de Truncamento

- Provenientes da utilização de processos infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor.
  - Processos infinitos são muito utilizados na avaliação de:
    - exponenciação.
    - logaritmos.
    - funções trigonométricas.
    - ...



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.3. Erro de Truncamento

- Exemplo:
  - Cálculo da função ln(x+1).

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

  - Fazendo truncamento ???

$$\ln(x+1) \equiv x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

  - A solução é interromper os cálculos quando uma determinada precisão é atingida.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.5. Propagação de Erros

- Durante as operações aritméticas de um método, os erros dos operandos produzem um erro no resultado da operação.

IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.5. Propagação de Erros

- Sendo A e B os valores exatos, a e b os valores aproximados, Ea e Eb os erros dos operandos:
  - $A+B = (a+Ea)+(b+Eb)=a+b+Ea+Eb$

    $\therefore EA_{A+B}=Ea+Eb$
  - $A-B = (a+Ea)-(b+Eb) = a-b+Ea-Eb$

    $\therefore EA_{A-B} = Ea-Eb$
  - $A*B = (a+Ea) * (b+Eb) = ab + aEb + bEa + Ea * Eb \therefore EA_{A*B} = aEb + bEa + Ea * Eb$



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.5. Propagação de Erros

- As operações abaixo foram processadas em uma máquina com 5 dígitos significativos e fazendo-se $x_1 = 0{,}73491*10^5$ e $x_2 = 0{,}23645*10^0$ tem-se:

- $(x_2+x_1)-x_1 = (0{,}23645*10^0 + 0{,}73491*10^5) - 0{,}73491*10^5 = 0{,}73491*10^5 - 0{,}73491*10^5 = 0{,}00000$

- $x_2+(x_1-x_1) = 0{,}23645*10^0 + (0{,}73491*10^5 - 0{,}73491*10^5) = 0{,}23645 + 0{,}00000 = 0{,}23645$

  - Porque os dois resultados são diferentes, quando não deveriam ser?



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Exercício.

- Represente x em ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento nos seguintes casos:
  - x = 1/6.
  - x = 1/3.
  - x = -83784.
  - x = -83785.
  - x = 83798.
  - x = 0,0013296.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Exercício.

- Seja um sistema de aritmética de ponto flutuante cuja mantissa tenha t=3 dígitos, base $\beta$=10, m=-4 e M=4.

| x | Representação por arredondamento | Representação por truncamento |
|---|---|---|
| 1.25 | $0.125\times10$ | $0.125\times10$ |
| 10.053 | $0.101\times10^2$ | $0.100\times10^2$ |
| -238.15 | | |
| 2.71828 | | |
| 0.000000007 | | |
| 718235.82 | | |

IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Exercício.

- Dados $x = 0.937 \times 10^4$ e $y = 0.127 \times 10^2$, calcule $x + y$ para um sistema em que $t=4$ e $\beta=10$.

IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- Exercício
  - Medimos o comprimento, c, e a profundidade, p, de uma mesa e obtivemos os seguintes valores:
    - $c = (1{,}51 \pm 0{,}02)$m;
    - $p = (0{,}76 \pm 0{,}02)$m:
  - Qual é a melhor estimativa da área da mesa, e os erros relativo e absoluto nesse valor?



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# 2.2. Erros Absolutos e Relativos

- Exercício
  - Suponha que x = 5/7, y = 1/3 e que o método de truncamento em 5 dígitos seja utilizado para cálculos aritméticos envolvendo x e y. Calcule os erros relativos e absolutos das operações a seguir:
    - x+y
    - x-y
    - x*y
    - y/x



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Erros Arredondamento/Truncamento

- Exercício 1
  - Represente os números abaixo, por corte e por arredondamento, no sistema de ponto flutuante F(6,4,-2,3):
    - 0.0055555;
    - 1345.15;
    - 0.000123425;
    - 0.055555;
    - 13.053 .



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Erros Arredondamento/Truncamento

- Exercício 2
  - Consideremos um sistema de ponto flutuante com B = 10 e t = 3 e uma representação por arredondamento, verifique que:
    - a) (4210 – 4.99) – 0.02 ≠ 4210 – (4.99 + 0.02)
    - b) (0.123/ 7.97) * 84.9 ≠ (0.123 * 84.9) / 7.97
    - c) 15.9 * (4.99 + 0.02) ≠ (15.9 * 4.99) + (15.9 * 0.02)


IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Erros Arredondamento/Truncamento

- Exercício 3
  - Consideremos um equipamento com o sistema de ponto flutuante normalizado SPF (b, t, expmín, expmáx) = SPF (10, 4, –5, 5). Sendo a = $0.5324 \times 10^{3}$ , b = $0.4212 \times 10^{-2}$ e c = $0.1237 \times 10^{2}$, represente o resultado de a*b e a+c arredondado e truncado.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Erros Arredondamento/Truncamento

- Exercício 4
  - Consideremos um equipamento com o sistema de ponto flutuante normalizado SPF (b, t, expmín, expmáx) = SPF (10, 4, –6, 6). Sendo a = $0.937 \times 10^4$ , b = $0.1272 \times 10^2$ , represente o resultado de a+b e a*b arredondado e truncado.



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Propagação de Erros

- Exercício 5
  - Suponha-se que as operações a seguir sejam processadas em uma máquina com 4 dígitos significativos e fazendo-se: $x = 0{,}3491 \times 10^4$ e $y = 0{,}2345 \times 10^0$, faça:
    - $(y + x) - x$
    - $y + (x - x)$

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Propagação de Erros

- Exercício 6
  - Dados $a = 50 \pm 3$ e $b = 21 \pm 1$, calcular $a + b$, $a - b$ e $a * b$.

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens



IMAGO
Grupo de Pesquisa em Visão Computacional, Computação Gráfica e Processamento de Imagens