Métodos Numéricos - Notas de Aula

Prof[a] Olga Regina Bellon

Junho 2007

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Tipos de Métodos
  - São dois os tipos de métodos para se achar a(s) raízes de uma equação:
    - Método direto
      - Fornece solução em apenas um único passo.
      - Esta raiz é exata, a menos de erros de arredondamento.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Exemplo - Método direto

  - Seja, $F(x) = x^2 - 3x + 2$
  - A solução direta pode ser obtida através da fórmula de Baskara através da expressão:

$$x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}\right)}{2a}$$

    - Conjunto solução: { 1 , 2 }

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Tipos de Métodos
  - Método iterativo ou indireto
    - Processo de cálculo infinito, recursivo.
    - O valor obtido a cada passo depende de valores obtidos em passos anteriores.
    - Na maioria das vezes não obtem solução exata para as raízes.
    - A solução é uma aproximação dentro de uma faixa de erro aceitável.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Exercício - Método indireto
  - Calcular $\sqrt{4}$ usando o método de Newton definido por:

$$x_n = \frac{\left(\dfrac{x}{x_{n-1}} + x_{n-1}\right)}{2}$$

- onde:
  - x = o número a ser calculada a raiz.
  - x_0 = atribuição inicial qualquer.
  - Iniciar $x_0 = 1$.
  - Para n = 1, 2, 3, ...

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Obtenção de Raízes
  - Equações do segundo grau
    - Solução facilmente obtida.
  - Equações transcedentes
    - Solução não é tão simples.
      - $e^x + x = 0$
      - $\ln(x) + x - 2 = 0$
  - Polinômio de grau maior que três
    - Solução algébrica também não é tão simples.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Natureza das raízes
  - Freqüentemente as equações levam a raízes reais não racionais.
  - São representadas de forma aproximada no computador (infinitos dígitos na mantissa).
  - Possuem uma determinada precisão, com um erro tolerável.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Métodos numéricos
  - Partem de valores inicialmente propostos.
  - Buscam aprimorar tais valores iniciais.
  - Visam diminuir os erros, aproximando-se dos valores das raízes procuradas.
  - Devem garantir que os erros ocorram dentro de uma margem aceitável, inferiores a valores pré-definidos.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Cálculo das raízes

  - Duas etapas devem ser seguidas:

    - 1) Isolar a raiz

      - Achar um intervalo [a,b].
      - O intervalo deve ser o menor possível.
      - O intervalo deve conter uma e somente uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Cálculo das raízes
  - 2) Melhorar o valor da raiz aproximada
    - Refinar a raiz até o grau de exatidão requerido.
    - Através de abordagem iterativa determinar um intervalo inicial.
    - Dentro do intervalo construir a seqüência $\{x_i\}$.
    - A raiz x' será dada por:

$$x' = \lim_{i \to \infty} x_i$$

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

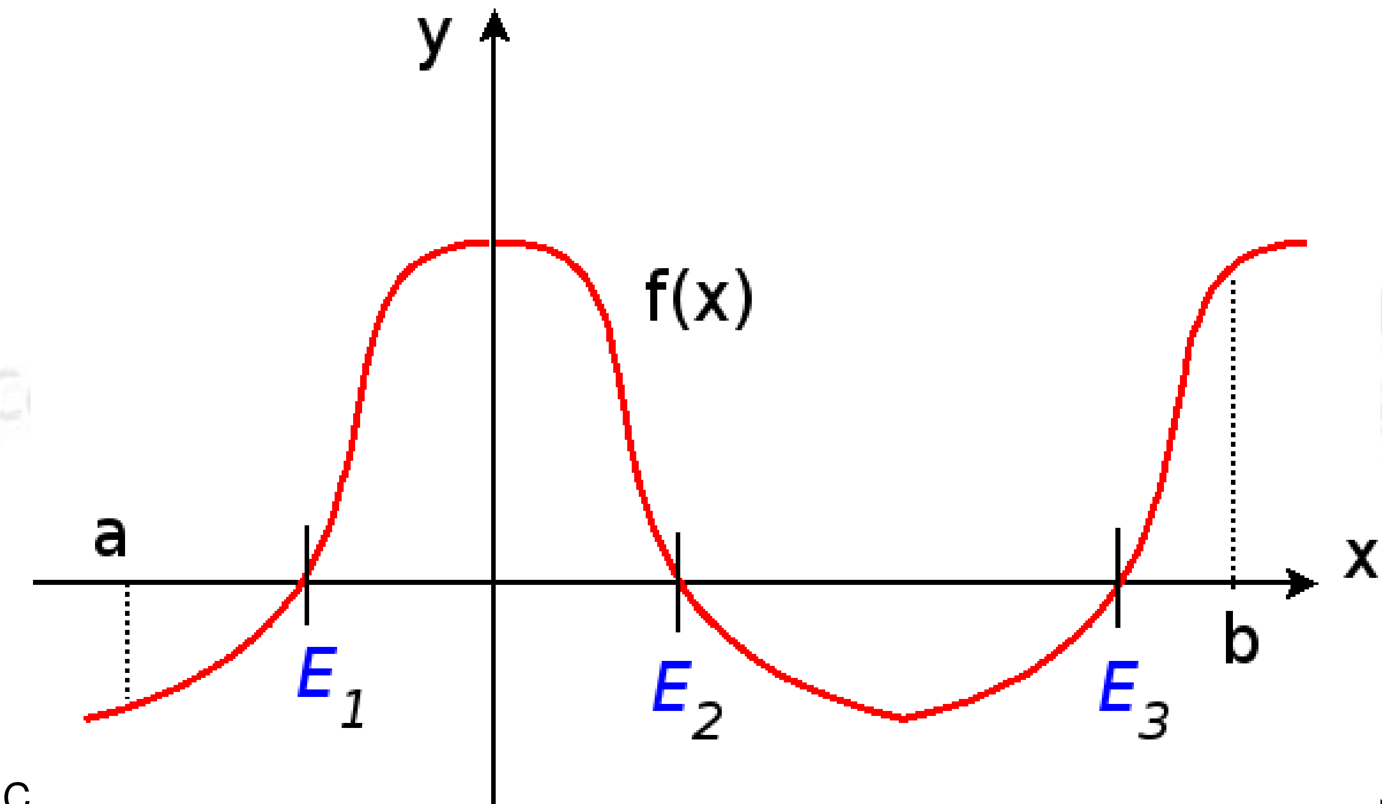
- Cálculo das raízes
  - Além das duas etapas anteriores é importante:
    - Estipular critérios de parada:
      - Na prática não se calcula infinitos termos.
      - Calcula-se apenas o suficiente para atingir a exatidão desejada.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Isolamento de raízes
  - Análise teórica e gráfica da função f(x)
    - Teorema:
      - f(x) contínua num intervalo [a,b].
      - f(x) com sinais opostos nos pontos extremos deste intervalo $\rightarrow$ $f(a)*f(b) < 0$.
      - O intervalo contém no mínimo, uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Isolamento de raízes
  - Ou seja, existe no mínimo, um número $E \in$ (a,b) tal que f(E) = 0.

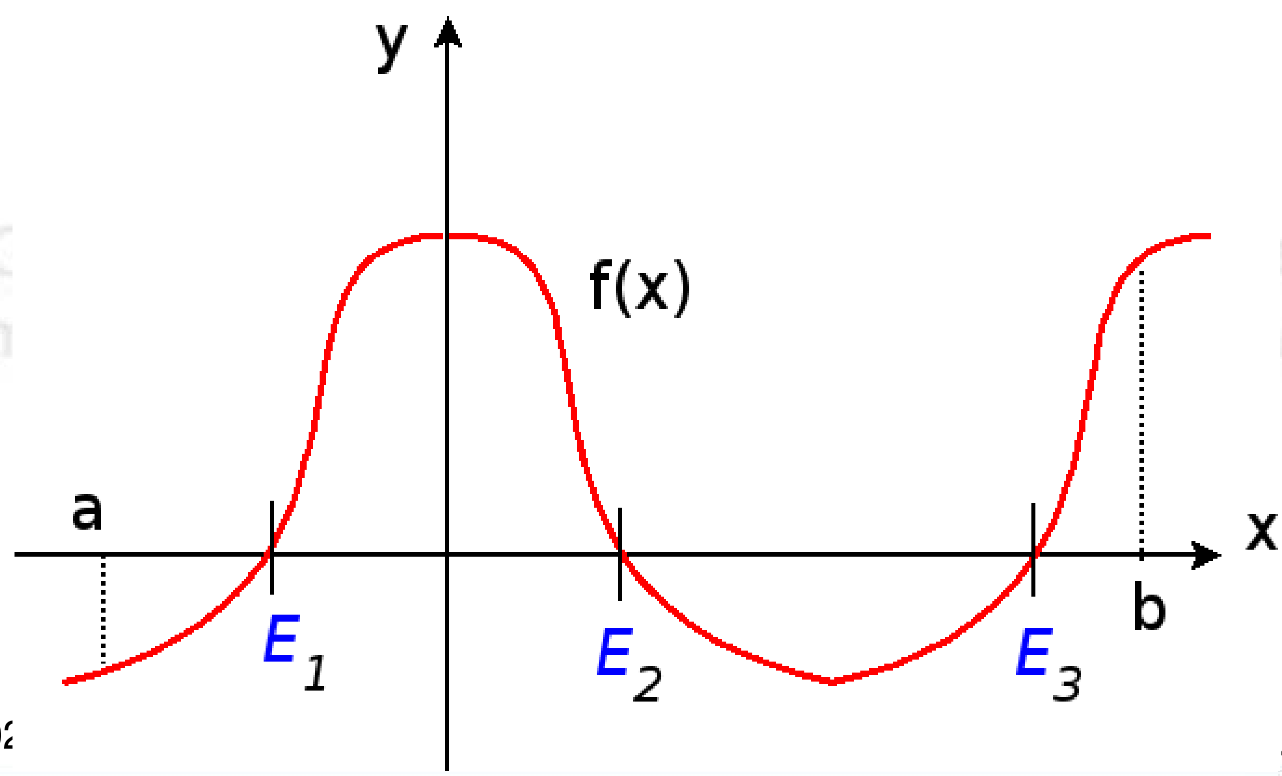


Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Número de raízes reais no intervalo delimitado.
  - Teorema de Bolzano
    - Seja f(x) = 0 uma equação algébrica com coeficientes reais.
      - $x \in (a,b)$.

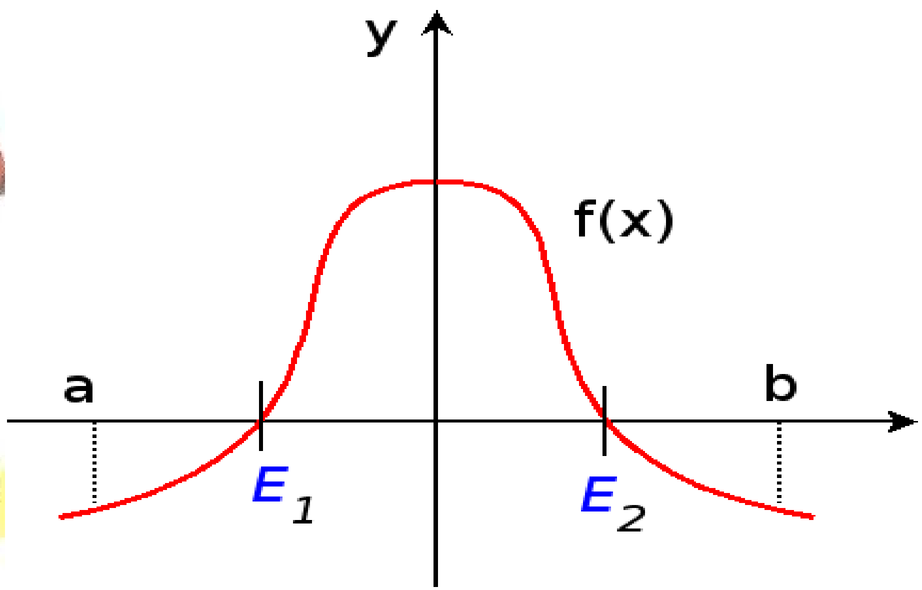
Zeros de equações transcendentes e polinomiais

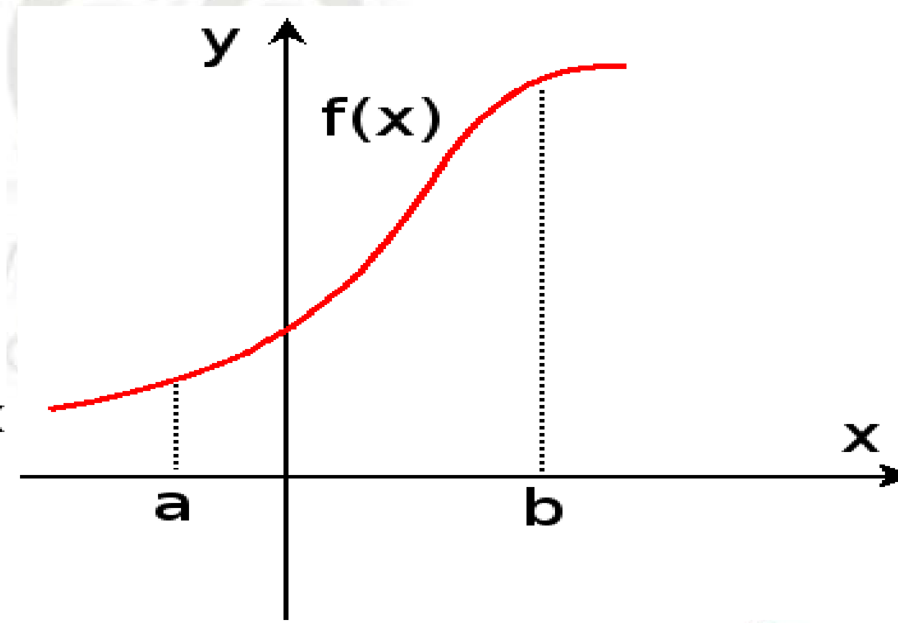
- Número de raízes reais no intervalo (a,b).
  - Se f(a) * f(b) < 0, então existe um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades).



Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Se f(a) * f(b) > 0, então existe um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existe raízes.





Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Refinamento
  - Isola-se a raiz no intervalo [a,b].
  - Calcula-se a raiz através de métodos numéricos.
  - Os métodos fornecem uma seqüência $\{ x_i \}$ de aproximação.
  - A seqüência é limitada à raiz exata ε.

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Refinamento
  - Em cada aproximação x_n
    - Verificar se x está “suficientemente” próximo da raiz através de dois modos diferentes.
      - $| f(x_n) | \leq \varepsilon$ (abordagem pelo eixo y).
      - $| x_n - x_{n-1} | \leq \varepsilon$ (abordagem pelo eixo x).

Métodos Numéricos

- Refinamento
  - Observação
    - Dependendo dos números envolvidos é aconselhável usar os testes de erro relativo.
    - $$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{x_{n-1}} \leq \varepsilon$$

Métodos Numéricos

- Classificação dos métodos
  - Métodos de quebra
    - Mais intuitivos geometricamente.
    - São os que convergem mais lentamente.
    - Particiona o intervalo que contém a raiz em outros menores que ainda contenham a raiz.
      - Método da Bisseção.
      - Método da Falsa Posição.

Métodos Numéricos

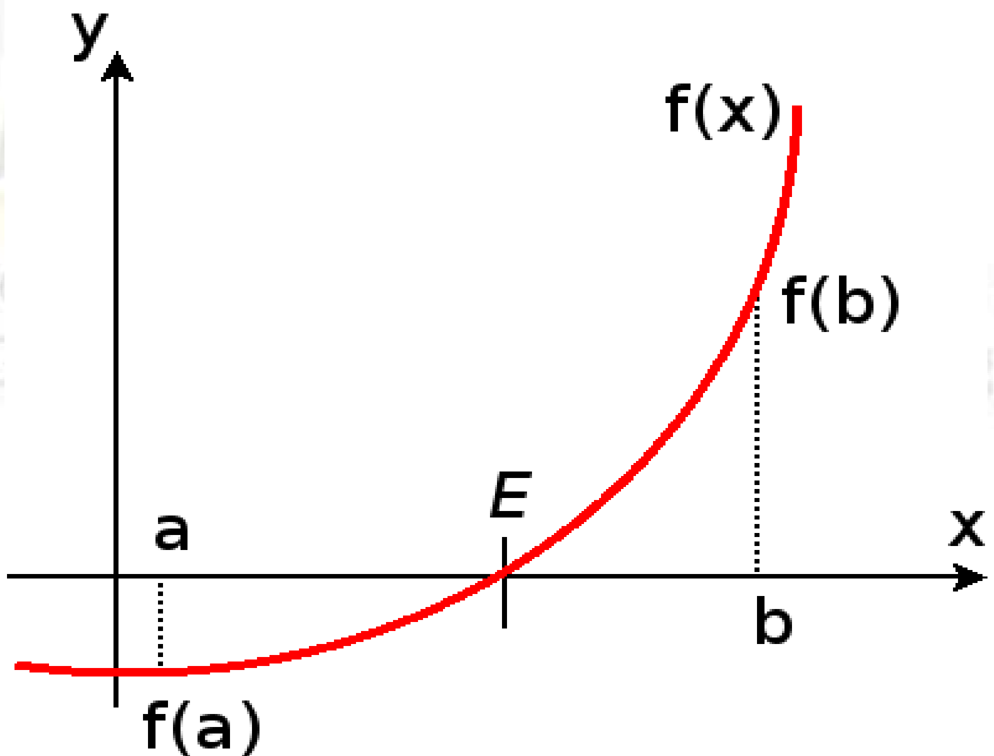
- Classificação dos métodos
  - Métodos de ponto fixo
    - Começam de uma aproximação inicial x_0.
    - Constrói-se a seqüência $\{ x_i \}$.
    - Cada termo é dado por $x_{i+1} = \xi (x_i)$.
    - ξ é uma função de iteração.
      - Método de Newton-Raphson.
      - Método da Iteração Linear.

Métodos Numéricos

- Classificação dos métodos
  - Métodos de múltiplos pontos
    - Constituem uma generalização dos métodos de ponto fixo.
    - Para determinar um ponto x_{i+1} utiliza-se vários. pontos anteriores: x_i, x_{i-1}, ... , x_{i-p}.
      - Método da secante.

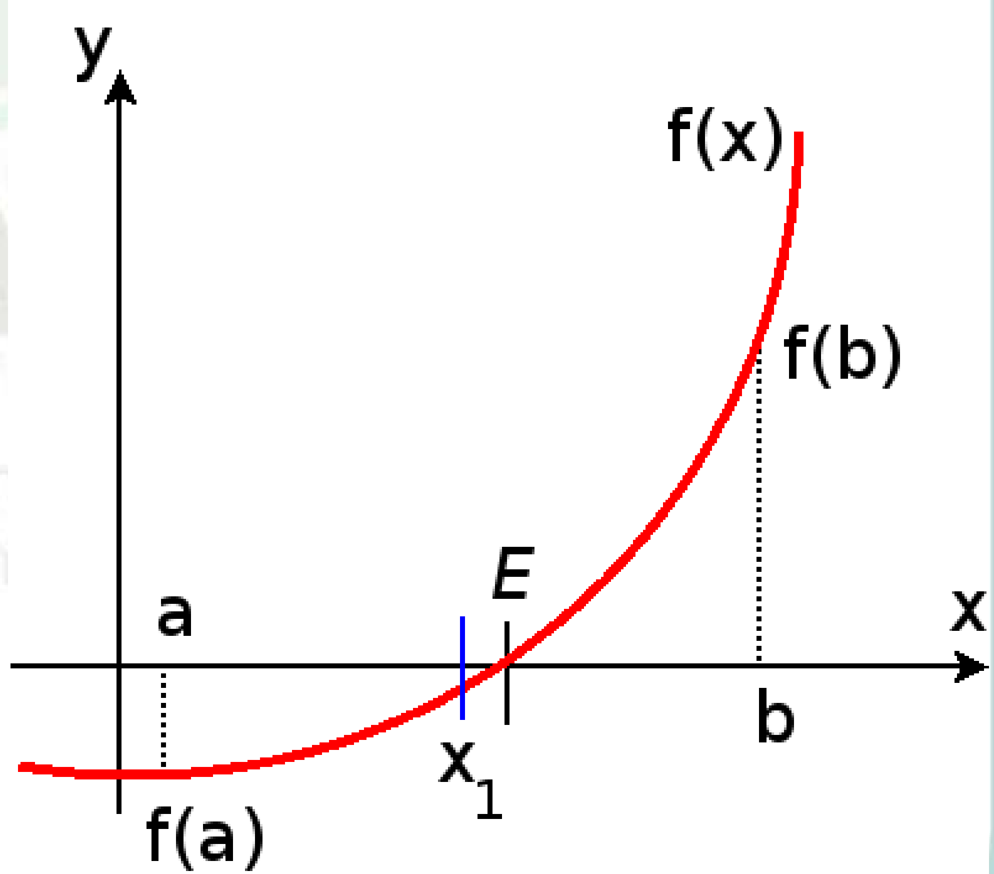
Métodos Numéricos

- Método da Bisseção
  - Seja F(x) uma função contínua definida no intervalo [a,b].
  - Seja *E* uma raiz da função, $E \in (a,b)$ tal que F(*E*) = 0.



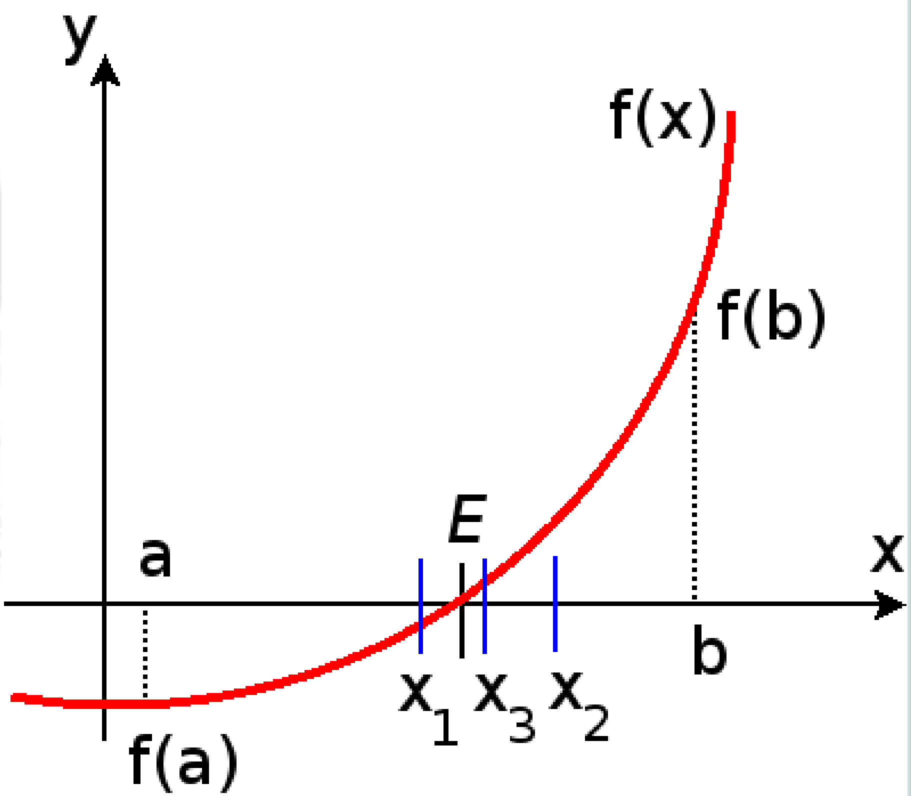
Métodos Numéricos

- Método da Bisseção
  - Divide-se o intervalo [a,b] ao meio, obtém-se x_1.
  - Dois subintervalos:
    - $[a,x_1]$
    - $[x_1,b]$
    - Se $f(x_1) = 0$
      - Então $E = x_1$
    - Senão...



Métodos Numéricos

- Método da Bisseção
  - Senão, a raiz estará no subintervalo onde a função tem sinais opostos nos pontos extremos.
    - Se $f(a).f(x_1) < 0$
      - $E \in [\, a , x_1 \,]$.
    - Senão $f(a).f(x_1) > 0$
      - $E \in [\, x_1 , b \,]$.
    - O processo se repete até que o critério de parada seja satisfeito.



Métodos Numéricos

- Método da Bisseção
  - Algoritmo: $$x_n = \frac{a+b}{2},\ para\ n = 1, 2, 3, \ldots$$
    - Se $f(a) \cdot f(x_n) < 0$, então $b = x_n$
    - Senão, $a = x_n$
  - Critério de Parada:
    - $| f(x_n) | \leq$ erro.
    - ou, $| b - a | \leq$ erro.
  - Restrição:
    - Deve-se conhecer um intervalo que contenha o valor desejado *E.*

Métodos Numéricos

- Método da Bisseção
  - Considerações Finais
    - As iterações não envolvem cálculos laboriosos.
    - Apesar de teoricamente seguro, pode ter falhas.
    - Pode ser difícil encontrar um intervalo [a,b], tal que $f(a).f(b) < 0$, em equações com raízes de multiplicidade par ou muito próximas.

Métodos Numéricos

- Método da Bisseção
  - Considerações Finais
    - A convergência é muito lenta.
    - Deve ser utilizado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz.

Métodos Numéricos

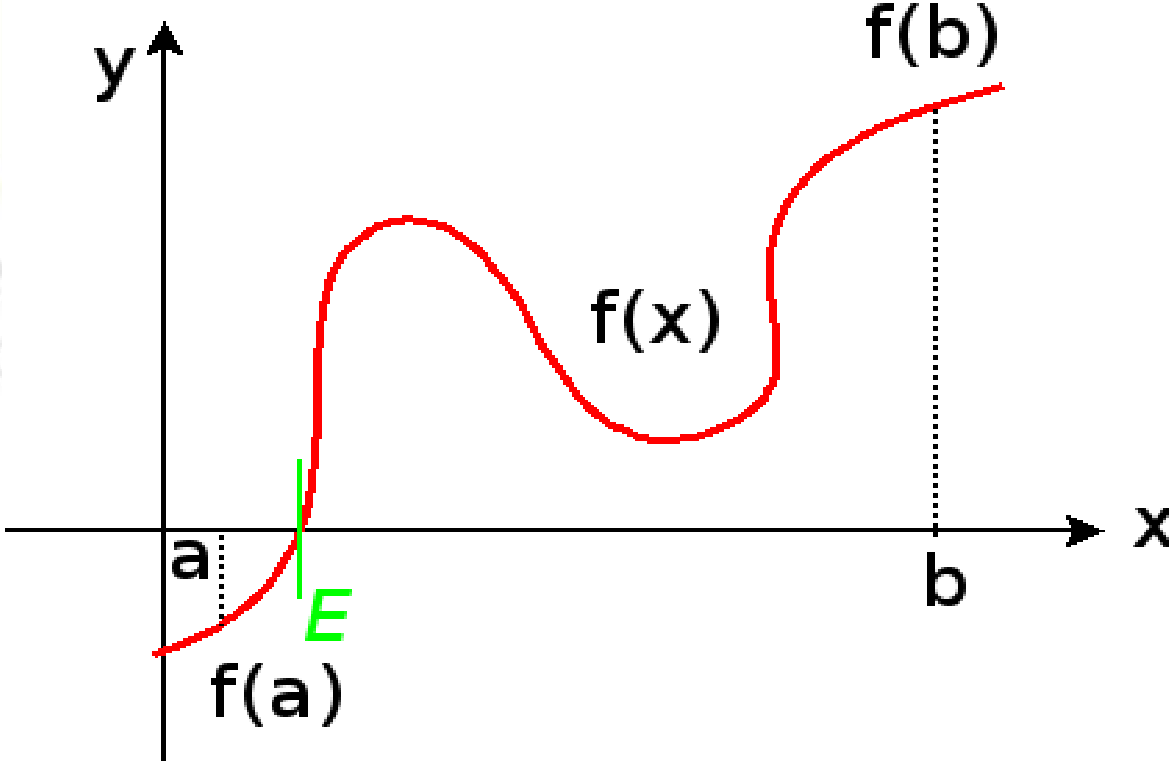
- Método da Bisseção
  - Exemplo
    - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = e^x + x$, com erro menor ou igual a 0,050.
  - $x_4 = -0,625 + (-0,563) / 2 = -0,594$

Métodos Numéricos

- Método da Bisseção
  - Exercicio
    - Como poderia ser usado o método da bisseção para estimar o valor de $\sqrt{7}$?
    - Estime esse valor com uma precisão de (ou erro menor que) 0,02.
  - $x_6 = 2,625 + (2,65625) / 2 = 2,6406$

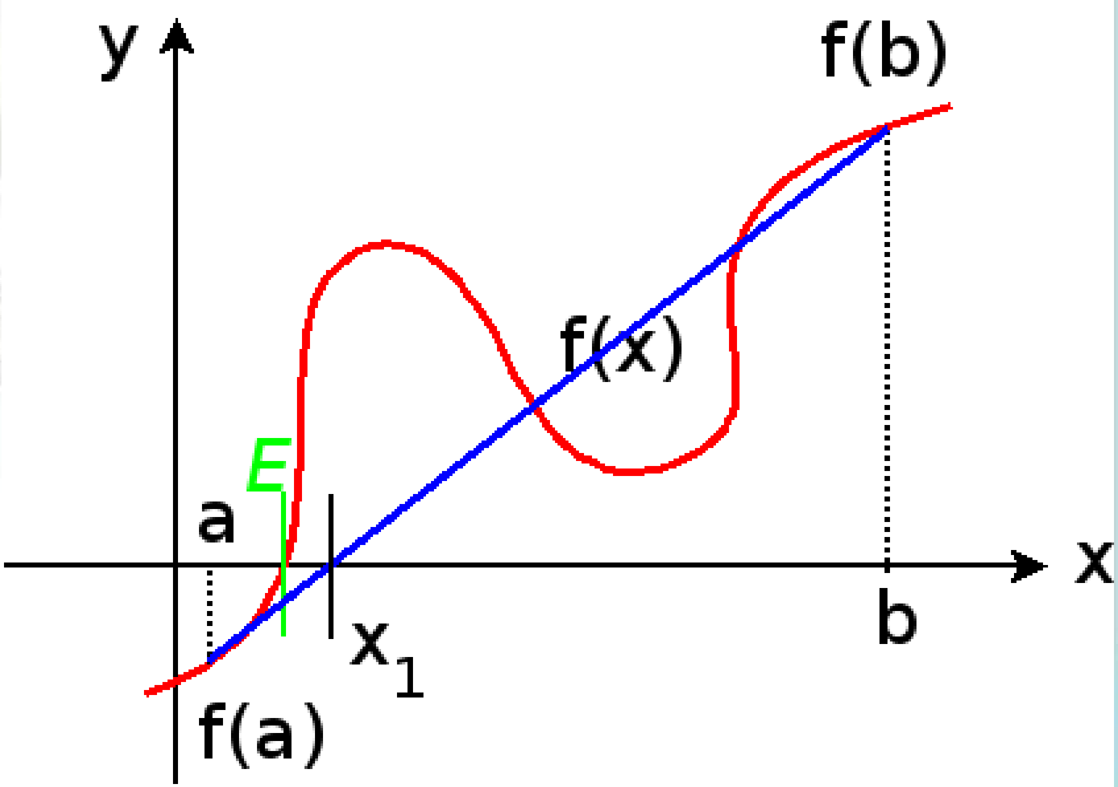
Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Seja F(x) uma função contínua definida no intervalo [a,b].
  - Seja E uma raiz da função, $E \in (a,b)$ tal que $F(E) = 0$.



Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Divide-se o intervalo [a,b] na intersecção da reta que une os pontos (a,f(a)) e (b,f(b)) com o eixo x, obtém-se x_1 e dois subintervalos.
    - $[a,x_1]$ e $[x_1,b]$.
  - Se $f(x_1) = 0$.
    - Então $E = x_1$
  - Senão...

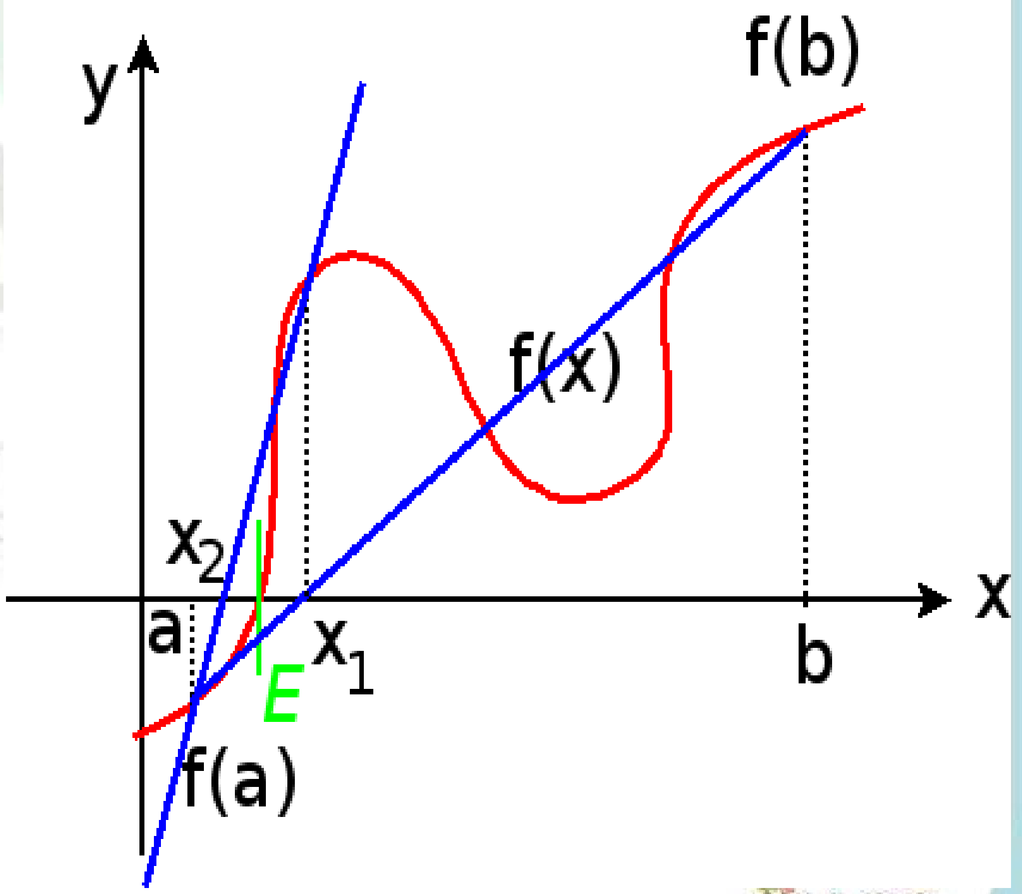


Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição

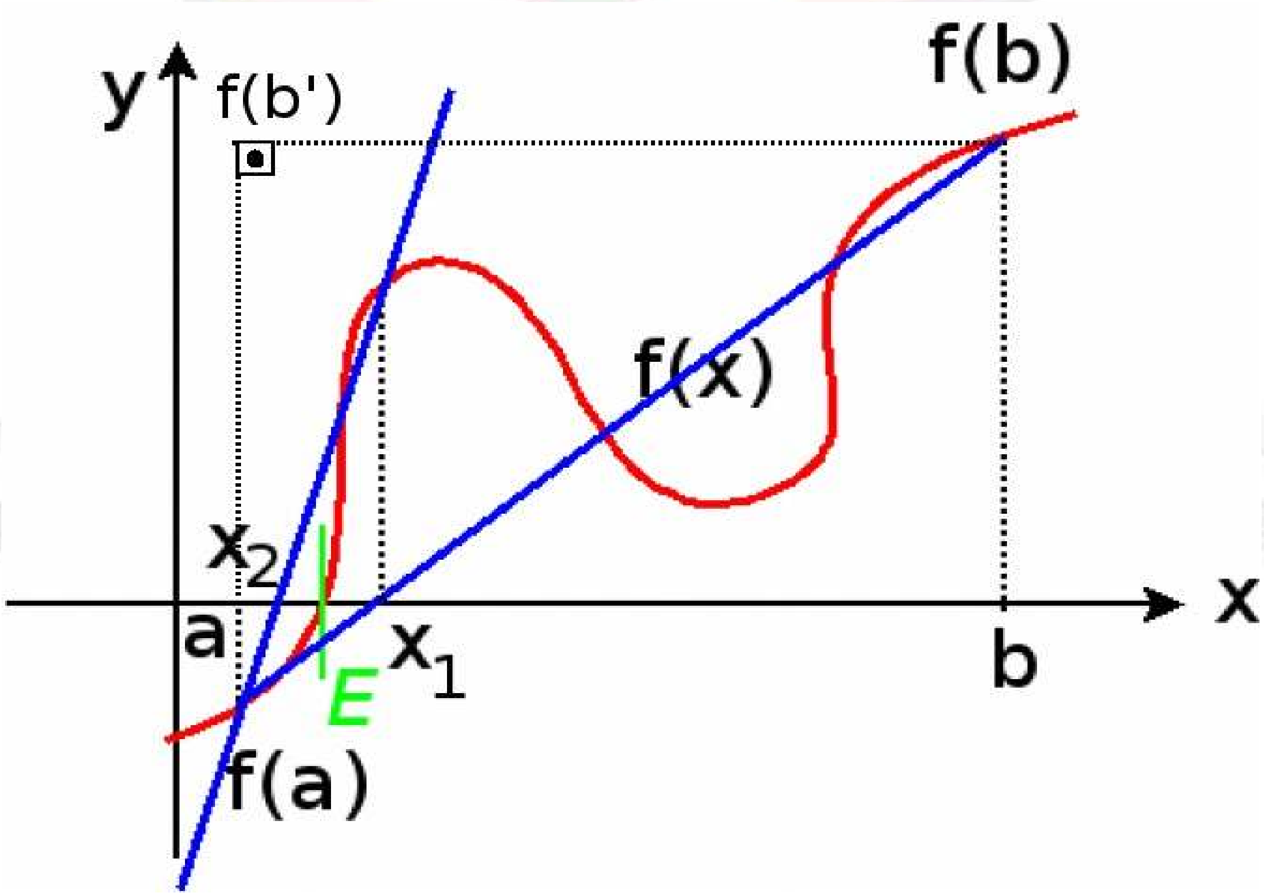
  - Senão, a raiz estará no subintervalo onde a função tem sinais opostos nos pontos extremos.
    - Se $f(a).f(x_1)<0$
      - $E \in [\, a , x_1 \,]$.
    - Senão $f(a).f(x_1)>0$
      - $E \in [\, x_1 , b \,]$.

  - O processo se repete até que o critério de parada seja satisfeito.



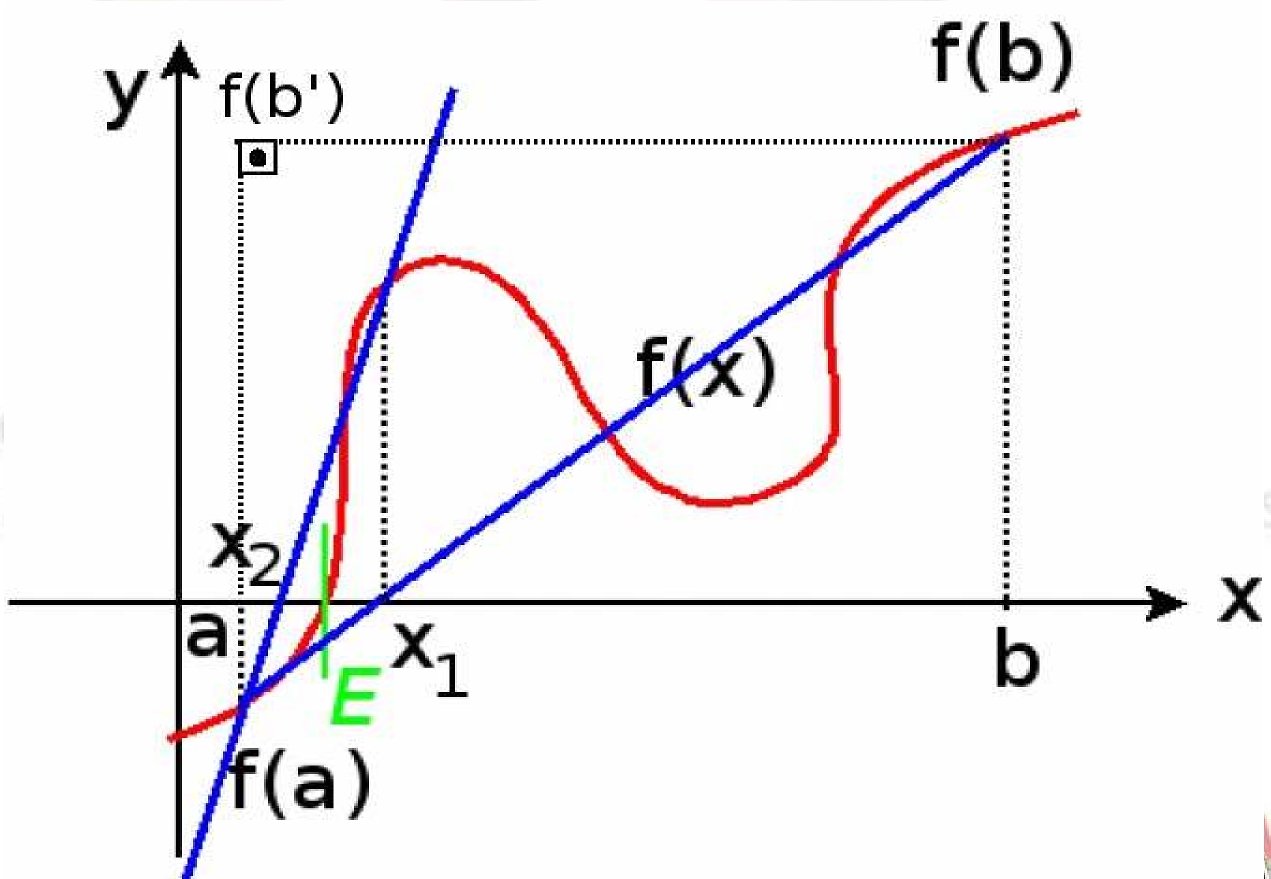
Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - O algoritmo deste método pode ser encontrado através da análise dos triângulos formados pela reta (a,f(a)) e (b,f(b)) com o eixo x.



Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Seja o triângulo $f(a)x_1a$ e o triângulo $f(a)f(b)f(b')$, então, pela propriedade da semelhança de triângulos temos:



Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição

$$\frac{b-a}{x_1-a}=\frac{f(b)-f(a)}{-f(a)} \quad \therefore$$

$$\frac{b-a}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{-f(a)} \therefore$$

$$x_1-a=\frac{(b-a)(-f(a))}{f(b)-f(a)} \therefore$$

$$x_1=a-\frac{(b-a)(f(a))}{f(b)-f(a)}$$

Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Algoritmo: $x_n = a - \frac{(b-a).f(a)}{f(b)-f(a)}$, $para\, n = 1, 2, 3, ...$
    - Se $f(a) . f(x_n) < 0$, então $b = x_n$
    - Senão, $a = x_n$
  - Critério de Parada:
    - $| x_n - x_{n-1} | \leq erro$ ($x_0 = a$ ou $x_0 = b$).
  - Restrição:
    - Deve-se conhecer um intervalo que contenha o valor desejado *E*.

Métodos Numéricos

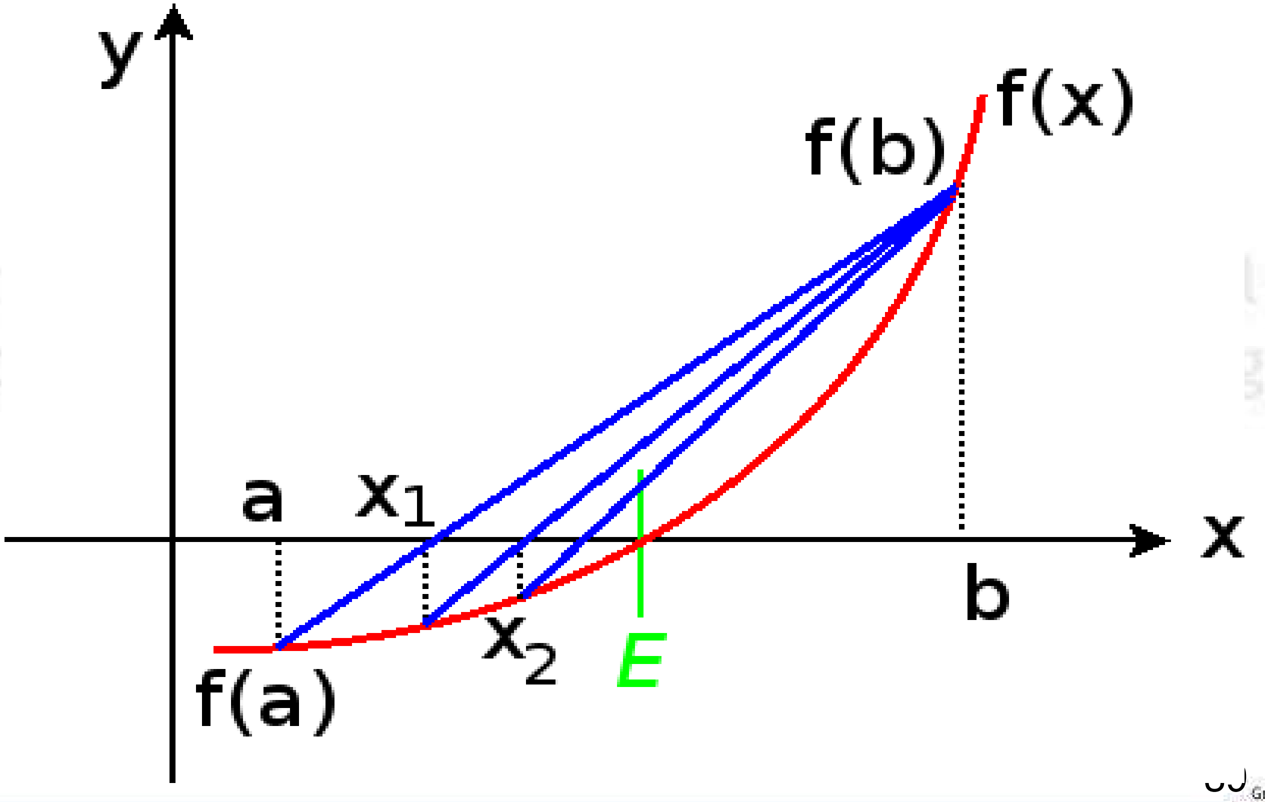
- Método da Falsa Posição
  - Casos especiais
    - Se f(x) é continua no intervalo [a , b] com f(a).f(b) < 0 então o método gera uma seqüência convergente.

Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Casos especiais
    - Se f(x) é concava ou convexa em [a,b];
    - a segunda derivada existe em [a , b];
    - e f''(x) não muda de sinal nesse intervalo.
      - Tem-se sempre uma das extremidades fixas.
      - Este caso especial chama-se Método das Cordas.

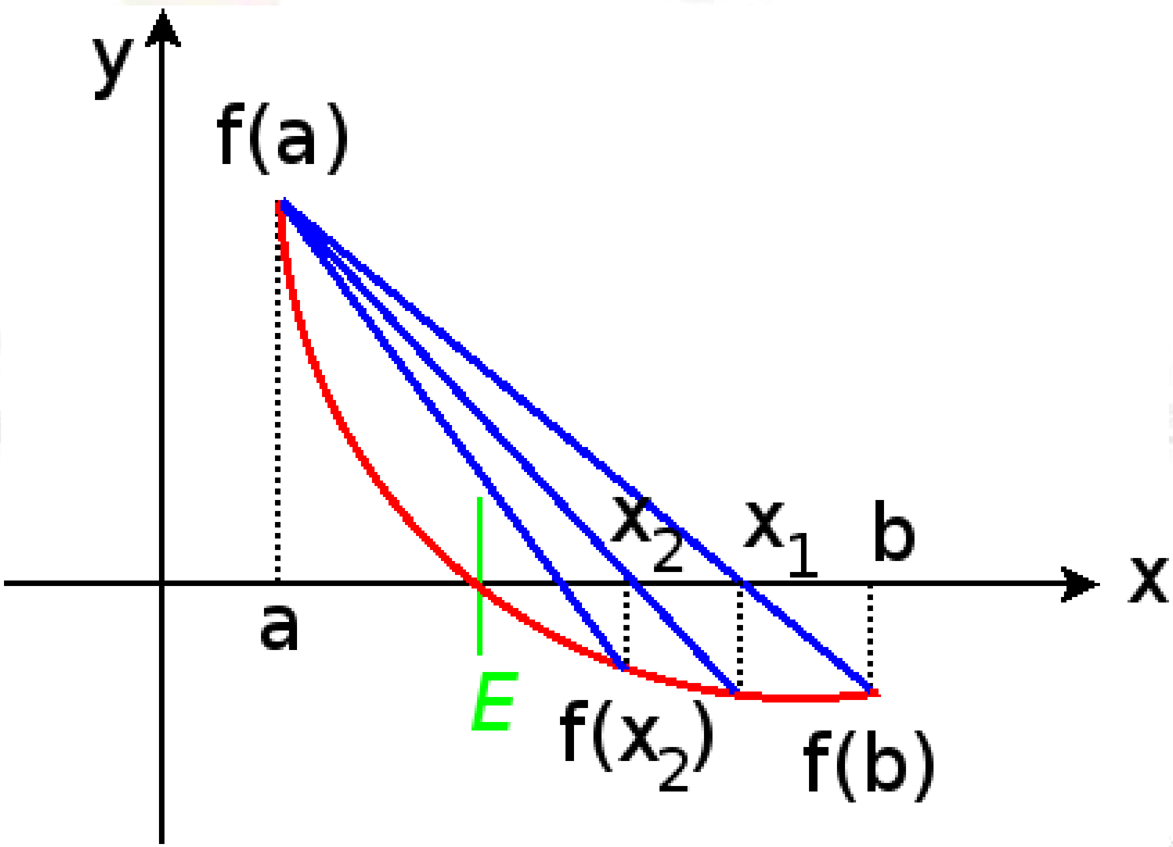
Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Casos especiais - As figuras a seguir mostram graficamente os quatro casos que podem ocorrer.
    - $f''(x)>0$, $f(a)<0$ e $f(b)>0$ → b é ponto fixo.



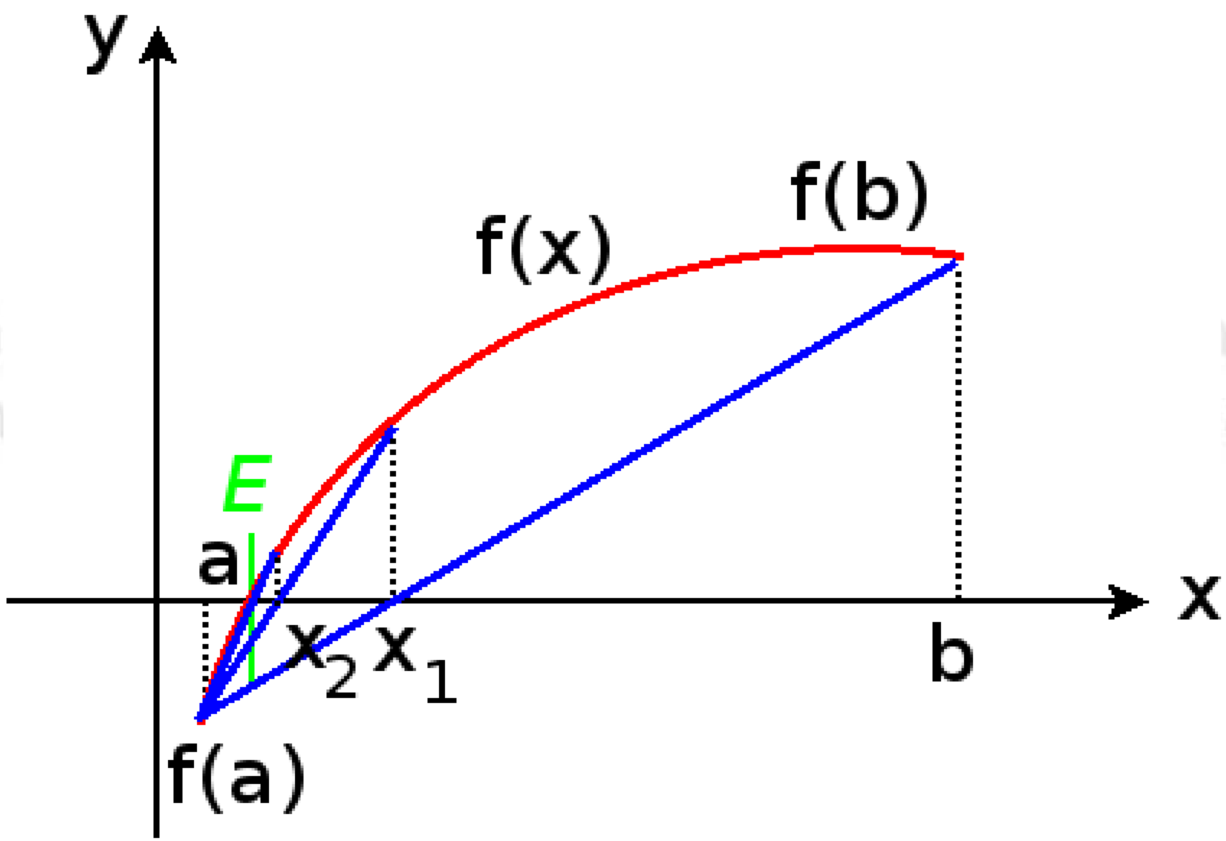
Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Casos especiais
    - f''(x)>0, f(a)>0 e f(b)<0 $\rightarrow$ a é ponto fixo.



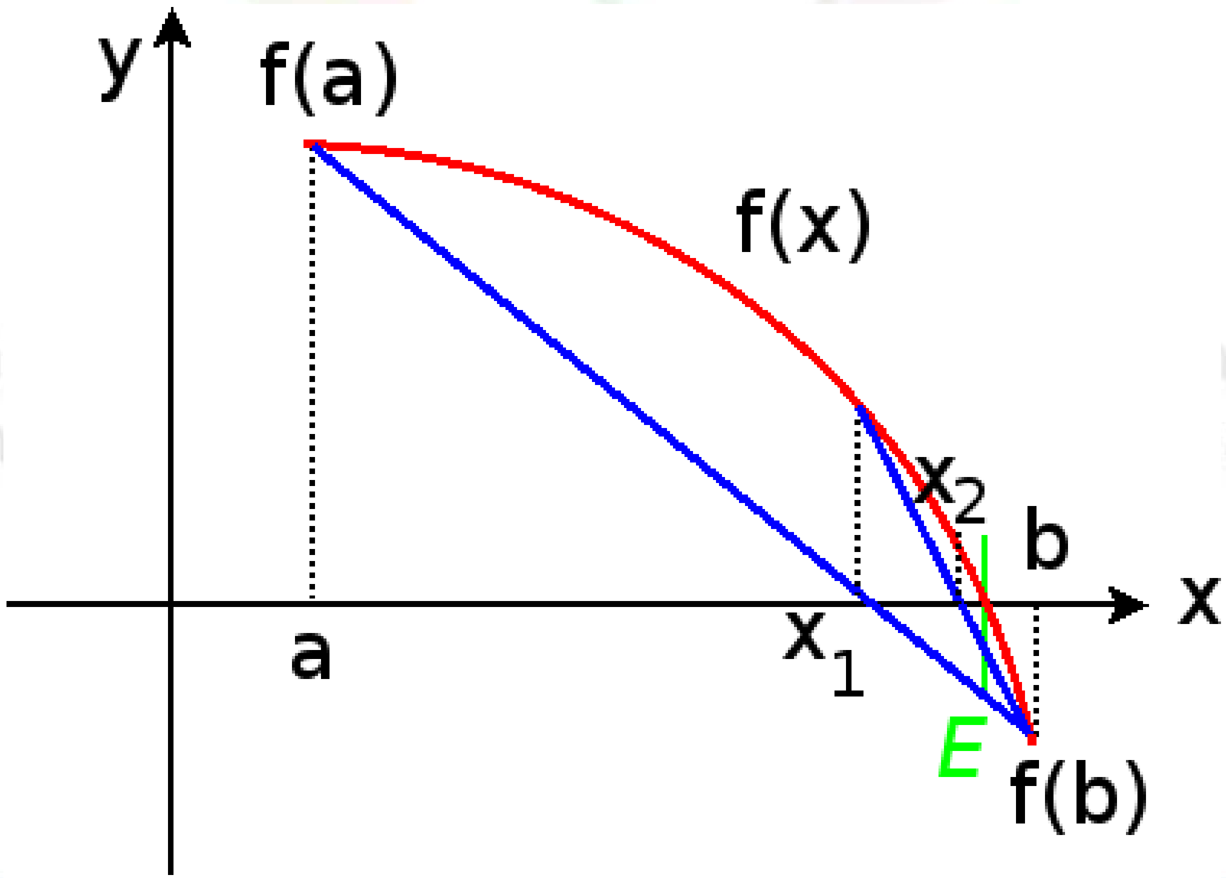
Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Casos especiais
    - $f''(x)<0$, $f(a)<0$ e $f(b)>0$ $\rightarrow$ a é ponto fixo.



Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Casos especiais
    - f''(x)<0, f(a)>0 e f(b)<0 → b é ponto fixo.



Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Considerações Finais
    - Se o ponto fixo existir e for razoavelmente próximo da raiz,
      - o método tem boa convergência.
    - Caso contrário,
      - pode ser mais lento que o da bisseção.

Métodos Numéricos

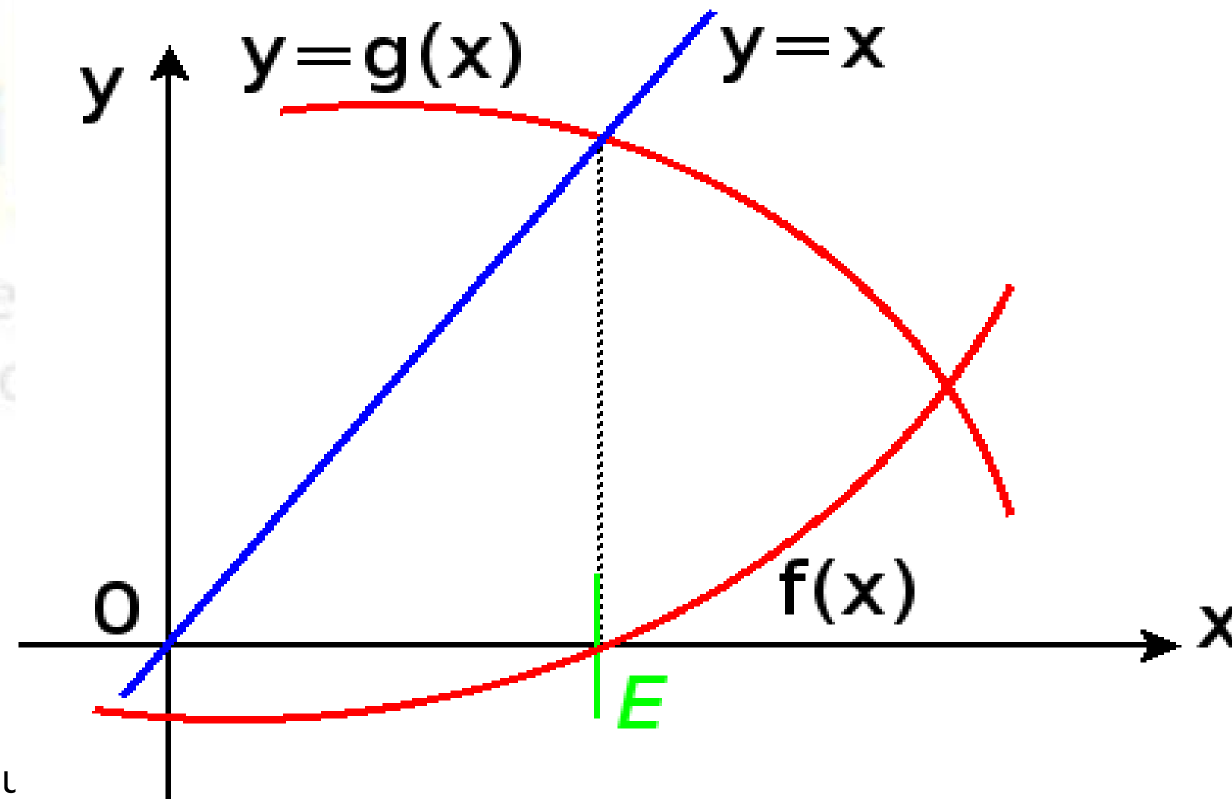
- Método da Falsa Posição
  - Exemplo 1
    - Encontrar a menor raiz positiva da função de quarto grau $f(x) = x^4 - 26x^2 + 24x + 21$ até que o erro absoluto seja igual ou inferior a 0,01. Os cálculos devem ser efetuados com 2 casas decimais e com arredondamento.
  - Resposta $E = 1{,}59$ é a primeira raiz positiva do polinômio.

Métodos Numéricos

- Método da Falsa Posição
  - Exemplo 1
    - a) Algoritmo: $$x_n = a - \frac{(b-a).f(a)}{f(b)-f(a)}$$
      - $f(x) = x^4 - 26x^2 + 24x + 21$
      - $f'(x) = 4x^3 - 52x + 24$
      - $f''(x) = 12x^2 - 52$

Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear (método do ponto fixo)
  - Seja F(x) uma função contínua definida no intervalo [a,b].
  - Seja *E* uma raiz da função, $E \in (a,b)$ tal que $F(E) = 0$.



Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear (método do ponto fixo)
  - Por um artifício algébrico, pode-se transformar f(x)=0 em duas funções que lhe sejam equivalentes.

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}$$

  - Onde g(x) é chamada de função de iteração.
  - Sendo x_0 a primeira aproximação da raiz *E:*
    - Calcula-se $g(x_0)$.
    - $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$, $x_4 = \ldots$

Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Algoritmo: $x_n = g(x_{n-1}),\ para\ n = 1, 2, 3, \ldots$
  - Critério de Parada:
    - $| x_n - x_{n-1} | \leq$ *erro.*
  - Melhor extremo:
    - O método tem sucesso quando $| g'(x) | < 1$ em todo o intervalo.
    - Extremo mais rápido.
      - Se $| g'(a) | < | g'(b) |$
        - $x_0 = a$
      - Senão, $x_0 = b$

Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Casos de convergência
    - Seja f(x) = x³ -5x + 3, possíveis g(x):

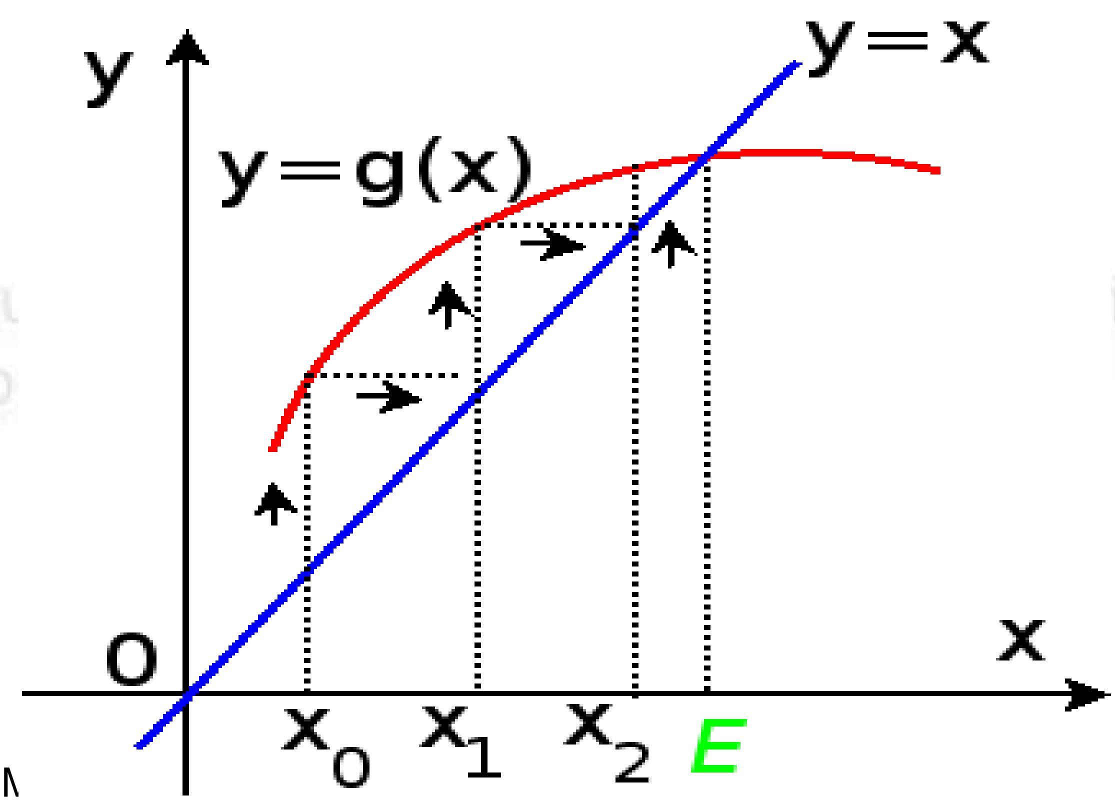
$$g(x)=\frac{x^3+3}{5} \qquad g(x)=(5x-3)^{1/3}$$

$$g(x)=\frac{5x-3}{x^2} \qquad g(x)=\frac{-3}{x^2-5}$$

    - Como podem ter várias funções g(x), vamos estabelecer condições para que os resultados sejam satisfatórios.

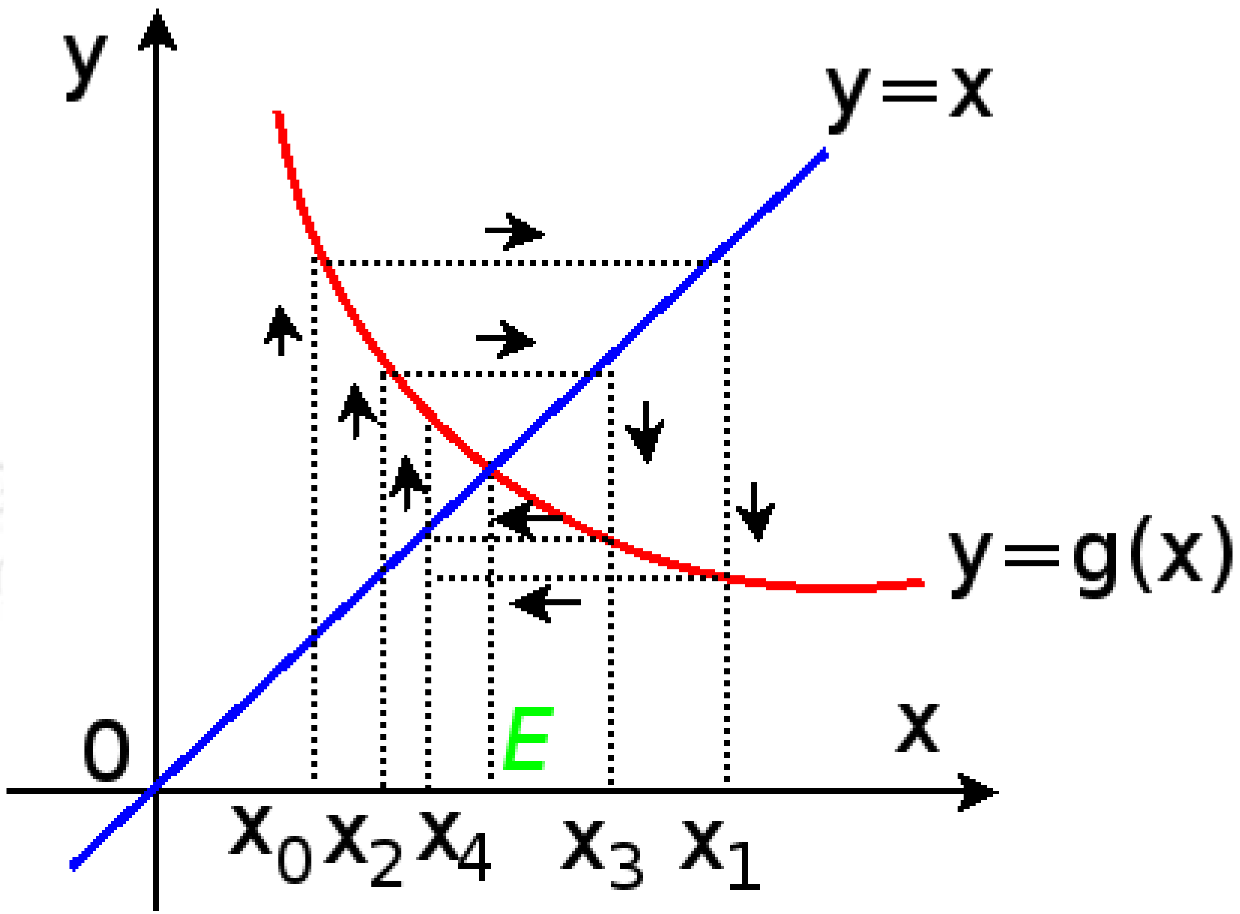
Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Observando graficamente, verifica-se que há funções g(x) não indicadas para a escolha.
    - Convergência monotônica $\rightarrow$ $0<g'(x) < 1$.



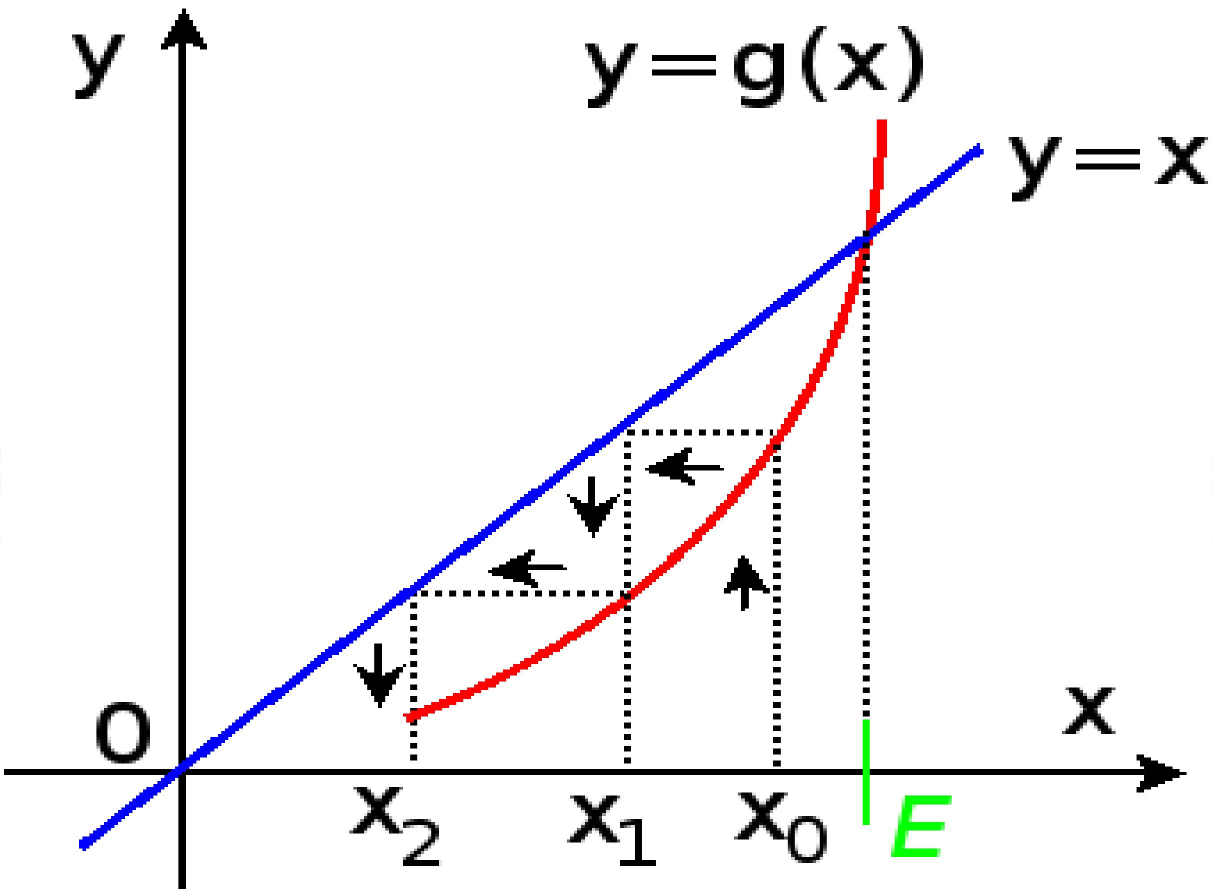
Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Convergência oscilante $\rightarrow$ $-1 < g'(x) < 0$.



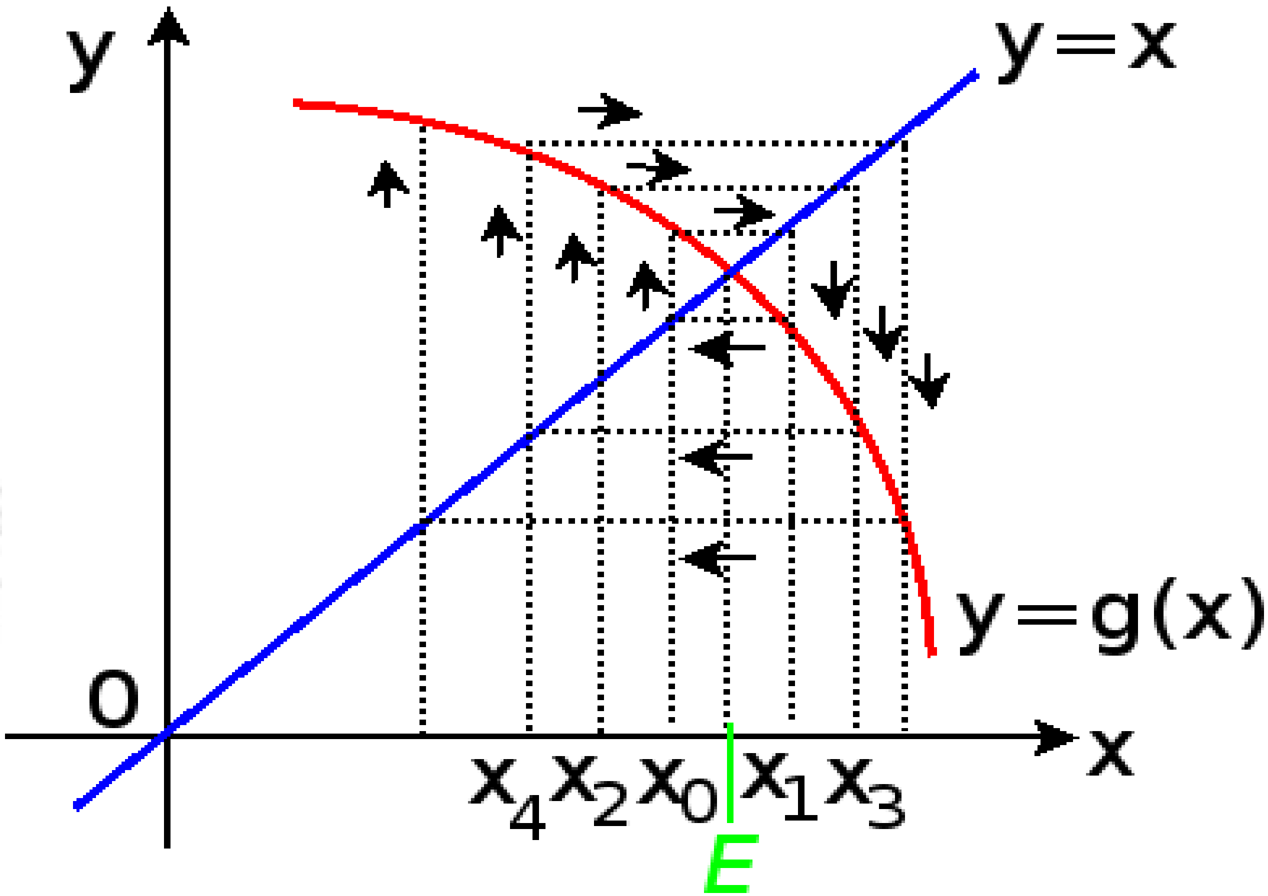
Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Divergência monotônica → $g'(x) > 1$.



Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Divergência oscilante $\rightarrow$ $g'(x) < -1$.

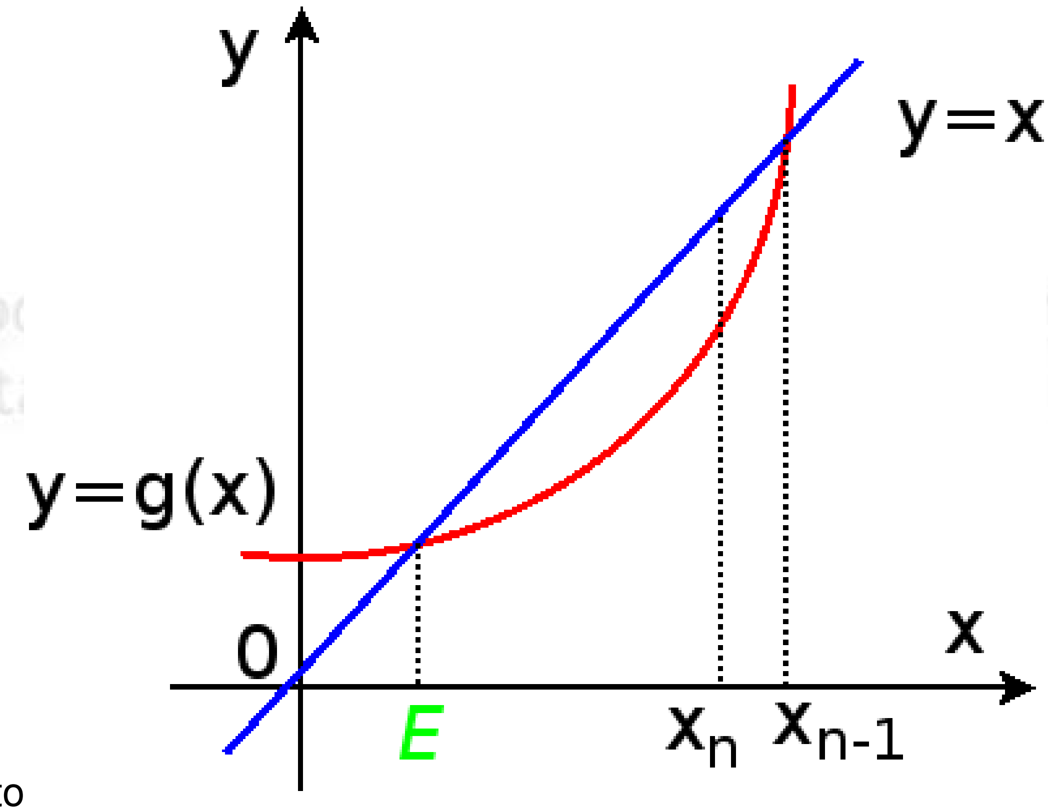


Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Considerações Finais
    - A maior dificuldade do método é encontrar uma função de iteração que satisfaça à condição de convergência.
    - Teste de | g'(x) | < 1 pode levar a um engano se x_0 não estiver suficientemente próximo da raiz.
    - A velocidade de convergência dependerá de |'(*E*)|.
      - Quanto menor este valor maior será a convergência.

Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Considerações Finais
    - O teste de erro ($|x_n - x_{n-1}| \leq$ *erro*) não implica necessariamente que $| x_n - E | \leq$ *erro.*



Métodos Numéricos

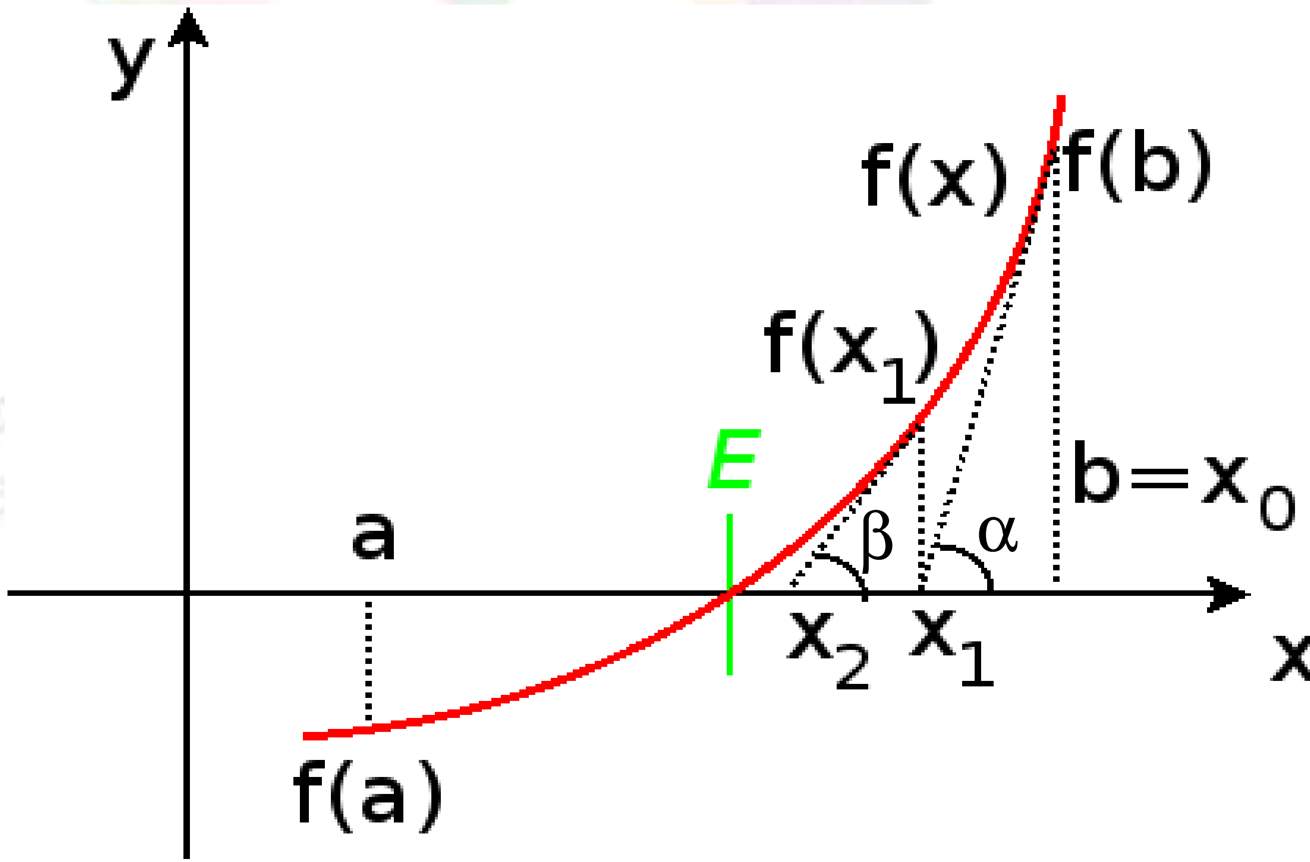
- Método da Iteração Linear
  - Exemplo 1
    - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 + 2x - 4$, com um *erro* $\leq 2*10^{-1}$.
  - Resposta
    - A raiz desejada é $E = 1,31$.

Métodos Numéricos

- Método da Iteração Linear
  - Exemplo 2
    - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 - e^x$, com um *erro* $\leq 2*10^{-2}$.
  - Resposta
    - A raiz desejada é $E = -0,70$.

Métodos Numéricos

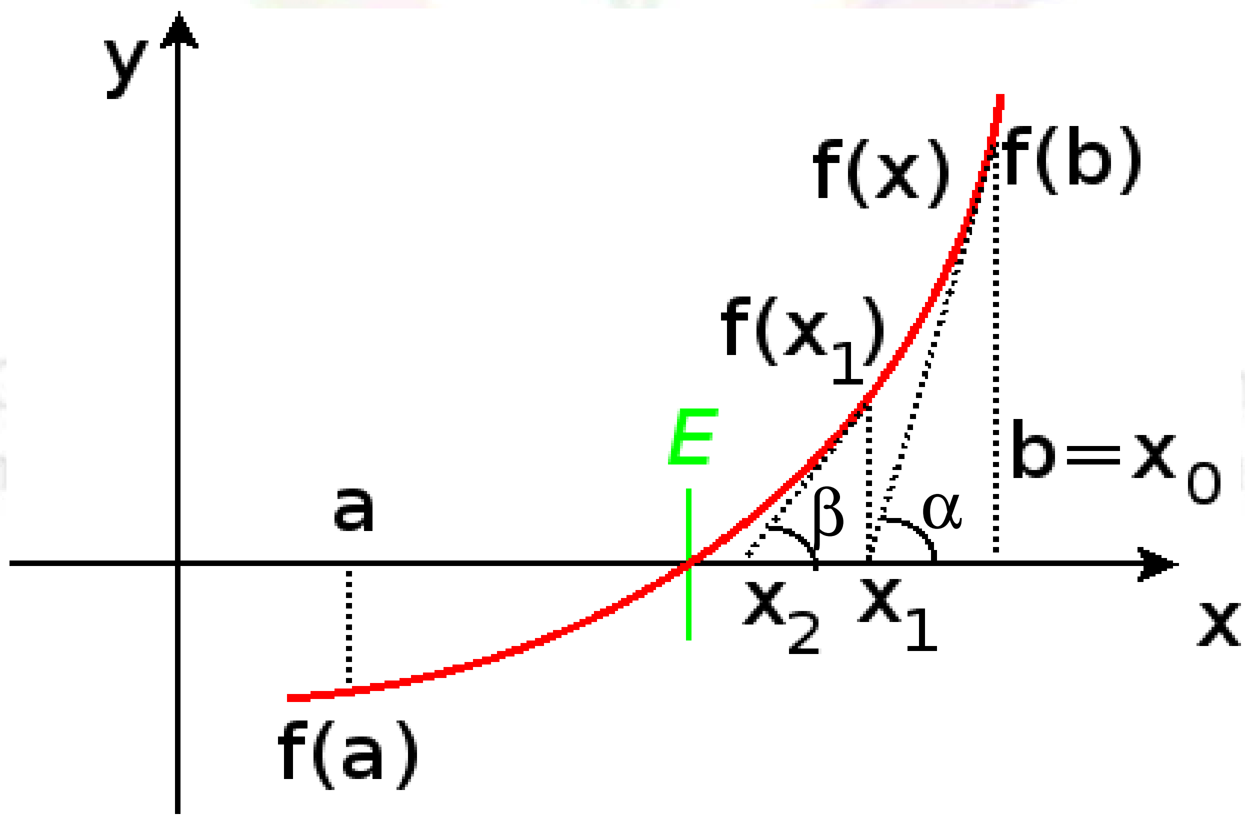
- Método de Newton-Raphson
  - Seja F(x) uma função contínua no intervalo [a,b].
  - Seja E uma raiz da função, $E \in (a,b)$ tal que $f(E) = 0$ e $f'(x) \neq 0$.



Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Toma-se x_0 = b. Então:

$$tg\alpha = f'(x_0) \;\therefore\; f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \;\therefore\; x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson

  - Se $| x_1 - x_0 | \leq$ erro, então x_1 é a raiz desejada.

  - Senão deve-se calcular x_2: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

  - Se $| x_2 - x_1 | \leq$ erro, então x_2 é a raiz desejada.

  - Senão calcula-se x_3, ... ,x_n, até que $|x_n - x_{n-1}| \leq$ erro.

Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Algoritmo: $$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad para \; n = 1, 2, 3, \ldots$$
  - Critério de Parada:
    - $| x_n - x_{n-1} | \leq erro.$
  - Melhor extremo:
    - Verificar qual extremo possui função e segunda derivada com mesmo sinal:
    - $f(x_i) * f''(x_i) > 0$ *p/ i = {extremos do intervalo}.*
  - Restrição
    - Conhecer um intervalo que contenha *E.*

Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Exemplo
    - Determinar com precisão menor ou igual a 0,01, a raiz da equação $f(x) = 2x - \cos(x)$.
  - Resposta
    - A raiz desejada é $E = 0,45$.

Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Condições de Newton-Raphson-Fourier
    - Segundo Newton, para haver convergência em seu método:
      - O intervalo (a,b) em análise deve ser suficientemente pequeno.
    - Contudo, para Raphson e Fourier um intervalo pequeno é aquele que contém uma e somente uma raiz.
    - Assim, algumas condições foram estabelecidas para que tal exigência fosse válida:

Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Condições de Newton-Raphson-Fourier
    - 1) Se *f(a).f(b)* > 0, então existe um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existe raízes reais no intervalo (a,b) (Teorema de Bolzano);
    - 2) Se *f(a).f(b)* < 0, então existe um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades) no intervalo (a,b) (Teorema de Bolzano);

Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Condições de Newton-Raphson-Fourier
    - 3) Se *f'(a).f'(b)* > 0, então o comportamento da função neste intervalo poderá ser apenas crescente ou apenas decrescente, e nunca os dois se alternando;
    - 4) Se *f'(a).f'(b)* < 0, então a função alternará seu comportamento entre crescente e decrescente;

Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Condições de Newton-Raphson-Fourier
    - 5) Se $f''(a).f''(b) > 0$, então a concavidade não muda no intervalo em análise;
    - 6) Se $f''(a).f''(b) < 0$, então a concavidade muda no intervalo em análise.
  - Portanto, haverá convergência à uma raiz no intervalo (a,b) se e somente se:
    - $f(a).f(b) < 0$, $f'(a).f'(b) > 0$ e $f''(a).f''(b) > 0$

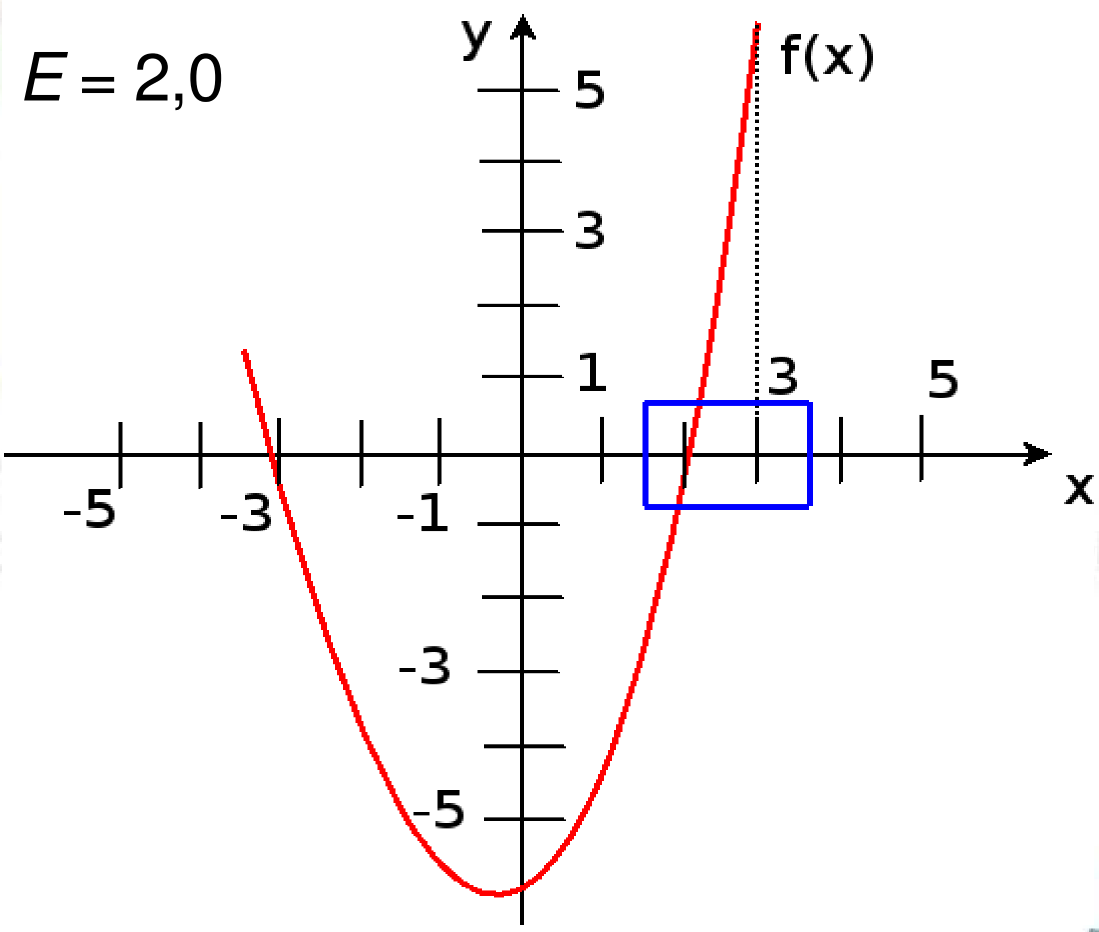
Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Vantagens e Desvantagens
    - O Método de Newton-Raphson tem convergência muito boa (quadrática). Entretanto, apresenta as seguintes desvantagens:
      - (i) Exige o cálculo e a análise do sinal de f' e f'';
      - (ii) Se $f'(x_{k-1})$ for muito elevado a convergência será lenta;
      - (iii) Se $f'(x_{k-1})$ for próximo de zero pode ocorrer overflow.

Métodos Numéricos

- Método de Newton-Raphson
  - Exercício - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 6$, $x_0 = 3$ como estimativa inicial e critério de parada $|f(x_n)| \leq 0{,}020$.

Resposta: $E = 2{,}0$



Métodos Numéricos

- Método da Secante
  - Uma grande desvantagem no método de Newton é a necessidade de se obter a derivada *f'(x)* e calcular o seu valor numérico a cada iteração.
  - Para contornar este problema, usa-se um modelo linear que se baseia nos dois valores calculados mais recentemente:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

onde x_n e x_{n-1} são duas aproximações para a raiz.

Métodos Numéricos

- Método da Secante

  - Substituindo $$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

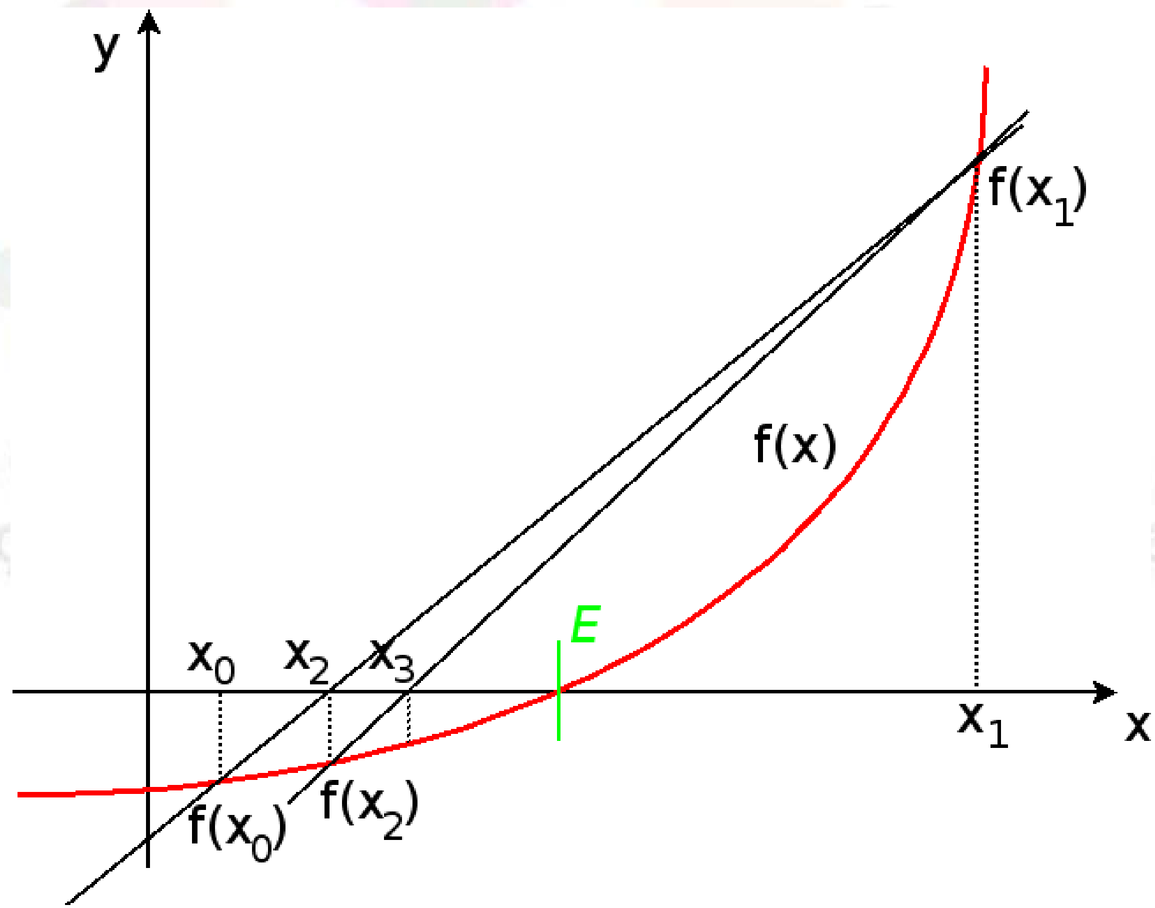
  em $$x_{\mathrm{n+1}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

  temos: $$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) . f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \; para \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

  - O método de Newton, quando modificado desta maneira, é conhecido como Método das Secantes.

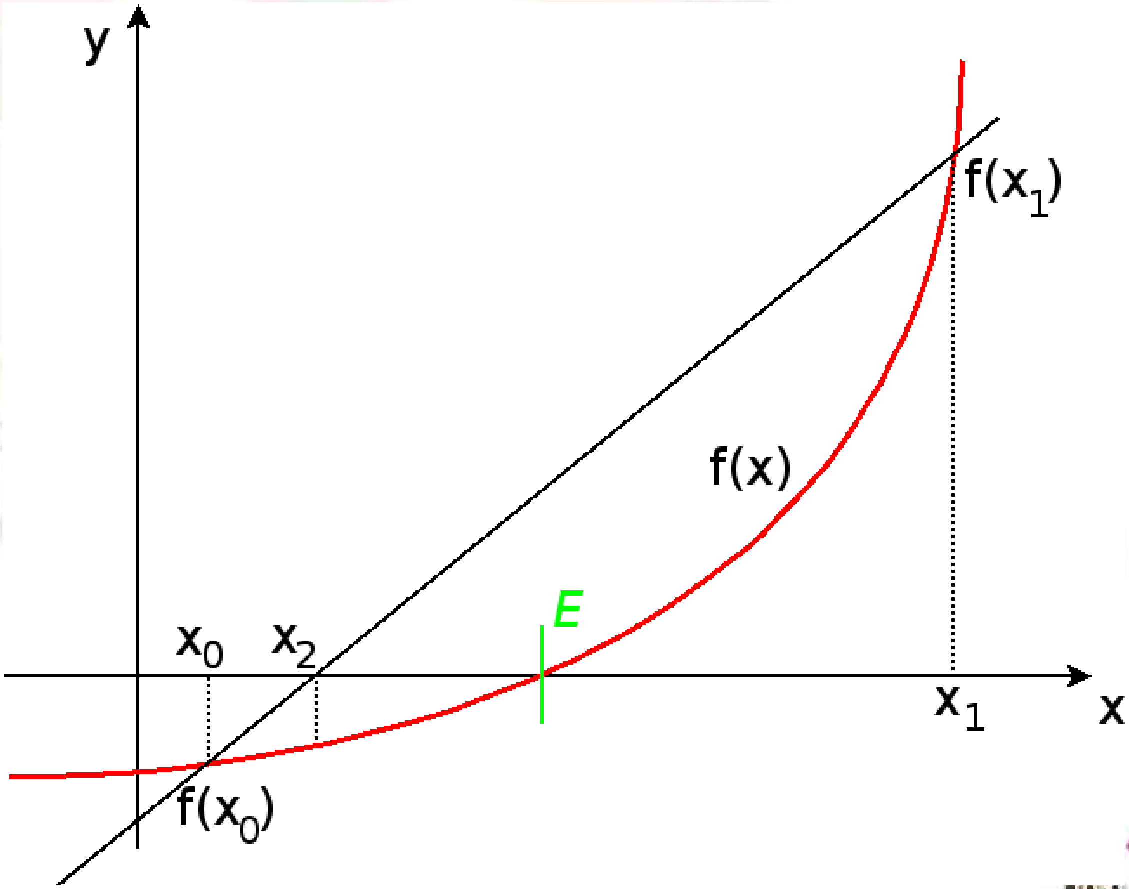
Métodos Numéricos

- Método da Secante
  - No gráfico a seguir ilustramos graficamente como uma nova aproximação, pode ser obtida de duas anteriores.



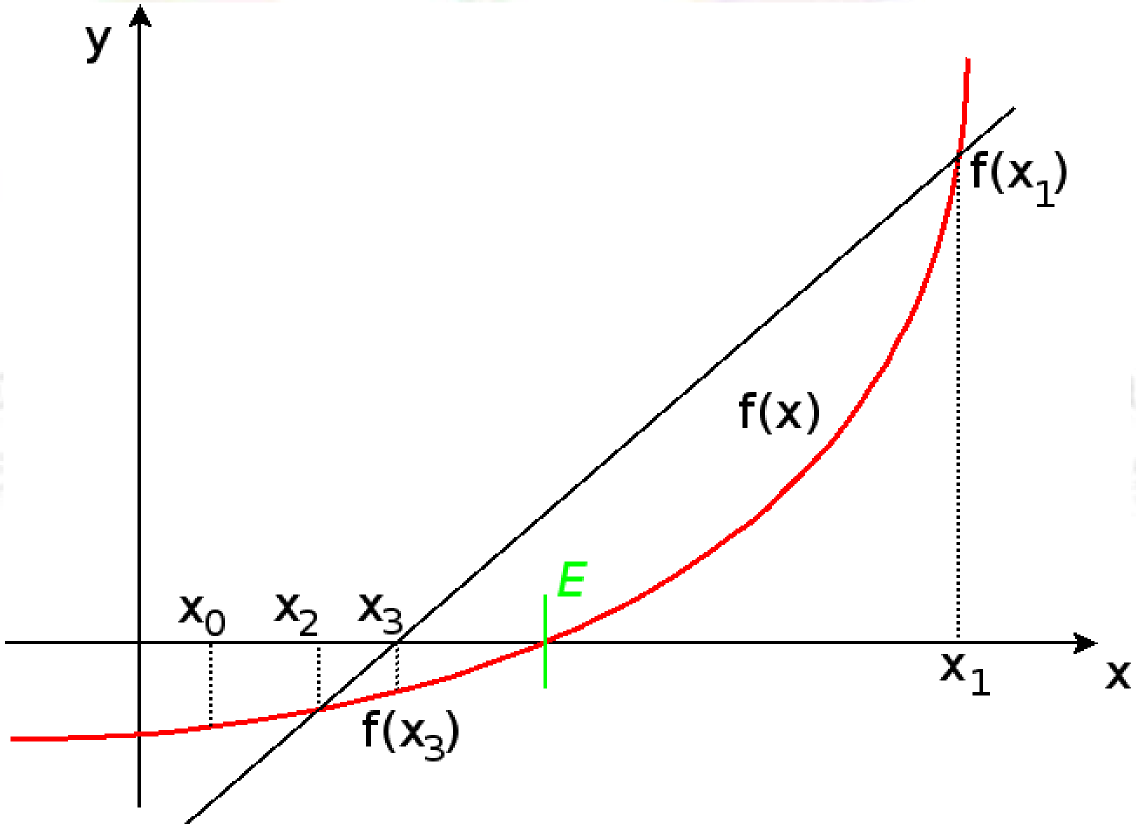
Métodos Numéricos

- Método da Secante
  - Das duas aproximações iniciais x_0 e x_1 determina-se a reta que passa pelos pontos (x_0 , $f(x_0)$) e (x_1 , $f(x_1)$).
    - A interseção desta reta com o eixo x fornece o ponto x_2.



Métodos Numéricos

- Método da Secante
  - Em seguida é calculado uma nova aproximação para a raiz a partir dos pontos (x_1 , $f(x_1)$) e (x_2 , $f(x_2)$).
    - O processo se repete até que seja satisfeito o critério de parada.



Métodos Numéricos

- Método da Secante
  - Observações
    - Este método não necessita da característica que é fundamental no método da falsa posição:
      - A exigência de que $f(x_n).f(x_{n-1}) < 0$;
    - A raiz não precisa estar entre as duas aproximações iniciais (x_0 e x_1);
    - A convergência é mais rápida do que no método da Bisseção e da Falsa Posição, porém, pode ser mais lenta do que no método de Newton-Raphson.

Métodos Numéricos

- Método da Secante

  - Algoritmo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}).f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \; para \; n = 1,2,3, \ldots$$

  - Critério de Parada:

    - $| x_{n+1} - x_n | \leq$ *erro*.

Métodos Numéricos

- Método da Secante

  - Exemplo - Determinar a raiz da equação $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$, com erro inferior a 10^{-3}.

  - Logo, a raiz da equação é 1,431.

Métodos Numéricos

- Método da Secante
  - Exercício - Calcular a raiz da função f(x) = 2x – cos(x) com erro ≤ 10^{-3}. Efetue os cálculos com 5 casas decimais com arredondamento.
  - Logo, a raiz da equação é 0,45040.

Métodos Numéricos

- Método Misto

  - O método Misto, consiste na aplicação seqüencial dos métodos Newton-Raphson e Falsa Posição, nesta ordem.

  - O método NR é aplicado no primeiro passo, sempre a partir do melhor extremo, gerando x_1^N.

  - Com x_1^N determina-se qual extremo do intervalo será substituído:

    - Se $f(a) * f(x_1^N) < 0 \rightarrow b = x_1^N$
    - senão $a = x_1^N$

Métodos Numéricos

- Método Misto
  - Então aplica-se o método da Falsa Posição, gerando x_1^F.
  - x_1^F será utilizado na próxima iteração pelo método NR.
  - Mas antes é feito o teste de erro para verificar o critério de parada.
  - Quando o critério de parada for satisfeito, tira-se a média aritmética simples do resultado da última iteração de ambos os métodos obtendo a resposta desejada.

Métodos Numéricos

- Método Misto

  - Algoritmo:

$$x_n = \frac{x_n^N + x_n^F}{2}, \; para \; n = 1,2,3, \ldots$$

  - Critério de Parada:
    - $| x_n^F - x_n^N | \leq$ *erro.*

Métodos Numéricos

- Método Misto
  - Exemplo
    - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 + 2x - 4$, com um *erro* $\leq 2*10^{-2}$. Efetue os cálculos com 4 casas decimais com arredondamento.
  - A raiz da equação é (1,2361 + 1,2361) / 2 = 1,2361.