

# Métodos Numéricos - Notas de Aula

Profª Olga Regina Bellon

Junho 2007

# Sistemas Lineares

- Introdução

- Sistemas lineares são sistemas de equações com  $m$  equações e  $n$  incógnitas formados por equações lineares, normalmente escritos como:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

- onde,  $a_{ij}$  : coeficientes  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
- $x_j$  : incógnitas  $j = 1, 2, \dots, n$
- $b_i$  : constantes  $i = 1, 2, \dots, m$

# Sistemas Lineares

- Para resolver um sistema linear temos que calcular os valores de  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , caso eles existam e satisfaçam as  $m$  equações simultaneamente.
- Usando notação matricial, o sistema linear pode ser representado por  $AX = B$ , onde

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- é chamada de matriz completa ou matriz aumentada do sistema.

# Sistemas Lineares

Onde:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

é a matriz dos coeficientes,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  são os vetores de incógnitas e constantes, respectivamente.

# Sistemas Lineares

- Classificação quanto ao número de soluções
  - Compatível
    - determinado (o sistema tem solução única);
    - indeterminado (o sistema infinitas soluções).
  - Incompatível
    - O sistema não admite solução.

# Sistemas Lineares

- Classificação quanto ao número de soluções
  - Quando todos os termos independentes forem nulos, isto é, se  $b_i = 0, i = 0, 1, \dots, m$ , o sistema é dito homogêneo.
  - Todo sistema homogêneo é compatível, pois admitirá pelo menos a solução trivial ( $x_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

# Sistemas Lineares

- Métodos Diretos (Algoritmos Diretos)
  - Um método é dito direto quando a solução exata  $\vec{x}$  do sistema linear é obtida realizando-se um número finito de operações aritméticas. São exemplos conhecidos: a Regra de Cramer, o Método da Eliminação de gauss (ou triangulação) e o Método de Jordan.

# Sistemas Lineares

- Métodos Diretos (Algoritmos Diretos)
  - Regra de Cramer
    - Seja um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas (um sistema  $n \times n$ ), sendo  $D$  o determinante da matriz  $A$ , e  $D_{x_1}$ ,  $D_{x_2}$ ,  $D_{x_3}$ , ...,  $D_{x_n}$  os determinantes das matrizes obtidas trocando em  $M$ , respectivamente, a coluna dos coeficientes de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , ...,  $x_n$  pela coluna dos termos independentes, temos que:

# Sistemas Lineares

- Regra de Cramer

- O sistema  $S$  será compatível e terá solução única se, e somente se,  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ . Neste caso a única solução de  $S$  é dada por:

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \quad x_3 = \frac{D_{x3}}{D}, \quad \dots, \quad x_b = \frac{D_{xn}}{D}$$

# Sistemas Lineares

- Regra de Cramer

- A aplicação da Regra de Cramer exige o cálculo de  $n + 1$  determinantes (  $\det A$  e  $\det A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ );
- Para  $n = 20$ , o número total de operações efetuadas será  $21 * 20! * 19$  multiplicações mais um número semelhante de adições.
- Um computador que efetue cerca de 100 milhões de multiplicações por segundo levaria  $3 \times 10^5$  anos para efetuar as operações necessárias.
- Portanto, inviável para sistemas muito grandes.

# Sistemas Lineares

- Regra de Cramer

- Exemplo 1: Resolva o sistema abaixo:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 12$$

$$4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6$$

# Sistemas Lineares

- Regra de Cramer

- Calculando os determinantes  $D$ ,  $D_{x1}$ ,  $D_{x2}$  e  $D_{x3}$

temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24$$

$$D_{x1} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

$$D_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 48$$

$$D_{x3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96$$

Então,  $x_1 = \frac{D_{x1}}{D} = 120/24 = 5$ ,  $x_2 = \frac{D_{x2}}{D} = 48/24 = 2$ ,  
e  $x_3 = \frac{D_{x3}}{D} = 96/24 = 4$ . E a solução do sistema é  $\vec{x} : (5, 2, 4)^T$ .

# Sistemas Lineares

- Regra de Cramer

- Exercício : Resolva o sistema abaixo:

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \frac{1}{2}$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8$$

$$-7x_1 + 8x_2 - 9x_3 = \frac{7}{2}$$

# Sistemas Lineares

- Regra de Cramer

- Calculando os determinantes  $D$ ,  $D_{x1}$ ,  $D_{x2}$  e  $D_{x3}$  temos:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = -120$$

$$D_{x1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 7/2 & 8 & -9 \end{pmatrix} = 0$$

$$D_{x2} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -3 \\ 4 & 8 & 6 \\ -7 & 7/2 & -9 \end{pmatrix} = -120$$

$$D_{x3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1/2 \\ 4 & 5 & 8 \\ -7 & 8 & 7/2 \end{pmatrix} = -60$$

# Sistemas Lineares

- Métodos Diretos (Algoritmos Diretos)
  - Método da Eliminação de Gauss
    - Consiste em transformar o sistema linear original num outro equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior.
      - Resolução imediata.
    - Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem a mesma solução.
    - O determinante de sistemas lineares equivalentes são iguais.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
- Com  $(n-1)$  passos o sistema linear  $AX = B$  é transformado num sistema triangular equivalente:  $UX = C$ , o qual se resolve facilmente por substituições.

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional,  
Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - Vamos calcular a solução de  $AX = B$  em três etapas:
  - 1ª etapa: Matriz Completa
    - Consiste em escrever a matriz completa ou aumentada do sistema linear original.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - 2ª etapa: Triangulação
    - Consiste em transformar a matriz  $A$  numa matriz triangular superior, mediante uma seqüência de operações elementares nas linhas da matriz.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - 3ª etapa: Retro-substituição
    - Consiste no cálculo dos componentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , solução de  $AX = B$ , a partir da solução do último componente ( $x_n$ ), e então substitui regressivamente nas equações anteriores.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - Teorema: Seja  $AX = B$  um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:
    - i) Trocar a ordem de duas equações do sistema;
    - ii) Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula;
    - iii) Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;
  - obtem-se um novo sistema  $UX = C$  equivalente a  $AX = B$ .

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - Resolução de Sistemas Triangulares
    - Seja o sistema linear  $AX = B$ , onde  $A$ : matriz  $n \times n$ , triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero.
    - Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\ddots$$
$$\vdots$$

$$a_{nn}x_n = b_n$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
- Resolução de Sistemas Triangulares

- Da última equação temos:  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$

- $x_{n-1}$  pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

- e assim sucessivamente obtém-se  $x_{n-2}, \dots, x_2$ , e finalmente  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \dots - a_{1n} x_n}{a_{11}}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - Estratégia de Pivoteamento
    - O algoritmo para o método de eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores a cada etapa  $k$  do processo. Sendo o coeficiente  $a_{kk}$  chamado de pivô.

$$m_{ik} = \frac{-a_{ik}}{a_{kk}} \quad i = k + 1, \dots, n \quad e \quad k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

- 1) O que acontece se o pivô for nulo?
- 2) E se o pivô estiver próximo de zero?

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - Estratégia de Pivoteamento
    - 1) É impossível trabalhar com um pivô nulo.
    - 2) Um pivô próximo de zero pode resultar em resultados totalmente imprecisos;
      - as calculadores e computadores efetuam cálculos com precisão finita;
      - pivôs próximo de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade;
      - ampliação dos erros de arredondamento.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - Estratégia de Pivoteamento
    - Para se contornar estes problemas deve-se adotar uma estratégia de pivoteamento (escolha da linha e/ou coluna pivotal).
    - Esta estratégia consiste em:
      - i) no início da etapa  $k$  da fase de escalonamento, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes:  $a_{ik}$ ,  $i = k, k+1, \dots, n$ ;
      - ii) trocar as linhas  $k$  e  $i$  se for necessário.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
- Classificação do Sistema Triangular
  - Seja  $U$  um sistema triangular superior escalonado de  $m$  equações e  $n$  incógnitas, teremos as seguintes possibilidades:
    - i)  $m = n \rightarrow$  sistema compatível e determinado;
    - ii)  $m < n \rightarrow$  sistema compatível e indeterminado.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
- Classificação do Sistema Triangular
  - Se durante o escalonamento surgir equações do tipo  $0_{x1} + 0_{x2} + \dots + 0_{xn} = b_m$ , então:
    - i) Se  $b_m = 0$ , então eliminaremos a equação e continuamos o escalonamento;
    - ii) Se  $b_m \neq 0$ , então conclui-se que o sistema é incompatível.

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- Exemplo: Resolver o sistema linear:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -4$$

$$-x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_4 = -10$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - 1ª etapa: Matriz completa

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & \vdots & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & \vdots & -10 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 2ª etapa: Triangulação - Escolha do pivô na primeira coluna.  $E_1$  (1ª equação),  $E_2$  (2ª equação) e assim por diante.

$$a_{11} = \text{MAX} \{|a_{11}|; |a_{21}|; |a_{31}|; |a_{41}|\}$$

$$a_{11} = \text{MAX} \{|1|; |0|; |-2|; |4|\} = 4$$

*Mas  $4 \in E_4$ , logo  $E_1 \leftarrow E_4$  e  $E_4 \leftarrow E_1$ .*

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & \vdots & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 2ª etapa: Triangulação – zerar os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal.

- O componente  $\langle x \rangle$  indica o pivô.

$$\begin{array}{l} E_3 \leftarrow E_3 + \frac{1}{2} E_1 \\ E_4 \leftarrow E_4 - \frac{1}{4} E_1 \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} \langle 4 \rangle & 3 & 0 & 1 & : & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1/2 & 4 & 5/2 & : & 2 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & : & -3/2 \end{array} \right]$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 2ª etapa: Triangulação - Escolha do pivô na segunda coluna.

$$a_{22} = \text{MAX} \{ |a_{22}|; |a_{32}|; |a_{42}| \}$$

$$a_{22} = \text{MAX} \{ |-1|; |1/2|; |5/4| \} = 5/4$$

Mas  $5/4 \in E_4$ , logo  $E_2 \leftarrow E_4$  e  $E_4 \leftarrow E_2$ .

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & \vdots & -10 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & \vdots & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 4 & 5/2 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 2ª etapa: Triangulação – zerar os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal principal.

- O componente  $\langle x \rangle$  indica o pivô.

$$\begin{aligned} E_3 &\leftarrow E_3 - \frac{2}{5} E_2 & E_4 &\leftarrow E_4 + \frac{4}{5} E_2 \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & \vdots & -10 \\ 0 & \langle 5/4 \rangle & -1 & 1/4 & \vdots & -3/2 \\ 0 & 0 & 22/5 & 13/5 & \vdots & 13/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & -6/5 & \vdots & -6/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 2ª etapa: Triangulação - Escolha do pivô na terceira coluna.

$$a_{33} = \text{MAX} \{ |a_{33}|; |a_{43}| \}$$

$$a_{33} = \text{MAX} \{ |22/5|; |1/5| \} = 22/5$$

$22/5 \in E_3$ , logo não precisa trocar as linhas.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & \vdots & -10 \\ 0 & \langle 5/4 \rangle & -1 & 1/4 & \vdots & -3/2 \\ 0 & 0 & 22/5 & 13/5 & \vdots & 13/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & -6/5 & \vdots & -6/5 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 2ª etapa: Triangulação – zerar os elementos da terceira coluna abaixo da diagonal principal.

- O componente  $\langle x \rangle$  indica o pivô.

$$E_4 \leftarrow E_4 - \frac{1}{22} E_3$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & \vdots & -10 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & \vdots & -3/2 \\ 0 & 0 & \langle 22/5 \rangle & 13/5 & \vdots & 13/5 \\ 0 & 0 & 0 & -29/22 & \vdots & -29/22 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 3ª etapa: Retro-substituição

- Da quarta linha temos:  $x_4 = \frac{-29}{\frac{22}{-29}} = 1$

- Substituindo  $x_4$  na terceira linha temos:

$$x_3 = \frac{\frac{13}{5} - \left(\frac{13}{5} x_4\right)}{\frac{22}{5}} = 0$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 3ª etapa: Retro-substituição

- Substituindo  $x_4$  e  $x_3$  na segunda linha

temos:

$$x_2 = \frac{-\frac{3}{2} - (-x_3 - \frac{1}{4}x_4)}{\frac{5}{4}} = -1$$

- Substituindo  $x_4$ ,  $x_3$  e  $x_2$  na primeira linha

temos:

$$x_1 = \frac{-10 - (3x_2 + 0x_3 + 1x_4)}{4} = -2$$

- A solução deste sistema é:  $\vec{x} : (-2, -1, 0, 1)$ .

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
- Exercício: Resolver o sistema linear:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
- 1ª etapa: Matriz completa

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ -2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 2ª etapa: Triangulação

- Onde:  $E_1$  (1ª equação),  $E_2$  (2ª equação) e assim por diante. O componente  $\langle x \rangle$  indica o pivô.

$$\begin{array}{l} E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - (-2)E_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} \langle 1 \rangle & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & -7 & 7 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss
  - 2ª etapa: Triangulação

$$E_3 \leftarrow E_3 - \left( \frac{-7}{3} \right) E_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & \langle 3 \rangle & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método da Eliminação de Gauss

- 3ª etapa: Retro-substituição

- Da terceira linha temos:  $-\frac{14}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

- Substituindo  $x_3$  na segunda linha temos:

$$3x_2 - 5(0) = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$

- Substituindo  $x_3$  e  $x_2$  na primeira linha temos:

$$x_1 - (-1) + 2(0) = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

- A solução deste sistema é:  $\vec{x} : (1, -1, 0)$ .

# Sistemas Lineares

- Métodos Diretos (Algoritmos Diretos)
  - Método de Jordan
    - Consiste em aplicar operações elementares sobre as equações do sistema linear dado até que se obtenha um sistema diagonal equivalente.

# Sistemas Lineares

- Método de Jordan

- Exemplo: Resolver o sistema linear:

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$-2x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 2$$

$$3x_1 - 5x_2 + 15x_3 = 5$$

# Sistemas Lineares

- Método de Jordan

- 1ª etapa: Matriz completa

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 1 \\ -2 & 8 & -6 & \vdots & 2 \\ 3 & -5 & 15 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Jordan

- 2ª etapa: Diagonalização

- $E_1$  (1ª equação),  $E_2$  (2ª equação) e assim por diante. O componente  $\langle x \rangle$  indica o pivô.

$$E_3 \leftarrow E_3 + \frac{1}{2} E_1 \qquad E_4 \leftarrow E_4 - \frac{1}{4} E_1$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \langle 1 \rangle & -3 & 4 & \vdots & 1 \\ -2 & 8 & -6 & \vdots & 2 \\ 3 & -5 & 15 & \vdots & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 4 & 3 & \vdots & 2 \end{array} \right]$$

# Sistemas Lineares

- Método de Jordan

- 2ª etapa: Diagonalização

$$E_3 \leftarrow E_3 - 2 E_2$$

$$E_1 \leftarrow E_1 + \frac{3}{2} E_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & \langle 2 \rangle & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right]$$

# Sistemas Lineares

- Método de Jordan

- 2ª etapa: Diagonalização

$$E_2 \leftarrow E_2 + 2 E_3$$

$$E_1 \leftarrow E_1 + 7 E_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & \vdots & 7 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & \langle -1 \rangle & \vdots & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -35 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Jordan

- 2ª etapa: Diagonalização

$$E_2 \leftarrow \frac{1}{2} E_2$$

$$E_3 \leftarrow -E_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -35 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -35 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Jordan

- 3ª etapa: Cálculo da solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -35 \\ 0 & 1 & 0 & : & -4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 6 \end{bmatrix}$$

- Da primeira linha temos:  $x_1 = -35$
- Da segunda linha temos:  $x_2 = -4$
- Da terceira linha temos:  $x_3 = 6$
- A solução deste sistema é:  $\vec{x} : (-35, -4, 6)$ .

# Sistemas Lineares

- Métodos Iterativos (Algoritmos Iterativos)
  - Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)
  - Seja o sistema abaixo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)
  - Pode-se afirmar que o mesmo é convergente, se o sistema estiver na forma diagonalmente dominante, isto é:

$$|a_{11}| \geq |a_{21}| + |a_{31}| + \dots + |a_{n1}| \quad |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|$$

$$|a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}| + \dots + |a_{n2}| \quad \text{ou} \quad |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}|$$

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional,  
Computação Gráfica e Processamento de Imagens

$$|a_{nn}| \geq |a_{1n}| + |a_{2n}| + \dots + |a_{(n-1)n}| \quad |a_{nn}| \geq |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n(n-1)}|$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Então, isola-se em cada uma das equações ordenadamente, uma das incógnitas:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2^{(0)} - a_{13} x_3^{(0)} - \dots - a_{1n} x_n^{(0)})$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_1^{(0)} - a_{23} x_3^{(0)} - \dots - a_{2n} x_n^{(0)})$$

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} x_1^{(0)} - a_{n2} x_2^{(0)} - \dots - a_{n(n-1)} x_{n-1}^{(0)})$$

- onde,  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  são as atribuições iniciais do método.

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)
- Condições de parada:
- Se para todo  $|x_n^{(j)} - x_n^{(j-1)}| \leq \text{erro}$ , então  $x_n^{(j)}$  são as soluções do sistema.

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional,  
Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Exemplo: Resolver o sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,2 e  $x^{(0)} = 1$ ,  $y^{(0)} = 1,5$ ,  $z^{(0)} = 0$ .

$$3x + 2y - z = 8$$

$$2x - 4y + 2z = -4$$

$$-x + y + 5z = 3$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)
- Verificação de convergência

$$3x + 2y - z = 8$$

$$2x - 4y + 2z = -4$$

$$-x + y + 5z = 3$$

$$|a_{11}| \geq |a_{21}| + |a_{31}| \rightarrow |3| \geq |2| + |-1|$$

$$|a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}| \rightarrow |-4| \geq |2| + |1|$$

$$|a_{33}| \geq |a_{13}| + |a_{23}| \rightarrow |5| \geq |-1| + |2|$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Isolamento das incógnitas

$$x = \frac{1}{3}(-2y + z + 8)$$

$$y = -\frac{1}{4}(-2x - 2z - 4)$$

$$z = \frac{1}{5}(x - y + 3)$$

- Atribuição inicial

- $x^{(0)} = 1$       $y^{(0)} = 1,5$       $z^{(0)} = 0$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}(-2y^{(0)} + z^{(0)} + 8) = \frac{1}{3}(-2(1,5) + 0 + 8) = 1,6667$$

$$y^{(1)} = -\frac{1}{4}(-2x^{(0)} - 2z^{(0)} - 4) = -\frac{1}{4}(-2(1) - 2(0) - 4) = 1,5$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{5}(x^{(0)} - y^{(0)} + 3) = \frac{1}{5}(1 - 1,5 + 3) = 0,7$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(2)} = \frac{1}{3} (-2(1,5) + 0,7 + 8) = \frac{5,7}{3} = 1,9$$

$$y^{(2)} = -\frac{1}{4} (-2(1,6667) - 2(0,7) - 4) = \frac{8,7334}{4} = 2,1833$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{5} (1,6667 - 1,5 + 3) = \frac{3,1667}{5} = 0,6333$$

- $|x^{(2)} - x^{(1)}| = 0,23 > \text{erro}$

- $|y^{(2)} - y^{(1)}| = 0,7 > \text{erro}$

- $|z^{(2)} - z^{(1)}| = 0,07 < \text{erro}$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(3)} = \frac{1}{3}(-2(2,1833) + 0,6333 + 8) = \frac{4,2667}{3} = 1,4222$$

$$y^{(3)} = -\frac{1}{4}(-2(1,9) - 2(0,6333) - 4) = \frac{9,0666}{4} = 2,2667$$

$$z^{(3)} = \frac{1}{5}(1,9 - 2,1833 + 3) = \frac{2,7167}{5} = 0,5433$$

- $|x^{(3)} - x^{(2)}| = 0,5 > \text{erro}$
- $|y^{(3)} - y^{(2)}| = 0,08 < \text{erro}$
- $|z^{(3)} - z^{(2)}| = 0,09 < \text{erro}$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(4)} = \frac{1}{3}(-2(2,2667) + 0,5433 + 8) = \frac{4,0099}{3} = 1,3366$$

$$y^{(4)} = -\frac{1}{4}(-2(1,4222) - 2(0,5433) - 4) = \frac{7,931}{4} = 1,9828$$

$$z^{(4)} = \frac{1}{5}(1,4222 - 2,2667 + 3) = \frac{2,1555}{5} = 0,4311$$

- $|x^{(4)} - x^{(3)}| = 0,09 < \text{erro}$

- $|y^{(4)} - y^{(3)}| = 0,3 > \text{erro}$

- $|z^{(4)} - z^{(3)}| = 0,1 < \text{erro}$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(5)} = \frac{1}{3} (-2(1,9828) + 0,4311 + 8) = \frac{4,4655}{3} = 1,4885$$

$$y^{(5)} = \frac{-1}{4} (-2(1,3366) - 2(0,4311) - 4) = \frac{7,5354}{4} = 1,8839$$

$$z^{(5)} = \frac{1}{5} (1,3366 - 1,9828 + 3) = \frac{2,3538}{5} = 0,4708$$

- $|x^{(5)} - x^{(4)}| = 0,15 < \text{erro}$

- $|y^{(5)} - y^{(4)}| = 0,10 < \text{erro}$

- $|z^{(5)} - z^{(4)}| = 0,04 < \text{erro}$

- Solução do sistema: [ 1,4885; 1,8839; 0,4708 ]

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)
- Exercício: Resolver o sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento, erro menor ou igual a 0,01 e soluções iniciais nulas:

$$2x + y + 6z = 3$$

$$4x - 2y + z = 2$$

$$x - 5y - 2z = -4$$

# Sistemas Lineares

- Métodos Iterativos (Algoritmos Iterativos)
  - Método de Gauss-Jacobi (Matricial)
    - Baseado no algoritmo anterior, o método consiste na transformação do algoritmo em um sistema de matriz. Portanto, no algoritmo:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- A mesma situação pode ser escrita na forma:

$$a_{11}x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)})$$

$$a_{22}x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)})$$

⋮

$$a_{nn}x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k-1)})$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)
  - Sendo  $A$  a matriz dos coeficientes, onde  $A = D + I + S$ , no qual  $D$  é a matriz diagonal,  $I$  a matriz inferior e  $S$  a matriz superior, a expressão anterior poderá ser reescrita na forma:

$$D X^{(k)} = B - (S + I) X^{(k-1)}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)
  - Multiplicando ambos os termos pela matriz inversa da diagonal, temos:

$$D^{-1} D X^{(k)} = D^{-1} B - D^{-1} (S + I) X^{(k-1)} \rightarrow$$

$$X^{(k)} = -D^{-1} (S + I) X^{(k-1)} + D^{-1} B$$

onde:  $X^{(k)} = J X^{(k-1)} + E$

$$J = -D^{-1} (S + I)$$

$$E = D^{-1} B$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)
- Exemplo: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,02. Admitir solução inicial nula.

$$10x + 2y + z = 7$$

$$x + 5y + z = -8$$

$$2x + 3y + 10z = 6$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)
- Verificação de convergência

$$10x + 2y + z = 7$$

$$x + 5y + z = -8$$

$$2x + 3y + 10z = 6$$

$$|a_{11}| \geq |a_{21}| + |a_{31}| \rightarrow |10| \geq |1| + |2|$$

$$|a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}| \rightarrow |5| \geq |2| + |3|$$

$$|a_{33}| \geq |a_{13}| + |a_{23}| \rightarrow |10| \geq |1| + |1|$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Obtenção do Algoritmo

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Obtenção do Algoritmo

- Então,  $J = -D^{-1}(S + I) \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)
- Obtenção do Algoritmo

$$E = D^{-1} B \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Obtenção do Algoritmo

- Então:

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

- Atribuição inicial

- $x^{(0)} = 0 \quad y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$x^{(1)} = -0,2(0) - 0,1(0) + 0,7 = 0,7$$

$$y^{(1)} = -0,2(0) - 0,2(0) - 1,6 = -1,6$$

$$z^{(1)} = -0,2(0) - 0,3(0) + 0,6 = 0,6$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$x^{(2)} = -0,2(-1,6) - 0,1(0,6) + 0,7 = 0,96$$

$$y^{(2)} = -0,2(0,7) - 0,2(0,6) - 1,6 = -1,86$$

$$z^{(2)} = -0,2(0,7) - 0,3(-1,6) + 0,6 = 0,94$$

- $|x^{(2)} - x^{(1)}| = 0,3 > \text{erro}$

- $|y^{(2)} - y^{(1)}| = 0,3 > \text{erro}$

- $|z^{(2)} - z^{(1)}| = 0,3 > \text{erro}$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$x^{(3)} = -0,2(-1,86) - 0,1(0,94) + 0,7 = 0,978$$

$$y^{(3)} = -0,2(0,96) - 0,2(0,94) - 1,6 = -1,98$$

$$z^{(3)} = -0,2(0,96) - 0,3(-1,86) + 0,6 = 0,966$$

- $|x^{(3)} - x^{(2)}| = 0,018 < \text{erro}$
- $|y^{(3)} - y^{(2)}| = 0,1 > \text{erro}$
- $|z^{(3)} - z^{(2)}| = 0,03 > \text{erro}$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$x^{(4)} = -0,2(-1,98) - 0,1(0,966) + 0,7 = 0,9994$$

$$y^{(4)} = -0,2(0,978) - 0,2(0,966) - 1,6 = -1,9898$$

$$z^{(4)} = -0,2(0,978) - 0,3(-1,98) + 0,6 = 0,9984$$

- $|x^{(4)} - x^{(3)}| = 0,021 > \text{erro}$
- $|y^{(4)} - y^{(3)}| = 0,01 < \text{erro}$
- $|z^{(4)} - z^{(3)}| = 0,03 > \text{erro}$

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9898 \\ 0,9984 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$x^{(5)} = -0,2(-1,9898) - 0,1(0,9984) + 0,7 = 0,9981$$

$$y^{(5)} = -0,2(0,9994) - 0,2(0,9984) - 1,6 = -1,9996$$

$$z^{(5)} = -0,2(0,9994) - 0,3(-1,9898) + 0,6 = 0,9971$$

- $|x^{(5)} - x^{(4)}| = 0,001 < \text{erro}$
- $|y^{(5)} - y^{(4)}| = 0,01 < \text{erro}$
- $|z^{(5)} - z^{(4)}| = 0,001 < \text{erro}$

$$X^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,9981 \\ -1,9996 \\ 0,9971 \end{bmatrix}$$

- Solução do sistema:  $[0,9981; -1,9996; 0,9971]$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Jacobi (Matricial)
- Exercício: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,05. Admitir solução inicial nula.

$$5x + y + z = 6$$

$$3x + 4y + z = 13$$

$$3x + 3y + 6z = 0$$

# Sistemas Lineares

- Métodos Iterativos (Algoritmos Iterativos)
- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)
  - Derivado do método de Gauss-Jacobi, este método utiliza a cada iteração os valores já prontos na própria iteração, para tentar assegurar convergência mais rápida, ou seja:

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - a_{14}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)})$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{24}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)})$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)})$$

⋮

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)})$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- Portanto, o algoritmo do método pode ser expresso por:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k) \rightarrow i > j, (k-1) \rightarrow i < j} \right)$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)
- Condições de parada:
- Se para todo  $|x_n^{(j)} - x_n^{(j-1)}| \leq \text{erro}$ , então  $x_n^{(j)}$  são as soluções do sistema.

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional,  
Computação Gráfica e Processamento de Imagens

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)
- Exemplo: Resolver o sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,2 e  $x^{(0)} = 1$ ,  $y^{(0)} = 1,5$ ,  $z^{(0)} = 0$ .

$$3x + 2y - z = 8$$

$$2x - 4y + 2z = -4$$

$$-x + y + 5z = 3$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)
- Verificação de convergência

$$3x + 2y - z = 8$$

$$2x - 4y + 2z = -4$$

$$-x + y + 5z = 3$$

$$|a_{11}| \geq |a_{21}| + |a_{31}| \rightarrow |3| \geq |2| + |-1|$$

$$|a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}| \rightarrow |-4| \geq |2| + |1|$$

$$|a_{33}| \geq |a_{13}| + |a_{23}| \rightarrow |5| \geq |-1| + |2|$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- Isolamento das incógnitas

$$x = \frac{1}{3}(-2y + z + 8)$$

$$y = -\frac{1}{4}(-2x - 2z - 4)$$

$$z = \frac{1}{5}(x - y + 3)$$

- Atribuição inicial

- $x^{(0)} = 1$        $y^{(0)} = 1,5$        $z^{(0)} = 0$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}(-2y^{(0)} + z^{(0)} + 8) = \frac{1}{3}(-2(1,5) + 0 + 8) = 1,6667$$

$$y^{(1)} = -\frac{1}{4}(-2x^{(1)} - 2z^{(0)} - 4) = -\frac{1}{4}(-2(1,6667) - 2(0) - 4) = 1,8334$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{5}(x^{(1)} - y^{(1)} + 3) = \frac{1}{5}(1,6667 - 1,8334 + 3) = 0,5667$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(2)} = \frac{1}{3} (-2(1,6667) + 0,5667 + 8) = \frac{5,2333}{3} = 1,7444$$

$$y^{(2)} = -\frac{1}{4} (-2(1,7444) - 2(0,5667) - 4) = \frac{8,6222}{4} = 2,1556$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{5} (1,7444 - 2,1556 + 3) = \frac{2,5888}{5} = 0,5178$$

- $|x^{(2)} - x^{(1)}| = 0,08 < \text{erro} = 0,2$

- $|y^{(2)} - y^{(1)}| = 0,3 > \text{erro} = 0,2$

- $|z^{(2)} - z^{(1)}| = 0,05 < \text{erro} = 0,2$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(3)} = \frac{1}{3}(-2(2,1556) + 0,5178 + 8) = \frac{4,2066}{3} = 1,4022$$

$$y^{(3)} = -\frac{1}{4}(-2(1,4022) - 2(0,5178) - 4) = \frac{7,84}{4} = 1,96$$

$$z^{(3)} = \frac{1}{5}(1,4022 - 1,96 + 3) = \frac{2,4422}{5} = 0,4884$$

- $|x^{(3)} - x^{(2)}| = 0,3 > \text{erro} = 0,2$
- $|y^{(3)} - y^{(2)}| = 0,19 < \text{erro} = 0,2$
- $|z^{(3)} - z^{(2)}| = 0,03 < \text{erro} = 0,2$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- Iterações

$$x^{(4)} = \frac{1}{3}(-2(1,96) + 0,4884 + 8) = \frac{4,5684}{3} = 1,5228$$

$$y^{(4)} = -\frac{1}{4}(-2(1,5228) - 2(0,4884) - 4) = \frac{8,0224}{4} = 2,0056$$

$$z^{(4)} = \frac{1}{5}(1,5228 - 2,0056 + 3) = \frac{2,5172}{5} = 0,5034$$

- $|x^{(4)} - x^{(3)}| = 0,1 < \text{erro} = 0,2$

- $|y^{(4)} - y^{(3)}| = 0,05 < \text{erro} = 0,2$

- $|z^{(4)} - z^{(3)}| = 0,02 < \text{erro} = 0,2$

- Solução do sistema: [ 1,5228; 2,0056; 0,5034 ]

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)
- Exercício: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,02. Admitir solução inicial nula.

$$x + y + 10z = 12$$

$$10x + y + z = 12$$

$$x + 10y + z = 12$$

# Sistemas Lineares

- Métodos Iterativos (Algoritmos Iterativos)
  - Método de Gauss-Seidel (Matricial)
  - Seja o sistema abaixo:

$$a_{11}x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)})$$

$$a_{22}x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)})$$

⋮

$$a_{nn}x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k)})$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
  - Pode ser representado na forma matricial:

$$D X^{(k)} = B - I X^{(k)} - S X^{(k-1)} \rightarrow (D + I) X^{(k)} = B - S X^{(k-1)}$$

- Multiplicando ambos os membros pela inversa de  $(D + I)$ , temos:

$$(D + I)^{-1} (D + I) X^{(k)} = (D + I)^{-1} B - (D + I)^{-1} S X^{(k-1)}$$

$$X^{(k)} = -(D + I)^{-1} S X^{(k-1)} + (D + I)^{-1} B$$

$$X^{(k)} = G X^{(k-1)} + F$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

$$X^{(k)} = G X^{(k-1)} + F$$

- Onde,

$$G = -(D + I)^{-1} S$$

Grupo de Pesquisa em Visão Computacional,  
Computação Gráfica e Processamento de Imagens

$$F = (D + I)^{-1} B$$

- 

$$x + 5y + z = -8$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
- Verificação de convergência

$$10x + 2y + z = 7$$

$$x + 5y + z = -8$$

$$2x + 3y + 10z = 6$$

$$|a_{11}| \geq |a_{21}| + |a_{31}| \rightarrow |10| \geq |1| + |2|$$

$$|a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}| \rightarrow |5| \geq |2| + |3|$$

$$|a_{33}| \geq |a_{13}| + |a_{23}| \rightarrow |10| \geq |1| + |1|$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Obtenção do Algoritmo

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Obtenção do Algoritmo

- Então,  $G = -(D + I)^{-1} S$

$$\begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 0 \\ 1/50 & -1/5 & 0 \\ 13/500 & 3/50 & -1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ 0 & 1/25 & -9/50 \\ 0 & 13/250 & 43/500 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
- Obtenção do Algoritmo

$$F = (D + I)^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ -1/50 & 1/5 & 0 \\ -13/500 & -3/50 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -87/50 \\ 449/500 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Obtenção do Algoritmo

- Então:

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0,04 & -0,18 \\ 0 & 0,052 & 0,086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,74 \\ 0,898 \end{bmatrix}$$

- Atribuição inicial

- $x^{(0)} = 0 \quad y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0,04 & -0,18 \\ 0 & 0,052 & 0,086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,74 \\ 0,898 \end{bmatrix}$

$$x^{(1)} = -0,2(0) - 0,1(0) + 0,7 = 0,7$$

$$y^{(1)} = 0,04(0) - 0,18(0) - 1,74 = -1,74$$

$$z^{(1)} = 0,052(0) + 0,086(0) + 0,898 = 0,898$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,74 \\ 0,898 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0,04 & -0,18 \\ 0 & 0,052 & 0,086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,74 \\ 0,898 \end{bmatrix}$

$$x^{(2)} = -0,2(-1,74) - 0,1(0,898) + 0,7 = 0,9582$$

$$y^{(2)} = 0,04(-1,74) - 0,18(0,898) - 1,74 = -1,9712$$

$$z^{(2)} = 0,052(-1,74) + 0,086(0,898) + 0,898 = 0,8847$$

- $|x^{(2)} - x^{(1)}| = 0,2 > \text{erro}$
- $|y^{(2)} - y^{(1)}| = 0,2 > \text{erro}$
- $|z^{(2)} - z^{(1)}| = 0,01 < \text{erro}$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,9582 \\ -1,9712 \\ 0,8847 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0,04 & -0,18 \\ 0 & 0,052 & 0,086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,74 \\ 0,898 \end{bmatrix}$

$$x^{(3)} = -0,2(-1,9712) - 0,1(0,8847) + 0,7 = 1,0058$$

$$y^{(3)} = 0,04(-1,9712) - 0,18(0,8847) - 1,74 = -1,9781$$

$$z^{(3)} = 0,052(-1,9712) + 0,086(0,8847) + 0,898 = 0,8716$$

- $|x^{(3)} - x^{(2)}| = 0,04 > \text{erro}$
- $|y^{(3)} - y^{(2)}| = 0,007 < \text{erro}$
- $|z^{(3)} - z^{(2)}| = 0,01 < \text{erro}$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,0058 \\ -1,9781 \\ 0,8716 \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Iterações  $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0,04 & -0,18 \\ 0 & 0,052 & 0,086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,74 \\ 0,898 \end{bmatrix}$

$$x^{(4)} = -0,2(-1,9781) - 0,1(0,8716) + 0,7 = 1,0085$$

$$y^{(4)} = 0,04(-1,9781) - 0,18(0,8716) - 1,74 = -1,9760$$

$$z^{(4)} = 0,052(-1,9781) + 0,086(0,8716) + 0,898 = 0,8701$$

- $|x^{(4)} - x^{(3)}| = 0,002 < \text{erro}$
- $|y^{(4)} - y^{(3)}| = 0,002 < \text{erro}$
- $|z^{(4)} - z^{(3)}| = 0,001 < \text{erro}$

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,0085 \\ -1,9760 \\ 0,8701 \end{bmatrix}$$

- Solução do sistema:  $[1,0085; -1,9760; 0,8701]$

# Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
- Exercício: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,02. Admitir solução inicial nula.

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\x - 3y &= -3\end{aligned}$$

# Sistemas Lineares

- Métodos Iterativos (Algoritmos Iterativos)
  - Método de Relaxação
    - Seja o sistema abaixo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- Se substituirmos valores as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 = r_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 = r_2$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n - b_n = r_n$$

obteremos os valores  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , que são chamados de resíduos.

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação
  - Depois de atribuir valores a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :
    - Procure a equação mais errada de todas;
    - Tente ver nessa equação a incógnita mais responsável pelo erro;
      - Passa a ser considerada a única responsável pelo erro;
    - Ache o valor dessa incógnita responsável;
    - Repita o processo com a segunda equação mais errada e assim por diante.

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- Exemplo: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,1.

$$10x + 2y + z = 7$$

$$x - 15y + z = 32$$

$$2x + 3y + 10z = 6$$

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

$$10x + 2y + z - 7 = 0$$

$$x - 15y + z - 32 = 0$$

$$2x + 3y + 10z - 6 = 0$$

- Substituindo no sistema os valores (0,0,0) para (x,y,z), obtém-se:

- $r_1 = -7$ ,  $r_2 = -32$  e  $r_3 = -6$ , que são chamados de resíduos.

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- Analisando os módulos dos resíduos, verifica-se que  $r_2$  é o maior resíduo, portanto deve-se tentar diminuí-lo a partir da análise do maior responsável na sua equação.
- Analisando a equação 2:  $x - 15y + z - 32 = 0$ , verifica-se que o coeficiente de  $y$  é o maior em módulo, logo, deve-se manter os valores iniciais de  $x$  e  $z$  (0,0) para se obter o valor de  $y$  que anula a equação. Portanto:
- $0 - 15y + 0 - 32 = 0 \rightarrow y = -2,1333$ , que será o novo valor de  $y$ .

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- **2ª tentativa:** Substituindo a trinca  $(0; -2,1333; 0)$  no sistema original, obtem-se:  $r_1 = -11,2666$ ,  $r_2 = -0,0005$  e  $r_3 = 0,3999$ , onde  $r_1$  é em módulo o maior resíduo.
- Analisando a equação 1:  $10x + 2y + z - 7 = 0$ , verifica-se que  $x$  é em módulo o maior responsável pelo resíduo, então substitui-se na equação a dupla  $(-2,1333; 0)$  em  $y$  e  $z$  respectivamente para obter o valor de  $x$  que anula a expressão. Portanto:
- $10x + 2(-2,1333) + 0 - 7 = 0 \rightarrow x = 1,1267$ , que será o novo valor de  $x$ .

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- O processo deve ser repetido até que o módulo de todos os resíduos sejam inferiores ou iguais ao erro estipulado.
- 3ª tentativa: trinca (1,1267; -2,1333; 0) resulta nos resíduos:  $r_1 = 0,0004$ ,  $r_2 = 1,1262$  e  $r_3 = -10,1465$ . Onde,  $r_2$  e  $r_3 > \text{erro} = 0,1$  e  $r_3$  é o maior resíduo.
- Verifica-se na equação 3 que  $z$  é o maior responsável pelo erro, logo:
- $2(1,1267) + 3(-2,1333) + 10z - 6 = 0 \rightarrow z = 1,0147$ , que será o novo valor de  $z$ .

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- 4ª tentativa: trinca (1,1267; -2,1333; 1,0147) resulta nos resíduos:  $r_1 = 1,0141$ ,  $r_2 = 2,1409$  e  $r_3 = 0,0005$ . Onde,  $r_1$  e  $r_2 > \text{erro} = 0,1$  e  $r_2$  é o maior resíduo.
- Verifica-se na equação 2 que  $y$  é o maior responsável pelo erro, logo:
- $1,1267 - 15y + 1,0147 - 32 = 0 \rightarrow y = -1,9906$ , que será o novo valor de  $y$ .

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- 5ª tentativa: trinca (1,1267; -1,9906; 1,0147) resulta nos resíduos:  $r_1 = 1,3005$ ,  $r_2 = 0,0004$  e  $r_3 = 0,4286$ . Onde,  $r_1$  e  $r_3 > \text{erro} = 0,1$  e  $r_1$  é o maior resíduo.
- Verifica-se na equação 1 que  $x$  é o maior responsável pelo erro, logo:
- $10x + 2(-1,9906) + 1,0147 - 7 = 0 \rightarrow x = 0,9967$ , que será o novo valor de  $x$ .

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- 6ª tentativa: trinca  $(0,9967; -1,9906; 1,0147)$  resulta nos resíduos:  $r_1 = 0,0005$ ,  $r_2 = -0,1296$  e  $r_3 = 0,1686$ . Onde,  $r_2$  e  $r_3 > \text{erro} = 0,1$  e  $r_3$  é o maior resíduo.
- Verifica-se na equação 3 que  $z$  é o maior responsável pelo erro, logo:
- $2(0,9967) + 3(-1,9906) + 10z - 6 = 0 \rightarrow z = 0,9978$ , que será o novo valor de  $z$ .

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- 7ª tentativa: trinca  $(0,9967; -1,9906; 0,9978)$  resulta nos resíduos:  $r_1 = 0,0164$ ,  $r_2 = 0,1465$  e  $r_3 = 0,0004$ . Onde,  $r_2 > \text{erro} = 0,1$  e  $r_2$  é o maior resíduo.
- Verifica-se na equação 2 que  $y$  é o maior responsável pelo erro, logo:
- $0,9967 - 15y + 0,9978 - 32 = 0 \rightarrow y = -2,0004$ , que será o novo valor de  $y$ .

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- 8ª tentativa: trinca  $(0,9967; -2,0004; 0,9978)$  resulta nos resíduos:  $r_1 = -0,036$ ,  $r_2 = 0,0005$  e  $r_3 = 0,0298$ . Onde,  $r_1, r_2$  e  $r_3 < \text{erro} = 0,1$ .
- Então:  $(0,9967; -2,0004; 0,9978)$  é a solução do sistema.

# Sistemas Lineares

- Método de Relaxação

- Exercício: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,1.

$$4x + 0,24y - 0,08z = 8$$

$$0,09x + 3y - 0,15z = 9$$

$$0,04x - 0,08y + 4z = 20$$

- (1,9092; 3,1950; 5,0448) é a solução do sistema.