Métodos Numéricos - Notas de Aula

Profª Olga Regina Bellon

Junho 2007

Interpolação

- Introdução
  - A interpolação é outra técnicas bem conhecida e básica do cálculo numérico.
  - Muitas funções são conhecidas apenas em um conjunto finito e discreto de pontos de um intervalo [a,b]. A tabela abaixo, por exemplo, informa o número de carros que passam por um determinado pedágio em um determinado dia .

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Horário	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
Número (em mil)	2,69	1,64	1,09	1,04	1,49	2,44

Tabela 1

Interpolação

- Introdução
  - A partir desses dados suponhamos que se queira calcular:
    - o número de carros que passariam pelo pedágio às 11:30.
  - A interpolação tem o objetivo de ajudar na resolução deste tipo de problema.
  - E também pode ser aplicada sobre um conjunto de valores obtidos através de experimentos.

Interpolação

- Introdução

  - Interpolar uma função *f(x)* consiste em aproximar essa função por uma outra função *g(x)*.
  - *g(x)* é escolhida entre uma classe de funções definidas *a priori* e que satisfaçam algumas propriedades.
  - A função *g(x)* é então usada em substituição à função *f(x)*.

Interpolação

- Introdução

  - A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

    - Quando são conhecidos somente os valores numéricos da função por um conjunto de pontos (não dispondo de sua forma analítica) e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado (exemplo anterior).

Interpolação

- Introdução

  - Quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis ou impossíveis de serem realizadas.

  - Neste caso, podemos procurar uma outra função que seja uma aproximação da função dada e cujo manuseio seja bem mais simples.

Interpolação

- Introdução

  - As funções que substituem as funções dadas podem ser de tipos variados, tais como:
    - polinomiais;
    - trigonométricas;
    - exponenciais;
    - logarítmicas.
  - Porém, será considerado apenas o estudo das funções polinomiais.

Interpolação

- Conceito de Interpolação
  - Seja a função $y = f(x)$, dada pela tabela 1.
    Deseja-se determinar $f(\ddot{X})$, sendo:
    - a) $\ddot{X} \in (x_0 , x_6)$ e $\ddot{X} \neq x_i$, $i = 0, 1, ..., 6$
    - b) $\ddot{X} \notin (x_0 , x_6)$
  - Para resolver (a) tem-se que fazer uma interpolação.
  - Sendo assim, determina-se o polinômio interpolador, que é uma função tabelada.
  - Porém, para resolver (b), deve-se realizar uma extrapolação.

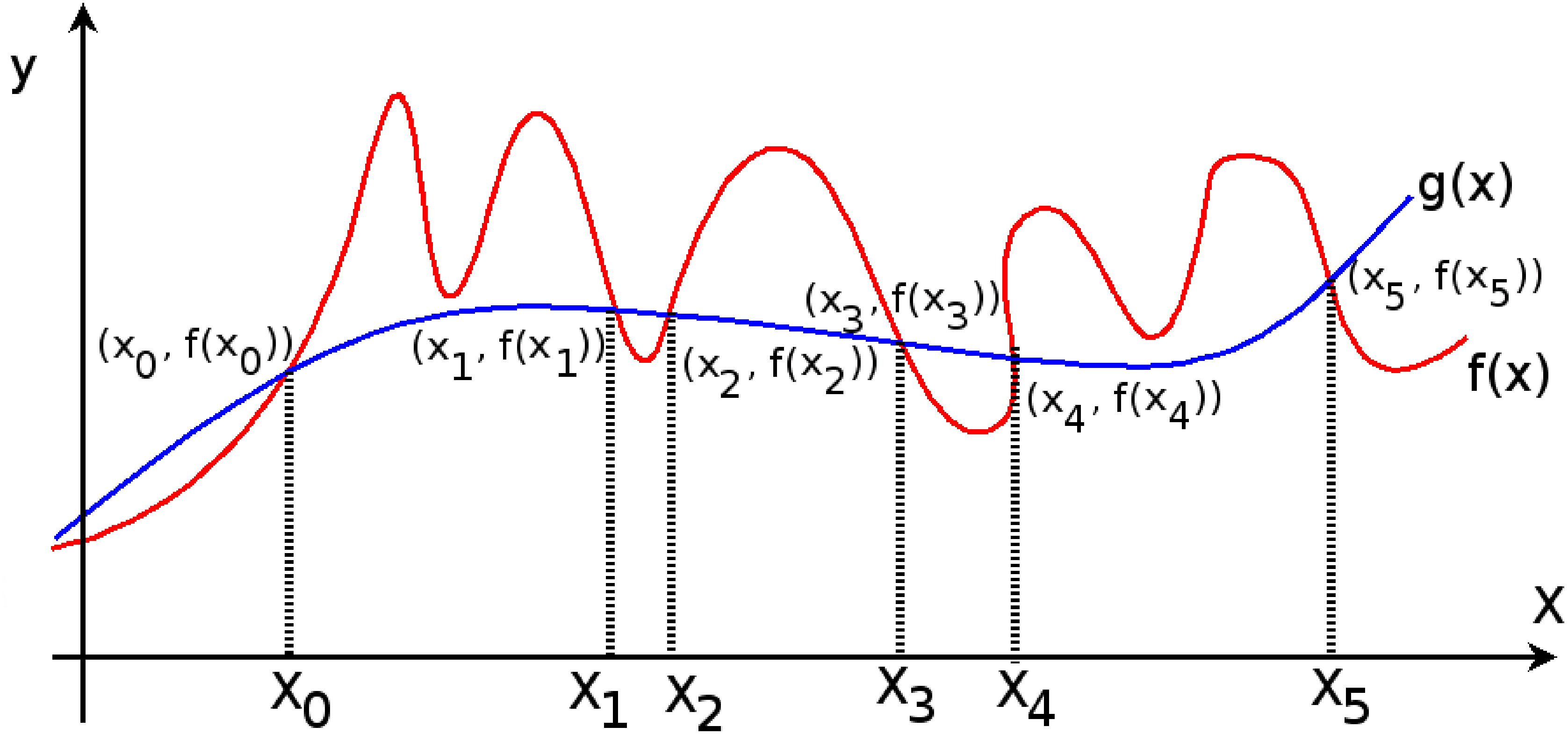
Interpolação

- Conceito de Interpolação
  - Consideremos (n+1) pontos distintos: x_0, x_1, ..., x_n, chamados *nós da interpolação*, e os valores de *f(x)* nesses pontos: $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.
  - Uma forma de interpolação de *f(x)* consiste em se obter uma determinada função *g(x)* tal que:

$$
\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0)\\
g(x_1) &= f(x_1)\\
g(x_2) &= f(x_2)\\
&\vdots\\
g(x_n) &= f(x_n)
\end{aligned}
$$

Interpolação

- Conceito de Interpolação
  - Graficamente temos:



Interpretação geométrica para n = 5

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Obtenção da fórmula
    - Dados dois pontos distintos de uma função $y = f(x)$: (x_0, y_0) e (x_1, y_1), deseja-se calcular o valor de $\bar{y}$ para um determinado valor de $\ddot{X}$ entre x_0 e x_1 , usando a interpolação polinomial.
    - O polinômio interpolador é uma unidade menor que o número de pontos conhecidos.
    - Assim, o polinômio interpolador nesse caso terá grau 1, isto é:
      - $P_1(x) = a_1 x + a_0$

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Obtenção da fórmula
    - Para determinar este polinômio, os coeficientes a_0 e a_1 devem ser calculados de forma que se tenha:
      - $P_1(x_0) = f(x_0) = y_0$ e $P_1(x_1) = f(x_1) = y_1$
    - Ou seja, basta resolver o sistema linear abaixo:
      - $a_1 x_0 + a_0 = y_0$
      - $a_1 x_1 + a_0 = y_1$ onde a_1 e a_0 são as incógtas e

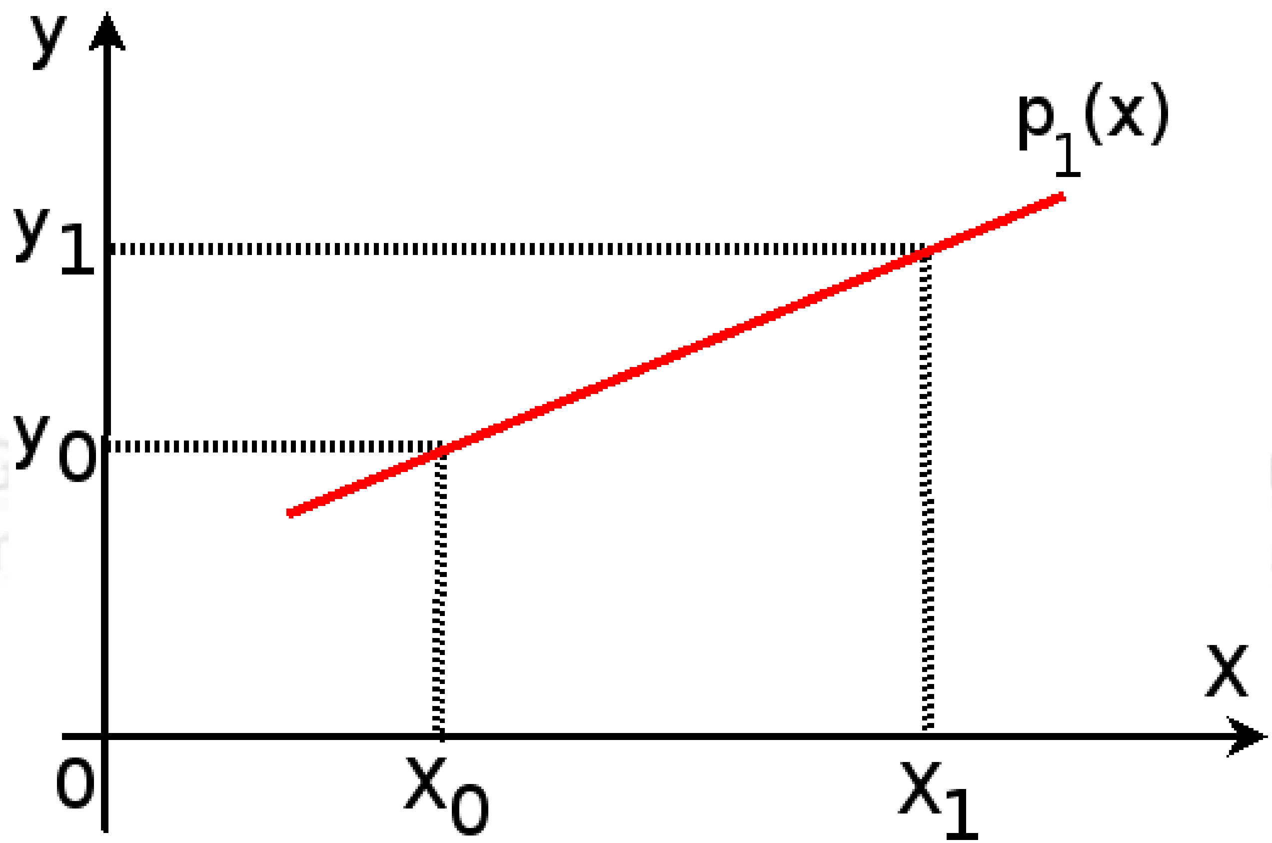
$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes.

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Obtenção da fórmula
    - O determinante da matriz *A* é diferente de zero, sempre que $x_0 \neq x_1$, logo para pontos distintos o sistema tem solução única.
    - O polinômior interpolador $P_1(x) = a_1x + a_0$ tem como imagem geométrica uma reta, portanto a função *f(x)* está sendo aproximada por uma reta que passa pelos pontos conhecidos (x_0,y_0) e (x_1,y_1).

Interpolação

- Interpolação Linear
  - O gráfico abaixo, mostra geometricamente, os dois pontos (x_0,y_0) e (x_1,y_1), e a reta que passa por eles.



Interpolação

- Interpolação Linear
  - Exemplo – Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos da tabela baixo. Determinar o valor de $f(15)$.

x	y
10	250
20	432
30	500

- $P_1(15) = 341$

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Exercício – Na fabricação de determinadas cerâmicas é muito importante saber as condições de temperatura em que o produto foi assado no forno. Como não é possível medir a temperatura do forno a todo instante, ela é medida em intervalos periódicos de tempo e esses dados são interpolados para o instante em que cada peça foi "queimada" a fim de se conhecer a temperatura do forno nesse instante. Em um dia de funcionamento do forno, os seguintes dados foram coletados:

Horário	10:00	13:00	16:00	19:00
Temperatura (10^2 °C)	2,51	2,63	2,55	2,41

  - Estime a temperatura do forno ás 14:30.

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Obtenção da fórmula
    - Se conhecermos três pontos distintos de uma função, então o polinômio interpolador será:
      - $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
    - O polinômio $P_2(x)$ é conhecido como função quadrática cuja imagem geométrica é uma parábola.
    - Portanto, a função $f(x)$ é aproximada por uma parábola que passa pelos três pontos conhecidos (x_0,y_0), (x_1,y_1) e (x_2,y_2).

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Obtenção da fórmula
    - Para determinar os valores de a_0 ,a_1 e a_2 é necessário resolver o sistema:
      - $a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0$
      - $a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1$
      - $a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2$

    onde a_1 ,a_0 e a_2 são as incógnitas e os pontos (x_0,y_0), (x_1,y_1) e (x_2,y_2) são conhecidos.

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Obtenção da fórmula
    - A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

    - Como os pontos são distintos, então o sistema terá solução única.

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Exemplo – A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Temperatura (°C)	86,0	93,3	98,9	104,4	110,0
Velocidade (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

Tabela 4

  - Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de 100 °C, com quatro casas decimais com arredondamento.
    - $P_2(100) = 1542{,}9645$

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Exercício – A resistência de um certo fio (de uma certa substância), *f(x)*, varia com o diâmetro desse fio. A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

	x_1	x_2	x_3	x_4
Diâmetro	1,5	2,0	3,0	4,0
$f(x_i)$	4,9	3,3	2,0	1,5

Tabela 5

  - Estime a resistência de um fio com o diâmetro de 2,7, com quatro casas decimais com arredondamento.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - As interpolações vistas anteriormente são casos particulares da interpolação de Lagrange. Vamos estudar agora o polinômio interpolador de grau menor ou igual a n, sendo dados $n + 1$ pontos distintos.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - **Teorema:** Sejam(x_i,y_i), i = 0, 1, 2, ..., *n*, *n*+1 pontos distintos, isto é, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a *n*, tal que $P(x_i) = y_i$, para todo i.

  - O polinômio $P(x)$ pode ser escrito na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ou $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - $P(x)$ é, no máximo, de grau n, se $a_n \neq 0$ e, para determiná-lo, deve-se conhecer os valores de a_0, a_1, ..., a_n. Como $P_n(x)$ contém os pontos (x_i,y_i), i = 0, 1, ..., n, pode-se escrever que $P_n(x_i) = y_i$.

  - Então temos que:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - Resolvendo o sistema , determina-se o polinômio $P_n(x)$. Para provar que tal polinômio é único, basta que se mostre que o determinante da matriz A, dos coeficientes das incógnitas do sistema, é diferente de zero. A matriz *A* é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Mas o determinante da matriz *A* é conhecido como determinante das potências ou de Vandermonde e, da Álgebra Linear, sabe-se que seu valor é dado por:

$$det(A)=\prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

  - Como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, vem que $\det(A) \neq 0$.
  - Logo, *P*(x) é único.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - Exemplo: Sejam os valores: $x_0 = 5$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 4$ (elementos característicos).

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = (-2)(-3)(-1)(-1)(1)(2) = 12$$

  - Este valor é igual ao determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - Sejam $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, i = 0, 1, ..., *n*.
    - Seja $P_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola *f* em $x_0, \ldots, x_n$.
    - Podemos representar $P_n(x)$ na forma:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau *n*.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - Para cada *i*, queremos que a condição $P_n(x) = y_i$ seja satisfeita, ou seja:

$$P_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = y_i$$

    - A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$$L_k(x_i) = \begin{Bmatrix} 0 & se & k \neq i \\ 1 & se & k = 1 \end{Bmatrix}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - E para isso, definimos $L_k(x)$ por:

$$L_k = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

    - Como o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma: $(x - x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$, então $L_k(x)$ é um polinômio de grau n e, assim, $P_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - Além disso, para x = x_i, i = 0, ..., *n* temos:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$$

    - Então, a interpolação de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \, onde \, L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - Fórmula da interpolação lagrangeana:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[y_k \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \right]$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - Exemplo – A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Temperatura (°C)	86,0	93,3	98,9	104,4	110,0
Velocidade (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

Tabela 6

  - Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de 100 °C, utilizando para tal 3 pontos.

Interpolação

- Interpolação Parabólica Progressiva
  - Precisa-se de n+1pontos, onde n é o grau do polinômio desejado. Em seguida, tomamos os pontos mais próximos, do ponto que queremos, na hora de montar a tabela.
  - **Polinômio de grau 0:**

$$G0 \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Polinômio grau } 0 \\ CTE \end{pmatrix}$$

$$P_0(x) = a_0$$

Interpolação

- Interpolação Parabólica Progressiva
  - **Polinômio de grau 1:**

$$G1 \rightarrow \begin{pmatrix} Polinômio\ grau\ 0 \\ CTE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Polinômio\ grau\ 1 \\ passando\ por\ x_0 \end{pmatrix}$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

  - **Polinômio de grau 2:**

$$G2 \rightarrow \begin{pmatrix} Pol.\ G0 \\ CTE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pol.\ G1 \\ passando\ por\ x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pol.\ G2 \\ passando\ por\ x_0\ e\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Interpolação

- Interpolação Parabólica Progressiva
  - **Polinômio de grau n:**

$$P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

  - Impondo que $P_n(x)$ passe por todos os *n*+1 pontos, temos que:

$$P_n(x_0)=f(x_0)$$
$$P_n(x_1)=f(x_1)$$
$$P_n(x_2)=f(x_2)$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n)=f(x_n)$$

Interpolação

- Interpolação Parabólica Progressiva

  - Validade:

$$x=x_0 \equiv P_0(x_0)=a_0=f(x_0)$$

$$x=x_1 \equiv P_1(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)=f(x_1) \rightarrow$$

$$a_1=\frac{f(x_1)-a_0}{x_1-x_0} \equiv a_1=\frac{f(x_1)-P_0(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$x=x_2 \equiv P_2(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2) \rightarrow$$

$$a_2=\frac{f(x_2)-P_1(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Interpolação

- Interpolação Parabólica Progressiva

  - Logo:

$$x = x_n \equiv P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \ldots + a_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) = f(x_n) \rightarrow$$

$$a_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Interpolação

- Interpolação Parabólica Progressiva

  - Exemplo – A resistência de um certo fio (de uma certa substância), *f(x)*, varia com o diâmetro desse fio. A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

	x_0	x_1	x_2	x_3
Diâmetro	1,5	2,0	3,0	4,0
$f(x_i)$	4,9	3,3	2,0	1,5
Tabela 7				

  - Determinar a expressão analítica destes pares.

Interpolação

- Diferenças Divididas
  - Seja *f(x), função* tabelada em $n+1$ pontos distintos x_0, x_1, x_2, ..., x_n. Defini-se o operador diferenças divididas por:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Interpolação

- Diferenças Divididas
  - Dizemos que $f[x_0,x_1,x_2,...,x_n]$ é a diferença dividida de ordem k da função $f(x)$ sobre os $k + 1$ pontos.
  - Conhecidos os valores que f(x) assume nos pontos distintos $x_0,x_1,x_2,...,x_n$, podemos construir a tabela:

x_i	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,...,x_n]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		-
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]$		-
...	...	...	...		...
x_{n-2}	$f[x_{n-2}]$	$f[x_{n-2},x_{n-1}]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$		-
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1},x_n]$	-		-
x_n	$f[x_n]$	-	-		-

Interpolação

- Propriedade do Operador Diferenças Divididas
  - Pode-se provar que as diferenças divididas satisfazem a propriedade de ser simétrico nos argumentos.
  - Exemplo:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Interpolação

- Interpolação de Newton com Diferenças Divididas
  - Pode-se provar que cada coeficiente a_n do polinômio interpolador de Newton corresponde ao operador de grau *n* de diferenças divididas:

$$f[x_0] = a_0$$

$$f[x_0, x_1] = a_1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = a_2$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = a_n$$

Interpolação

- Interpolação de Newton com Diferenças Divididas

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_{0,} x_1](x-x_0) + f[x_{0,} x_{1,} x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_{0,} x_{1,} x_{2,\ldots}, x_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

Interpolação

- Interpolação de Newton com Diferenças Divididas
  - Exemplo – A velocidade *V* (em m/s) de um foguete lançado do solo foi medida quatro vezes, *t* segundos após o lançamento, e os resultados foram registados na tabela. Determinar a velocidade do foguete 25 segundos após o lançamento, usando um polinômio interpolador do segundo grau (3 pontos).

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
Tempo	0	8	20	30	45
Velocidade (m/s)	0,0	52,032	160,450	275,961	370,276

Tabela 9

Interpolação

- Interpolação de Gregory-Newton
  - Muitas vezes são encontrados problemas de interpolação cuja tabela de pontos conhecidos tem valores que são igualmente espaçados, ou seja:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$$

  - Assim $x_{i+1} - x_i = h$, para todo *i*, sendo *h* uma constante.

$$x_i = x_{i-1} + h \rightarrow x_i = x_0 + i * h$$

Interpolação

- Interpolação de Gregory-Newton
  - Diferenças Ordinárias ou Finitas

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

$$\Delta^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta^1 f(x+h) - \Delta^1 f(x)$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$$

x_i	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f(x_0)$	$\Delta^1 f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$		$\Delta^n f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$	$\Delta^1 f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_1)$		-
x_2	$f(x_2)$	$\Delta^1 f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_2)$		-
...	...	...	...		...
x_{n-2}	$f(x_{n-2})$	$\Delta^1 f(x_{n-2})$	$\Delta^2 f(x_{n-2})$		-
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$\Delta^1 f(x_{n-1})$	-		-
x_n	$f(x_n)$	-	-		-

Interpolação

- Interpolação de Gregory-Newton
  - Relação entre diferenças divididas e diferenças ordinárias
    - **Teorema:** Se $x_j = x_0 + j.h$, para $j = 0,1,2,...,n$, então:

$$f[x_{0,} x_{1,} x_{2,...} x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}$$

Interpolação

- Interpolação de Gregory-Newton
  - Relação entre diferenças divididas e diferenças ordinárias
    - **Prova:**

$$f[x_0]=f(x_0)$$

$$f[x_{0,}x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_{0,}x_{1,}x_2]=\frac{f[x_{1,}x_2]-f[x_{0,}x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{\Delta f(x_1)}{h}-\frac{\Delta f(x_0)}{h}}{2\mathrm{h}}=\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2\mathrm{h}^2}$$

- e por indução podemos mostrar que esta regra é válida para valores maiores que 2.

Interpolação

- Gregory-Newton usando Diferenças Ordinárias

  - Partindo da fórmula original do Método de Newton, que é

$$P_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$

$$+f[x_0,x_1,x_{2,\ldots},x_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

  - podemos derivar a nova fórmula que utiliza as diferenças ordinárias:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2\mathrm{h}^2}(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+$$

$$\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

Interpolação

- Gregory-Newton usando Diferenças Ordinárias

  - Exemplo – Na tabela abaixo estão representados valores de $f(x)=\sqrt{x}$, arredondados para quatro casas decimais. Calcular o valor de $\sqrt{1,12}$ usando um polinômio interpolador de Gregory-Newton (G-N) do segundo grau (3 pontos).

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
f(x)	1,0000	1,0247	1,0488	1,0724	1,0954

Tabela 16

Interpolação

- Gregory-Newton usando Diferenças Ordinárias

  - Exercício – A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Temperatura (°C)	91	95	99	103	107
Velocidade (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

Tabela 22

  - Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de 101 °C, utilizando para tal um polinômio interpolador de segundo grau (3 pontos).