NOTAS DE AULA

Cálculo Numérico

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

- UTFPR -

Professores: Lauro Cesar Galvão
Luiz Fernando Nunes

5 Ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados

5.1 Introdução

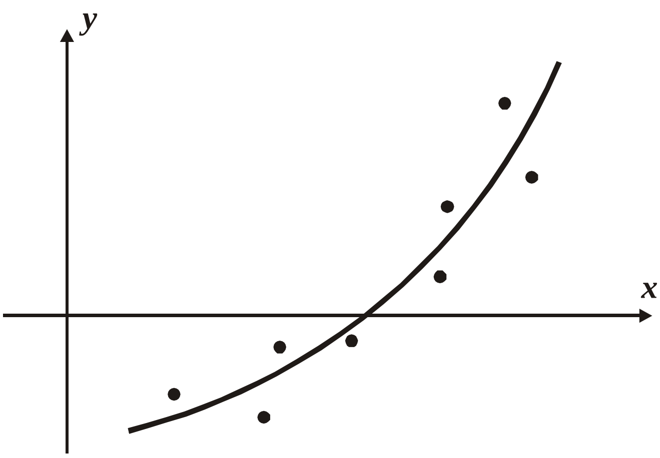
Uma forma de se trabalhar com uma função definida por uma tabela de valores é a interpolação. Contudo, a interpolação pode não ser aconselhável quando:

- É preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo de tabelamento (extrapolação).
- Os valores tabelados são resultado de experimentos físicos, pois estes valores poderão conter erros inerentes que, em geral, não são previsíveis.

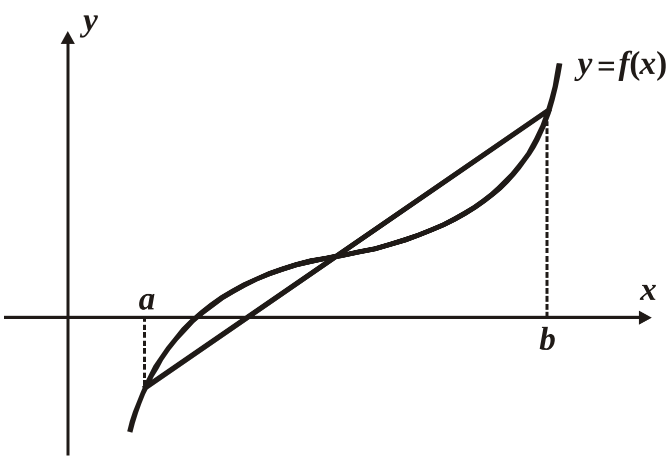
Surge então a necessidade de se ajustar a estas funções tabeladas uma função que seja uma “boa aproximação” para as mesmas e que nos permita “extrapolar” com certa margem de segurança.

Assim, o objetivo deste processo é aproximar uma função f por outra função g, escolhida de uma família de funções em duas situações distintas:

- Domínio discreto: quando a função f é dada por uma tabela de valores.



- Domínio contínuo: quando a função f é dada por sua forma analítica.



5.2 Caso Discreto

O problema do ajuste de curvas no caso em que se tem uma tabela de pontos:

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_m
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\dots$	$f(x_m)$

com $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in [a,b]$, consiste em: "escolhidas" n funções contínuas $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $\dots, g_n(x)$, contínuas em $[a,b]$, obter n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ tais que a função $g(x)=\alpha_1 g_1(x)+\alpha_2 g_2(x)+\alpha_3 g_3(x)+ \dots +\alpha_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Este modelo matemático é linear pois os coeficientes que devem ser determinados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ aparecem linearmente, embora as funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $\dots$, $g_n(x)$ possam ser não lineares.

Surge então a primeira pergunta: Como escolher as funções contínuas $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x), \dots, g_n(x)$?

Esta escolha pode ser feita observando o gráfico dos pontos tabelados (diagrama de dispersão) ou baseando-se em fundamentos teóricos do experimento que forneceu a tabela.

Seja $d_k = f(x_k) - g(x_k)$ o desvio em x_k.

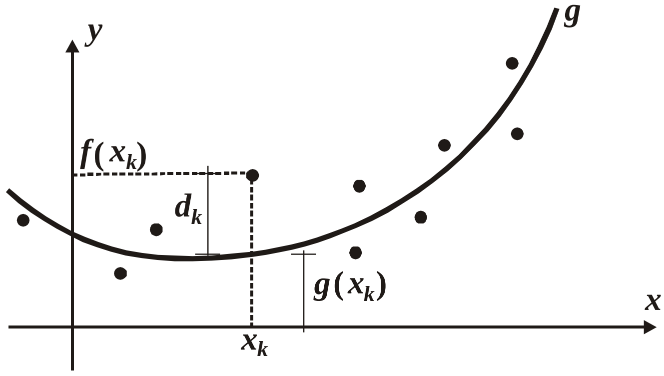
O método dos mínimos quadrados consiste em escolher os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima, isto é:

$\sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - g(x_k)]^2$ deve ser mínimo.

Assim, os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ que fazem com que $g(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$, são os que minimizam a função:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - g(x_k)]^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \alpha_3 g_3(x_k) - \dots - \alpha_n g_n(x_k)]^2 .$$



Para isto é necessário que:

$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = 0$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, isto é:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) =$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-\cdots-\alpha_n g_n(x_k)]\cdot[-g_j(x_k)]=0,\ \ j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n$$

ou

$$\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-\cdots-\alpha_n g_n(x_k)]\cdot[g_j(x_k)]=0,$$

$j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n$

Assim, tem-se o seguinte sistema de n equações lineares com n incógnitas α_1, α_2, α_3, … , α_n:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-\cdots-\alpha_n g_n(x_k)]\cdot[g_1(x_k)]=0\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-\cdots-\alpha_n g_n(x_k)]\cdot[g_2(x_k)]=0\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-\cdots-\alpha_n g_n(x_k)]\cdot[g_n(x_k)]=0\end{cases}$$

Que é equivalente a:

$$\begin{cases}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)\cdot g_1(x_k)\right]\cdot\alpha_1+\cdots+\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)\cdot g_n(x_k)\right]\cdot\alpha_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)\cdot f(x_k)\\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_2(x_k)\cdot g_1(x_k)\right]\cdot\alpha_1+\cdots+\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_2(x_k)\cdot g_n(x_k)\right]\cdot\alpha_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_2(x_k)\cdot f(x_k)\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)\cdot g_1(x_k)\right]\cdot\alpha_1+\cdots+\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)\cdot g_n(x_k)\right]\cdot\alpha_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)\cdot f(x_k)\end{cases}$$

As equações deste sistema linear são chamadas de equações normais.

Este sistema pode ser escrito na forma matricial $A\cdot\alpha=b$:

$$\begin{cases}a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1\\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}\alpha_1 & + & a_{n2}\alpha_2 & + & \cdots & + & a_{nn}\alpha_n & = & b_n\end{cases}$$

onde $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij}=\sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)\cdot g_j(x_k)=\sum_{k=1}^{m} g_j(x_k)\cdot g_i(x_k)=a_{ji}$, ou seja, A é uma matriz simétrica;

$\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$ e $b=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ é tal que $b_i=\sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)\cdot f(x_k)$.

Lembrando que, dados os vetores x e y $\in\Re^m$ o número real $\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{m} x_k\cdot y_k$ é chamado de produto escalar de x por y, e usando esta notação no sistema normal $A\cdot\alpha=b$, tem-se: $a_{ij}=\langle\bar{g}_i,\bar{g}_j\rangle$ e $b_i=\langle\bar{g}_i,\bar{f}\rangle$ onde:

$\bar{g}_l$ é o vetor $[g_l(x_1)\ \ g_l(x_2)\ \ g_l(x_3)\ \ \cdots\ \ g_l(x_m)]^T$ e

$\bar{f}$ é o vetor $[f(x_1) \quad f(x_2) \quad f(x_3) \quad \cdots \quad f(x_m)]^T$.

Desta forma o sistema na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_n \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \bar{g}_n, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_n, \bar{g}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{g}_n, \bar{g}_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{f} \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{f} \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{g}_n, \bar{f} \rangle \end{bmatrix}$$

Demonstra-se que, se as funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, … , $g_n(x)$ forem tais que os vetores $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \cdots, \bar{g}_n$, sejam linearmente independentes (LI), então $\det A \neq 0$ e o sistema de equações é possível e determinado (SPD). Demonstra-se ainda que a solução única deste sistema, α_1, α_2, α_3, … , α_n é o ponto em que a função $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ atinge seu valor mínimo.

OBS. 3: Se os vetores $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \cdots, \bar{g}_n$, forem ortogonais entre si, isto é, se $\langle \bar{g}_i, \bar{g}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle \bar{g}_i, \bar{g}_j \rangle \neq 0$ se $i = j$, a matriz dos coeficientes A será uma matriz diagonal, o que facilita a resolução do sistema $A \cdot \alpha = b$.

89. (Regressão Linear) Ajustar os dados da tabela abaixo através de uma reta.

i	1	2	3	4	5
x_i	1,3	3,4	5,1	6,8	8,0
$f(x_i)$	2,0	5,2	3,8	6,1	5,8

Resolução: Fazendo $g(x) = \alpha_1 \cdot g_1(x) + \alpha_2 \cdot g_2(x)$ e considerando

$g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$, tem-se: $g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x$.

Assim, a reta que melhor se ajusta aos valores da tabela terá coeficientes α_1 e α_2, que são solução do seguinte sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{f} \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{f} \rangle \end{bmatrix}$$

$\bar{g}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

$\bar{g}_2 = [1{,}3 \quad 3{,}4 \quad 5{,}1 \quad 6{,}8 \quad 8{,}0]^T$

$\bar{f} = [2{,}0 \quad 5{,}2 \quad 3{,}8 \quad 6{,}1 \quad 5{,}8]^T$

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle =$ (1)(1)+(1)(1)+(1)(1)+(1)(1)+(1)(1) = 5

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle =$ (1)(1,3)+(1)(3,4)+(1)(5,1)+(1)(6,8)+(1)(8,0) = 24,6

$\langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle =$ (1,3)(1)+(3,4)(1)+(5,1)(1)+(6,8)(1)+(8,0)(1) = 24,6

$\langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle =$ (1,3)(1,3)+(3,4)(3,4)+(5,1)(5,1)+(6,8)(6,8)+(8,0)(8,0) = 149,50

$\langle \bar{g}_1, \bar{f} \rangle =$ (1)(2,0)+(1)(5,2)+(1)(3,8)+(1)(6,1)+(1)(5,8) = 22,9

$\langle \bar{g}_2, \bar{f} \rangle =$ (1,3)(2,0)+(3,4)(5,2)+(5,1)(3,8)+(6,8)(6,1)+(8,0)(5,8) = 127,54

Assim,

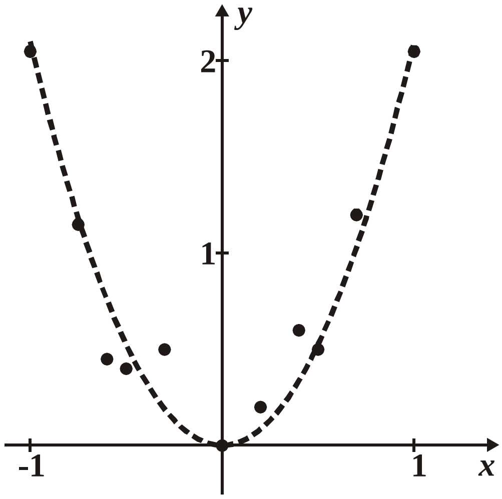
$$\begin{bmatrix} 5 & 24{,}6 \\ 24{,}6 & 149{,}50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22{,}9 \\ 127{,}54 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 2{,}01 \text{ e } \alpha_2 = 0{,}522$$

Logo a equação da reta procurada é:

$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x \Rightarrow g(x) = 2{,}01 + 0{,}522\,x$

90. Ajustar os dados da tabela através da parábola $g_1(x) = x^2$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	–1	–0,75	–0,6	–0,5	–0,3	0	0,2	0,4	0,5	0,7	1
$f(x_i)$	2,05	1,153	0,45	0,4	0,5	0	0,2	0,6	0,512	1,2	2,05



Resolução: Fazendo $g(x) = \alpha_1 \cdot g_1(x)$ e considerando $g_1(x) = x^2$, obtém-se $g(x) = \alpha_1 \cdot x^2$. Assim, para se obter a parábola que melhor se ajusta aos pontos da tabela, será necessário encontrar α_1 do sistema:

$$[\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle] \cdot [\alpha_1] = [\langle \bar{f}, \bar{g}_1 \rangle]$$

$$\bar{g}_1 = [(-1)^2 \quad (-0{,}75)^2 \quad (-0{,}6)^2 \quad \cdots \quad (0{,}7)^2 \quad (1)^2]^T$$

$$\bar{f} = [2{,}05 \quad 1{,}153 \quad 0{,}45 \quad \cdots \quad 1{,}2 \quad 2{,}05]^T$$

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle = (-1)^2(-1)^2 + (-0{,}75)^2(-0{,}75)^2 + (-0{,}6)^2(-0{,}6)^2 + \ldots + (0{,}7)^2(0{,}7)^2 + (1)^2(1)^2 = 2{,}8464$

$\langle \bar{g}_1, \bar{f} \rangle = (-1)^2(2{,}05) + (-0{,}75)^2(1{,}153) + (-0{,}6)^2(0{,}45) + \ldots + (0{,}7)^2(1{,}2) + (1)^2(2{,}05) = 5{,}8756$.

Assim, $\alpha_1 = \dfrac{5{,}8756}{2{,}8464} = 2{,}0642$

Logo a equação da parábola procurada é: $g(x) = \alpha_1 \cdot x^2 \Rightarrow g(x) = 2{,}0642 \cdot x^2$

91. Ajustar os dados da tabela abaixo por um polinômio do segundo grau $g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2$.

i	1	2	3	4
x_i	–2	–1	1	2
$f(x_i)$	1	–3	1	9

Resolução: Neste caso tem-se que: $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_3 \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_3 \rangle \\ \langle \bar{g}_3, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_3, \bar{g}_2 \rangle & \langle \bar{g}_3, \bar{g}_3 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{f} \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{f} \rangle \\ \langle \bar{g}_3, \bar{f} \rangle \end{bmatrix}$$

$\bar{g}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

$\bar{g}_2 = [-2 \quad -1 \quad 1 \quad 2]^T$

$\bar{g}_3 = [(-2)^2 \quad (-1)^2 \quad (1)^2 \quad (2)^2]^T$

$\bar{f} = [1 \quad -3 \quad 1 \quad 9]^T$

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle = (1)(1)+(1)(1)+(1)(1)+(1)(1) = 4$

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = (1)(-2)+(1)(-1)+(1)(1)+(1)(2) = 0$

$\langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle = (-2)(1)+(-1)(1)+(1)(1)+(2)(1) = 0$

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_3 \rangle = (1)(-2)^2+(1)(-1)^2+(1)(1)^2+(1)(2)^2 = 10$

$\langle \bar{g}_3, \bar{g}_1 \rangle = (-2)^2(1)+(-1)^2(1)+(1)^2(1)+(2)^2(1) = 10$

$\langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle = (-2)(-2)+(-1)(-1)+(1)(1)+(2)(2) = 10$

$\langle \bar{g}_2, \bar{g}_3 \rangle = (-2)(-2)^2+(-1)(-1)^2+(1)(1)^2+(2)(2)^2 = 0$

$\langle \bar{g}_3, \bar{g}_2 \rangle = (-2)^2(-2)+(-1)^2(-1)+(1)^2(1)+(2)^2(2) = 0$

$\langle \bar{g}_3, \bar{g}_3 \rangle = (-2)^2(-2)^2+(-1)^2(-1)^2+(1)^2(1)^2+(2)^2(2)^2 = 34$

$\langle \bar{g}_1, \bar{f} \rangle = (1)(1)+(1)(-3)+(1)(1)+(1)(9) = 8$

$\langle \bar{g}_2, \bar{f} \rangle = (-2)(1)+(-1)(-3)+(1)(1)+(2)(9) = 20$

$\langle \bar{g}_3, \bar{f} \rangle = (-2)^2(1)+(-1)^2(-3)+(1)^2(1)+(2)^2(9) = 38$ Assim,

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 38 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = -3,\ \ \alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 2$. Logo a equação da parábola procurada é: $g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 \Rightarrow g(x) = -3 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2$

5.3 *Caso Contínuo*

No caso contínuo, o problema de ajuste de curvas consiste em: dada uma função $f(x)$, contínua em $[a, b]$ e escolhidas as funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, ..., $g_n(x)$, todas contínuas em $[a, b]$, determinar constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ de modo que a função $g_n(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)$, se aproxime ao máximo de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Seguindo o critério dos mínimos quadrados para o conceito de proximidade entre $f(x)$ e $g(x)$, os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ a serem obtidos são tais que $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ seja o menor possível.

Para achar α tal que $g(x) \approx f(x)$, tome:

$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx = F(\alpha) = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$.

Encontram-se os pontos críticos de $F(\alpha)$:

$\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Mas, $F(\alpha) = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x)^2 - 2f(x)g(x) + g(x)^2] dx$

$\Rightarrow F(\alpha) = \int_a^b f(x)^2 dx - 2\int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g(x)^2 dx$.

Ao desenvolver $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha)=0,\ j=1,2,\ldots,n$, obtém-se:

$$\begin{cases}\left[\int_a^b g_1^2(x)dx\right]\alpha_1 & + & \cdots & + & \left[\int_a^b g_1(x)g_n(x)dx\right]\alpha_n & = & \int_a^b f(x)g_1(x)dx\\ \left[\int_a^b g_2(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 & + & \cdots & + & \left[\int_a^b g_2(x)g_n(x)dx\right]\alpha_n & = & \int_a^b f(x)g_2(x)dx\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ \left[\int_a^b g_n(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 & + & \cdots & + & \left[\int_a^b g_n^2(x)dx\right]\alpha_n & = & \int_a^b f(x)g_n(x)dx\end{cases}.$$

Este é um sistema linear $A\alpha=b$ de ordem n.

$A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij}=\int_a^b g_i(x)g_j(x)dx=a_{ji} \Rightarrow \boxed{a_{ij}=a_{ji}}$.

A é SIMÉTRICA. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$ e $b=(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n)$, tal que $b_i=\int_a^b f(x)g_i(x)dx$.

Usando a definição de produto escalar de duas funções $p(x)$ e $q(x)$ no intervalo $[a,b]$ por $\langle p,q\rangle=\int_a^b p(x)\cdot q(x)dx$, o sistema $A\alpha=b$ fica:

$A=(a_{ij})=\left\langle g_i,g_j\right\rangle$ e $b=(b_i)=\left\langle f,g_i\right\rangle$.

92. Aproximar a função $f(x)=4x^3$ por um polinômio do primeiro grau, uma reta, no intervalo [0,1].

Resolução:

$g(x)=\alpha_1\, g_1(x)+\alpha_2\, g_2(x)=\alpha_1+\alpha_2\, x$, isto é, $g_1(x)=1$ e $g_2(x)=x$.

$$A\alpha=b \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\langle g_1,g_1\rangle & \langle g_1,g_2\rangle\\ \langle g_2,g_1\rangle & \langle g_2,g_2\rangle\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle f,g_1\rangle\\ \langle f,g_2\rangle\end{bmatrix}$$

$$a_{11}=\langle g_1,g_1\rangle=\int_0^1 g_1^2(x)dx=\int_0^1 dx=x\Big|_0^1=1$$

$$a_{12}=\langle g_1,g_2\rangle=\langle g_2,g_1\rangle=a_{21}=\int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$a_{22}=\langle g_2,g_2\rangle=\int_0^1 g_2^2(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$b_1=\langle f,g_1\rangle=\int_0^1 f(x)g_1(x)dx=\int_0^1 4x^3dx=x^4\Big|_0^1=1$$

$$b_2=\langle f,g_2\rangle=\int_0^1 f(x)g_2(x)dx=\int_0^1 4x^3x\,dx=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{4}{5}$$

$$A\alpha=b \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1=-\frac{4}{5} \text{ e } \alpha_2=\frac{18}{5}.$$

Logo:

$$\boxed{g(x)=\frac{18}{5}x-\frac{4}{5}} \approx f(x)=4x^3 \text{ em } [0,1].$$

93. Aproximar a função $f(x)=e^x$ no intervalo [0,1] por uma reta.

Resolução:

$g(x)=\alpha_1 g_1(x)+\alpha_2 g_2(x)=\alpha_1+\alpha_2 x$,

isto é, $g_1(x)=1$ e $g_2(x)=x$.

$$A\alpha=b \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \langle g_1,g_1\rangle & \langle g_1,g_2\rangle \\ \langle g_2,g_1\rangle & \langle g_2,g_2\rangle \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \langle f,g_1\rangle \\ \langle f,g_2\rangle \end{bmatrix}$$

$$a_{11}=\langle g_1,g_1\rangle = \langle 1,1\rangle = \int_0^1 1\cdot 1dx=\left[x\right]_0^1=1$$

$$a_{12}=\langle g_1,g_2\rangle = \langle 1,x\rangle = \int_0^1 1\cdot xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$a_{21}=\langle g_2,g_1\rangle = \langle g_1,g_2\rangle = \frac{1}{2}$$

$$a_{22}=\langle g_2,g_2\rangle = \langle x,x\rangle = \int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$b_1=\langle f,g_1\rangle=\langle e^x,1\rangle=\int_0^1 e^xdx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$$

$$b_2=\langle f,g_2\rangle=\langle e^x,x\rangle=\int_0^1 e^x\cdot xdx$$

Usando o método de integração por partes em b_2: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$

$\int x\cdot e^xdx=?$

Fazendo $u=x \rightarrow du=dx$ e $dv=e^xdx \rightarrow v=e^x$, obtém-se:

$\int x\cdot e^xdx=x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx=x\cdot e^x-e^x=(x-1)e^x+C$

Logo, $\int_0^1 x\cdot e^xdx = \left[(x-1)\cdot e^x\right]_0^1 = 0-(-1\cdot e^0)=1$.

Assim:

$$A\alpha=b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1=4e-10 \text{ e } \alpha_2=18-6e.$$

Logo:

$\boxed{g(x)=(18-6e)x+4e-10} \approx f(x)=e^x$ em [0,1].

5.4 Família de Funções Não Lineares nos Parâmetros

Em alguns casos, a família de funções escolhidas pode ser não linear nos parâmetros, isto é, $g(x)$ não é da forma $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot g_k(x)$. Nestes casos é preciso efetuar uma "linearização", através de transformações convenientes.

Exemplos:

- 1º) $f(x) \approx \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 x} = g(x)$

  $\ln f(x) \approx \ln \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 x} = \ln \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x = G(x)$.

  Fazendo $\ln \alpha_1 = a_1$ e $\alpha_2 = a_2$, tem-se: $G(x) = a_1 + a_2 \cdot x$,

  Desta forma $G(x) \approx \ln f(x)$, sendo que $G(x)$ é linear nos parâmetros a_1 e a_2.

- 2º) $f(x) \approx \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x} = g(x)$

  $\dfrac{1}{f(x)} \approx \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x = G(x)$.

  Fazendo $\alpha_1 = a_1$ e $\alpha_2 = a_2$, tem-se: $G(x) = a_1 + a_2 \cdot x$,

  Desta forma $G(x) \approx \dfrac{1}{f(x)}$, sendo que $G(x)$ é linear nos parâmetros a_1 e a_2.

- 3º) $f(x) \approx \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x} = g(x)$

  $f^2(x) \approx \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x = G(x)$.

  Fazendo $\alpha_1 = a_1$ e $\alpha_2 = a_2$, tem-se: $G(x) = a_1 + a_2 \cdot x$,

  Desta forma $G(x) \approx f^2(x)$, sendo que $G(x)$ é linear nos parâmetros a_1 e a_2.

94. Ajustar os dados da tabela que segue por uma função da forma $g(x) = \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 x}$.

x	0	1	2
$f(x)$	1	0,5	0,7

Resolução: Desta forma, "linearizando" a função $g(x) = \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 x}$, como no primeiro exemplo anterior, tem-se:

$\mathbf{ln}\, f(x) \approx \mathbf{ln}\, \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 x} = \mathbf{ln}\, \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x = G(x)$.

Fazendo $\mathbf{ln}\, \alpha_1 = a_1$ e $\alpha_2 = a_2$, tem-se: $G(x) = a_1 + a_2 \cdot x$.

Desta forma $G(x) \approx \mathbf{ln}\, f(x)$, sendo que $G(x)$ é linear nos parâmetros a_1 e a_2.

Fazendo agora $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$:

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \overline{\mathbf{ln}\, f}, \bar{g}_1 \rangle \\ \langle \overline{\mathbf{ln}\, f}, \bar{g}_2 \rangle \end{bmatrix}$$

$\bar{g}_1 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$

$\bar{g}_2 = [0 \quad 1 \quad 2]^T$

$\overline{\mathbf{ln}\, f} = [\mathbf{ln}\, 1 \quad \mathbf{ln}\, 0{,}5 \quad \mathbf{ln}\, 0{,}7]^T$

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle = (1)(1) + (1)(1) + (1)(1) = 3$

$\langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = (1)(0) + (1)(1) + (1)(2) = 3$

$\langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle = \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = 3$

$\langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle = (0)(0) + (1)(1) + (2)(2) = 5$

$\langle \overline{\mathbf{ln}\, f}, \bar{g}_1 \rangle = (\mathbf{ln}\, 1)(1) + (\mathbf{ln}\, 0{,}5)(1) + (\mathbf{ln}\, 0{,}7)(1) = -1{,}050$

$\langle \overline{\mathbf{ln}\, f}, \bar{g}_2 \rangle = (\mathbf{ln}\, 1)(0) + (\mathbf{ln}\, 0{,}5)(1) + (\mathbf{ln}\, 0{,}7)(2) = -1{,}406$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}050 \\ -1{,}406 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = -0{,}172 \text{ e } a_2 = -0{,}178.$$

Assim, $\alpha_2 = a_2 = -0{,}178$ e $\alpha_1 = e^{a_1} = e^{-0{,}172} = 0{,}842$.

Desta forma, tem-se que: $g(x) = \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 x}$

$\Rightarrow \boxed{g(x) = 0{,}842 \cdot e^{-0{,}178x}} \approx f(x)$.

Os parâmetros assim obtidos não são ótimos dentro do critério dos mínimos quadrados, isto porque estamos ajustando o problema linearizado por mínimos quadrados e não o problema original. Portanto, os parâmetros a_1 e a_2 do exemplo, são os que ajustam a função $G(x)$ à função $\mathbf{ln}\, f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados. Não se pode afirmar que os parâmetros α_1 e α_2 (obtidos de a_1 e a_2) são os que ajustam $g(x) = \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 x}$ à $f(x)$, dentro do critério dos mínimos quadrados.

8 Referências Bibliográficas

1 **ALBRECHT**, P. Análise numérica: um curso moderno. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP, 1973.

2 **JACQUES**, I.; **JUDD**, C. Numerical analysis. London: Chapman and Hall, 1987.

3 **SANTOS**, V. R. B. Curso de cálculo numérico. São Paulo: USP, 1982.

4 **BARROSO**, L. C. Cálculo numérico (com aplicações). São Paulo: Harbra Editora Ltda., 1987.

5 **BURDEN**, R. L.; **FAIRES**, D. Análise Numérica. São Paulo: Thomson/Pioneira, 2008.

6 **MIRSHAWKA**, V. Cálculo numérico. São Paulo: Nobel, 1981.

7 **RUGGIERO**, M. A. G. e **LOPES**, V. L. R. Cálculo numérico: aspéctos teóricos e computacionais. São Paulo: Makron Books, 1997.

8 **SPERANDIO**, D.; **MENDES**, J. T.; **SILVA**, L. H. M. e. Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos dos métodos numéricos. São Paulo: Prentice Hall, 2003.