Métodos Numéricos - Notas de Aula

Prof^a Olga Regina Bellon

Junho 2007

Integração Numérica

- Introdução
  - Do ponto de vista analítico existem diversas regras, que podem ser utilizadas na prática.
  - Porém, técnicas de integração analítica, como o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, nem sempre resolvem todos os casos.
  - Também não se pode dizer que uma função simples terá também uma primitiva simples.
    - Pois $f(x) = 1/x$ (função algégrica racional)
    - $ln(x)$ (função transcendente $\rightarrow$ primitiva de $1/x$)

Integração Numérica

- Introdução
  - Quando não se pode calcular a integral por métodos analíticos, mecânicos ou gráficos, recorre-se a métodos algorítmicos.
  - Porém existem situações em que apenas os métodos numéricos podem ser usados.
    - Se não possuirmos a expressão analítica de *f*, poderemos apenas usar o método numérico.
  - A integração numérica pode trazer ótimos resultados quando outros métodos falham.

Integração Numérica

- Introdução

  - A solução numérica de uma integral simples é comumente chamada de quadratura.

  - Sabe-se que do Cálculo Diferencial e Integral que se $f(x)$ é uma função contínua em [a,b], então esta função tem uma primitiva neste intervalo.

    - Assim, existe $F(x)$ tal que $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, com $F'(x) = f(x)$;

Integração Numérica

- Introdução
  - Demonstra-se que, no intervalo [a,b],

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

  - tais métodos, não se aplicam a alguns tipos de integrandos *f(x)*, se não são conhecidas suas primitivas *F(x)*.
  - Nestes casos, e naqueles em que a obtenção da primitiva, embora viável, é muito trabalhosa, podem ser empregados métodos para o cálculo do valor numérico aproximado de:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Integração Numérica

- Introdução
  - A aplicação de tais métodos é obviamente necessária no caso em que o valor de *f(x)* é conhecido apenas em alguns pontos, num intervalo [a,b], ou através de um gráfico. Lembrando que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \,(Riemann),$$

$$onde\ \bar{X}_i \in [x_{i-1}, x_i]\ partes\ de\ [a,b],\ com\ x_0 = a,\ x_n = b$$

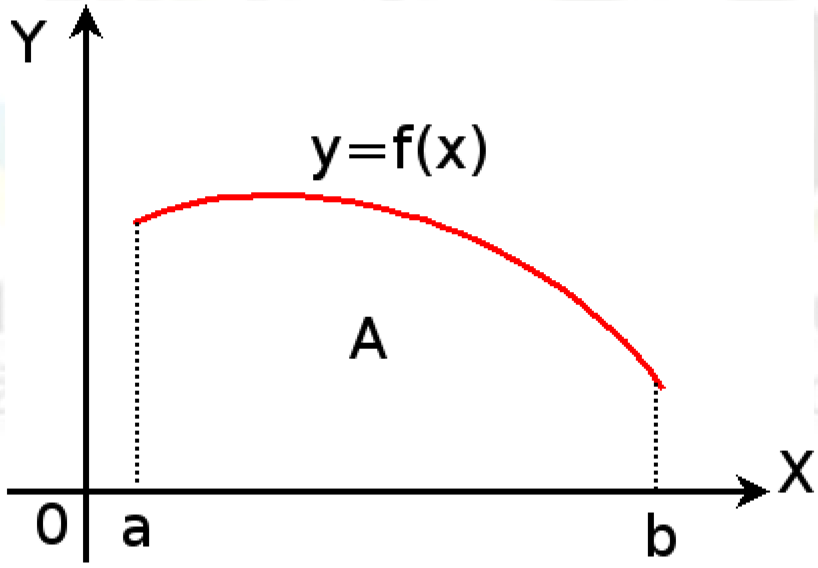
$$e\ \Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|,\ para\ n\ suficientemente\ grande$$

$$e\ \Delta x_i\ suficientemente\ pequeno.$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \to \lim_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Integração Numérica

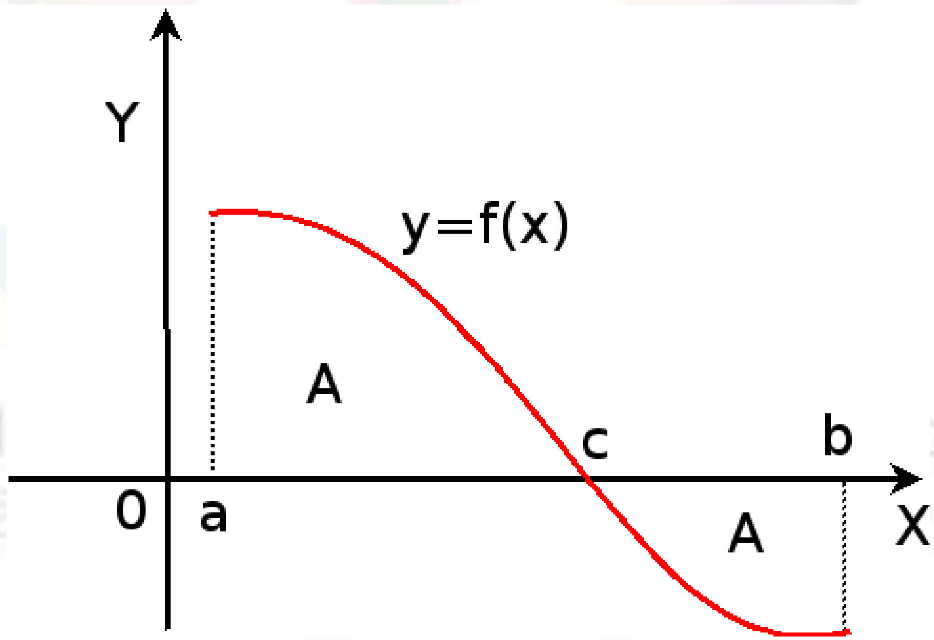
- Introdução
  - Sendo *f(x)* não negativa em [a,b], $\int_a^b f(x)\,dx$ representa, numericamente, a área da figura delimitada por *y=0, x = a, x = b e y = f(x)*, como mostra a figura abaixo:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integração Numérica

- Introdução
  - Quando *f(x)* não for somente positiva, pode-se considerar *f(x)* em módulo, para **o cálculo da área**, como mostra a figura abaixo:



$$A=\int_a^c f(x)+\int_c^b |f(x)|dx \quad ou \quad A=\int_a^b |f(x)|dx$$

Integração Numérica

- Introdução

  - A idéia básica da integração numérica é a substituição da função *f(x)* por um polinômio que a aproxime razoavelmente no intervalo [a,b].

  - Assim o problema fica resolvido pela integração de polinômios (tarefa trivial).

Integração Numérica

- Introdução

  - Com este raciocínio podemos deduzir fórmulas para aproximar a integral de f(x)dx no intervalo [a;b].

  - As fórmulas que deduziremos terão a expressão abaixo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n)$$

$$x_i \in [a, b],\ i = 0, 1, \ldots, n$$

Integração Numérica

- Fórmulas de Newton-Cotes

  - Nas fórmulas de Newton-Cotes a idéia de polinômio que aproxime *f(x)* razoavelmente é que este polinômio interpole *f(x)* em pontos de [a,b] igualmente espaçados.

  - Consideremos a partição do intervalo [a,b] em subintervalos, de comprimento *h*, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Assim $x_{i+1} - x_i = h = (b - a) / n$.

Integração Numérica

- Fórmulas de Newton-Cotes

  - As *fórmulas fechadas de Newton-Cotes* são fórmulas de integração do tipo $x_0 = a$, $x_n = b$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

  - Sendo os coeficientes A_i determinados de acordo com o grau do polinômio aproximador.

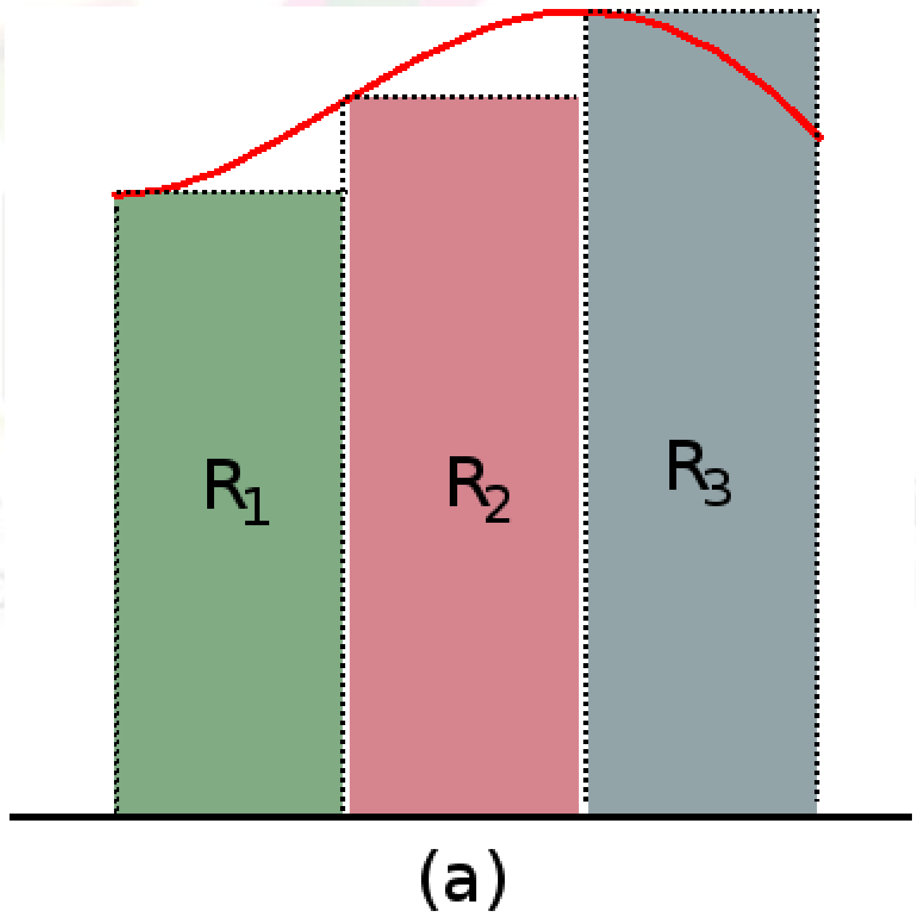
  - Analisaremos a seguir algumas fórmulas fechadas de Newton-Cotes como regra dos retângulos, regra dos trapézios e regra de Simpson.

Integração Numérica

- Regra dos Retângulos
  - Seja o intervalo finito [a,b] no eixo *x* que é particionado em *n* subintervalos igualmente espaçados $[x_i, x_{i+1}]$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $h_i = x_{i+1} - x_i$.
  - Seja *f* uma função contínua ou simplesmente Riemann integrável, cuja integral não é conhecida.
  - Nosso objetivo é calcular $A = \int_a^b f(x)\,dx$ pelo método da área dos retângulos.
  - Tais retângulos podem ser considerados de diversas maneiras.

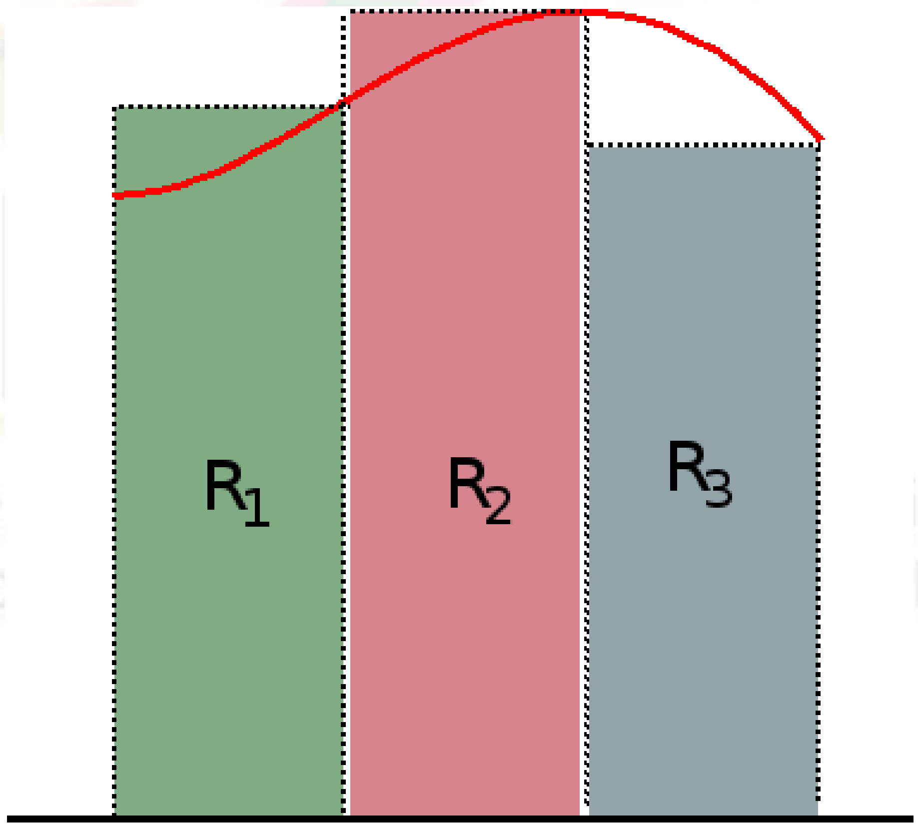
Integração Numérica

- Regra dos Retângulos
  - No primeiro caso, a área de cada retângulo é $f(x_i)*h_i$.



Integração Numérica

- Regra dos Retângulos
  - Em (b) a área de cada retângulo é $f(x_{i+1})*h_i$.

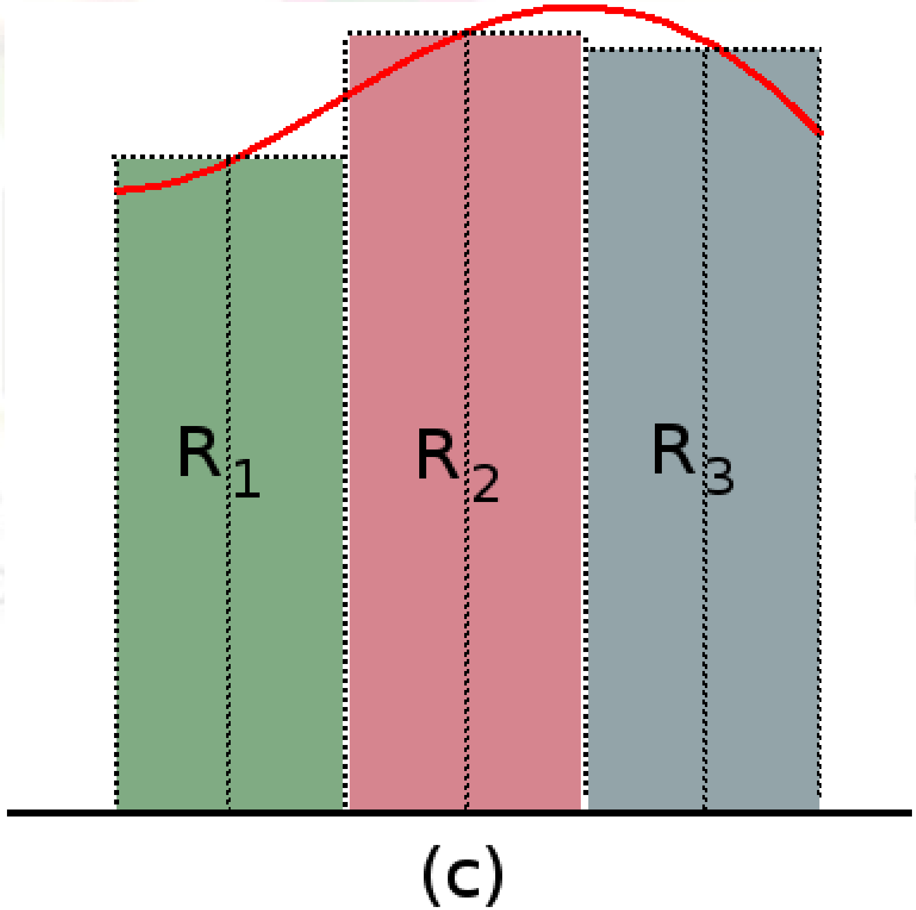


(b)

Integração Numérica

- Regra dos Retângulos

  - E em (c) a área de cada retângulo é $f((x_i + x_{i+1})/2)*h_i$.



Integração Numérica

- Regra dos Retângulos
  - Em qualquer caso a soma das áreas dos retângulos será uma aproximação para: $\int_a^b f(x)\,dx$
  - Subdividindo o intervalo [a,b] em *n* subintervalos, pela regra dos retângulos, que será indicado por *R(h)*, é dada pelas fórmulas:

$$R(h_n)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)*h_i \rightarrow (caso\, a)$$

$$R(h_n)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})*h_i \rightarrow (caso\, b)$$

$$R(h_n)=\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)*h_i \rightarrow (caso\, c)$$

Integração Numérica

- Regra dos Retângulos
  - Como h_i é constante, temos $h = (b - a) / n$. Então:

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \rightarrow (caso\, a)$$

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \rightarrow (caso\, b)$$

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \rightarrow (caso\, c)$$

  - Em geral, quando se utilizar a regra dos retângulos se efetua os cálculos através do caso (c), ou seja:

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i), \; sendo\; \bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Integração Numérica

- Regra dos Retângulos
  - Exemplo: Calcular $\int_{-1}^{1} x^2 - 1\,dx$. Considere n=4 e 4 casas decimais com arredondamento.

$$R(h_4) = -1{,}375$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 1\,dx = -1{,}3333$$

Integração Numérica

- Regra dos Retângulos

  - Exercício: Calcular $\int_4^6 e^x \, dx$. Considere n=4 e 4 casas decimais com arredondamento.

Respostas: R(h4) = 345,2234
Analítico: 348,8307

Integração Numérica

- Regra dos Trapézios

  - Seja o intervalo finito [a,b] no eixo x que é particionado em n subintervalos igualmente espaçados $[\,x_i, x_{i+1}\,]$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $h_i = x_{i+1} - x_i$.

  - Seja f uma função contínua ou simplesmente Riemann integrável, cuja integral não é conhecida.

Integração Numérica

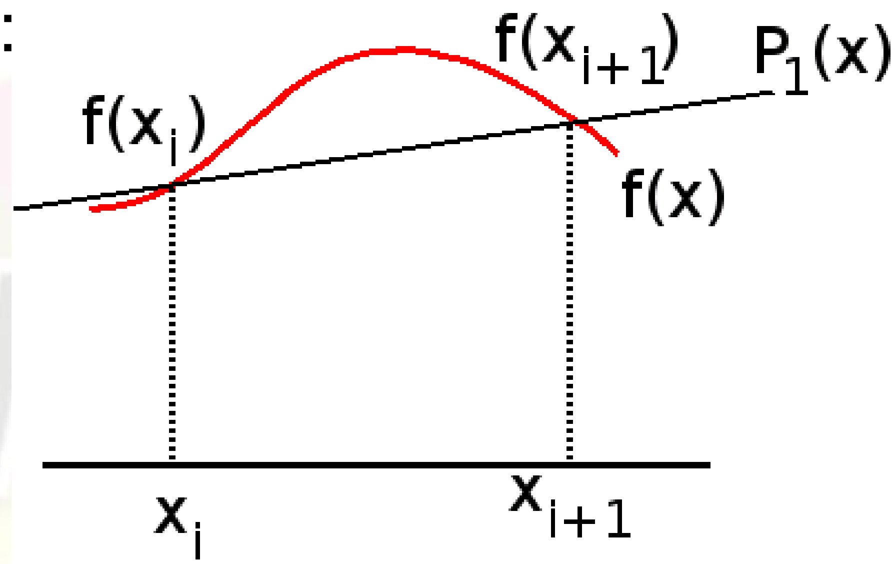
- Regra dos Trapézios
  - Numericamente a regra dos trapézios é obtida aproximando-se *f* por um polinômio interpolador de 1° grau. Então usa-se a fórmula de Lagrange para expressar o polinômio $p_1(x)$ que interpola em x_0 e x_1 temos:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{-h} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{-h} f(x_1)\right]dx = I_T$$

  - Assim, $I_T = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$, que é a área do trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$.

Integração Numérica

- Regra dos Trapézios
  - Geometricamente: Podemos ver, conforme mostra a figura abaixo:



  - A área de cada trapézio é: $\dfrac{(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2} * h_i$
  - A soma dessas áreas será uma aproximação para:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Integração Numérica

- Regra dos Trapézios Repetida
  - Dividindo o intervalo [a,b] em n subintervalos, pela regra dos trapézios, o resultado, que será indicado por *T(h)*, é dada pela fórmula:

$$T(h_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) * h_i$$

  - Como h_i é constante, temos *h = (b-a)/n*. Então:

$$T(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right)$$

$$T(h_n) = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2\mathrm{f}(x_1) + 2\mathrm{f}(x_2) + \ldots + 2\mathrm{f}(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Integração Numérica

- Regra dos Trapézios
  - Exemplo: Calcular $\int_{-1}^{1} x^2 - 1\, dx$. Considere n=4 e 4 casas decimais com arredondamento.

$$T(h_4) = -1{,}25$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 1\, dx = -1{,}3333$$

Integração Numérica

- Regra dos Trapézios

  - Exercício: Calcular $\int_0^1 x^3 - 2x^2 + 3x - 1\,dx$. Considere n=4 e 4 casas decimais com arredondamento.

Respostas: T(h4) = 0,0782
Analítico: 0,0834

Integração Numérica

- Regra de Simpson
  - A regra de Simpson é obtida aproximando-se *f* por um polinômio interpolador de 2° grau, ou seja, uma parábola.
  - Numericamente: novamente podemos usar a fórmula de Lagrange para estabelecer a fórmula de integração resultante da aproximação de *f(x)* por um polinômio de grau 2.
  - Seja $p_2(x)$ o polinômio que interpola *f(x)* nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$:

$$p_2(x)\,dx = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2\mathrm{h})} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2\mathrm{h})(h)} f(x_2)$$

Integração Numérica

- Regra de Simpson
  - Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx =$$

$$\frac{f(x_0)}{2\mathrm{h}^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx$$

$$\frac{-f(x_1)}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)\,dx$$

$$\frac{+f(x_2)}{2\mathrm{h}^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

Integração Numérica

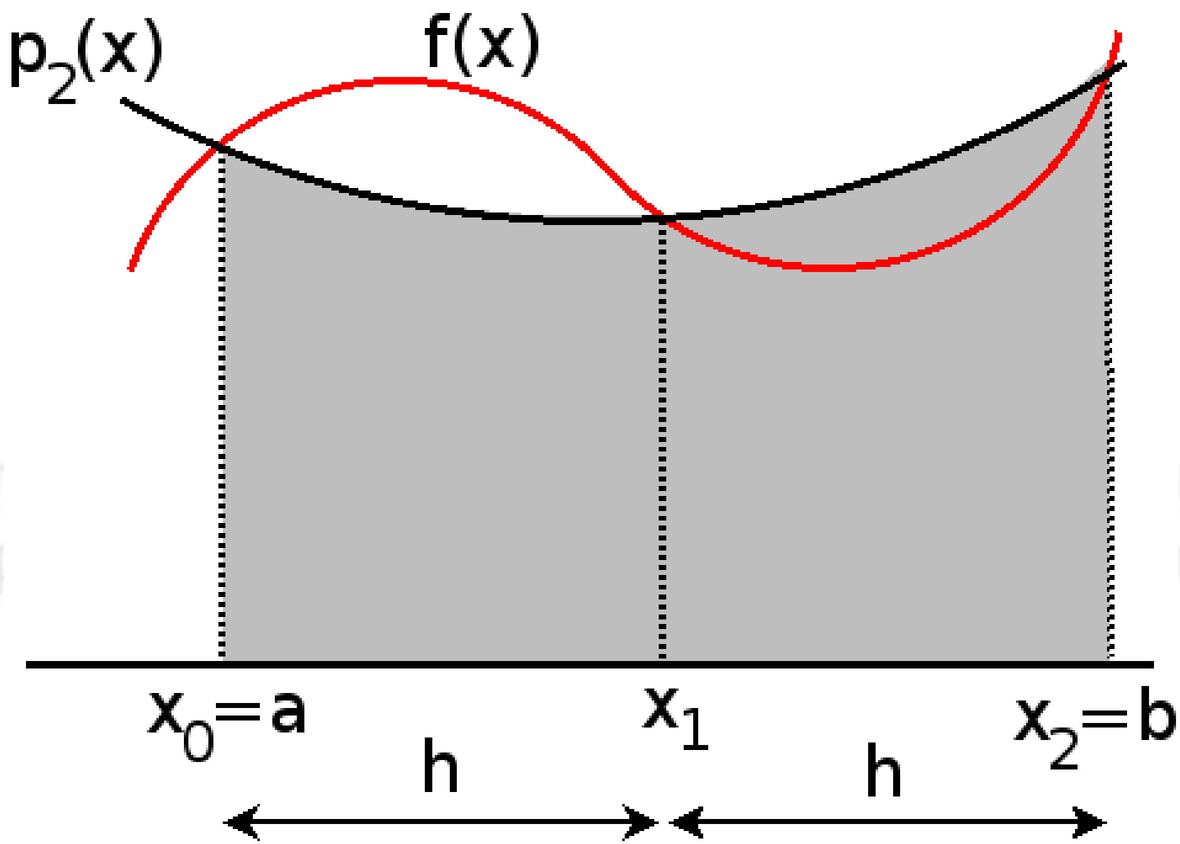
- Regra de Simpson

  - Resolvendo as integrais obtemos a regra de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]=I_S$$

Integração Numérica

- Regra de Simpson
  - Interpretação geométrica da Regra de Simpson



Integração Numérica

- Regra de Simpson Repetida
  - Aplicando a regra de Simpson repetidas vezes no intervalo $[a,b] = [x_0,x_n]$.
  - Vamos supor que $x_0, x_1, ..., x_n$ são pontos igualmente espaçados, $h = x_{i+1} - x_i$, e n é par (condição necessária pois cada parábola utilizará três pontos consecutivos).
  - Assim teremos:

$$S(h_n) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Integração Numérica

- Regra de Simpson
  - Exemplo: Calcular $\int_{-1}^{1} x^2 - 1\, dx$. Considere n=4 e 4 casas decimais com arredondamento.

$$S(h_4) = -1{,}3333$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 1\, dx = -1{,}3333$$

Integração Numérica

- Regra de Simpson

  - Exercício: Calcular $\int_0^{\pi} sen(x)\,dx$. Considere n=4 e 4 casas decimais com arredondamento.

Respostas: S(h4) = 2,0046
Analítico: 2

Integração Numérica

- Exemplo de Integração Mista
  - Sabendo que a regra de Simpson é, em geral, mais exata do que a regra dos Trapézios, e que a regra dos Trapézios é, em geral, mais exata do que a regra dos Retângulos, de que maneira podemos calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ para que o resultado seja o mais exato possível?

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
f(x)	1,0	1,2408	1,5735	2,0333	2,6965	3,7183

Tabela 1