Algoritmos e Teoria dos Grafos

Exercícios

29 de abril de 2025

Sumário

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$**:** exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Fundamentos

1*. Exiba a fronteira do conjunto $\{d_0, d_1, d_3\}$ no grafo da direita do Exercício 8.

2*. Quantas arestas tem um grafo completo de n vértices? Justifique sua resposta.

3*. Se um vértice tem k vizinhos em G, quantos vizinhos ele tem em $\overline{G}$? Justifique sua resposta.

4*. Quantos grafos diferentes existem com o conjunto de vértices $\{1, \ldots, n\}$? Justifique.

5$^\#$. Seja G um grafo. Dados $X \subseteq V(G)$ e $n \in \mathbb{N}$ vamos definir $\Gamma_G^n(X)$ como segue.

$$\Gamma_G^n(X) := \begin{cases} X, & \text{se } n = 0, \\ \Gamma_G(\Gamma_G^{n-1}(X)), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Exiba os conjuntos $\Gamma_G^n(\{a_0, b_2\})$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, onde G é o grafo da esquerda no Exercício 8.

(b) É verdade que para qualquer grafo G e qualquer conjunto X de seus vértices, existe um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_G^n(X) = V(G)$? Justifique.

(c) É verdade que para qualquer grafo G e qualquer conjunto X de seus vértices, existe um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_G^n(X) = \Gamma_G^{n+1}(X)$? Justifique.

6*. Seja $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma família de subconjuntos de um conjunto A. O *grafo de interseção de* $\mathcal{F}$ é o grafo $\mathcal{I}_\mathcal{F}$ dado por

$$\begin{aligned} V(\mathcal{I}_\mathcal{F}) &:= \mathcal{F}, \\ E(\mathcal{I}_\mathcal{F}) &:= \{\{A_i, A_j\} \mid A_i \cap A_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

(a) Seja G o grafo interseção de $\binom{\{1,\ldots,5\}}{2}$. Desenhe G.

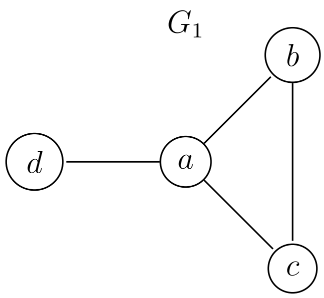
(b) Desenhe $\overline{G}$.

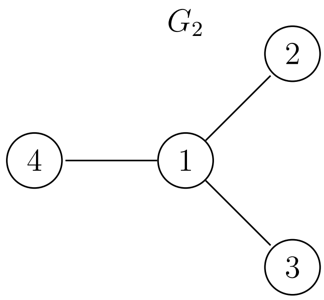
(c) Verifique que $\overline{G}$ é (isomorfo a)o Grafo de Petersen.

Dados inteiros n e k, o complemento do grafo interseção de $\binom{\{1,\ldots,n\}}{k}$ é conhecido como *grafo de Kneser* com parâmetros n e k.

7*. Um grafo G é um *grafo de intervalo* se é o grafo de interseção[1] de um conjunto de intervalos fechados de $\mathbb{R}$.

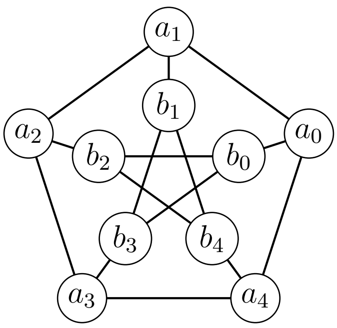
(a) Os grafos G_1 e G_2 abaixo são grafos de intervalo? Justifique.

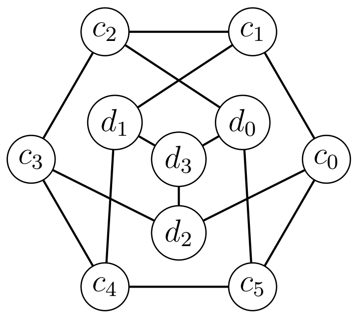




(b) Dê um exemplo de um grafo que **não é** grafo de intervalo e prove que seu exemplo está correto.

8*. Prove que os grafos abaixo são isomorfos.





9*. Um grafo é *auto–complementar* se é isomorfo ao seu complemento.

(a) Dê um exemplo de um grafo auto–complementar não trivial.

(b) Prove se G é auto–complementar, então $|V(G)|$ ou $|V(G)| - 1$ é múltiplo de 4.

[1]Veja o Exercício 6

10*. (a) Se G é um grafo de 14 vértices e 25 arestas cujos vértices tem graus 3 ou 5, quantos vértices tem grau 3 e quantos tem grau 5?

(b) Generalize o raciocínio para um grafo de n vértices e m arestas cujos vértices tem graus d_1 ou d_2.

11*. Prove que se G é um grafo satisfazendo

$$\begin{aligned} \delta(G) &> 0, \\ |E(G)| &< |V(G)|, \end{aligned}$$

então G tem (pelo menos) dois vértices de grau 1.

12*. Para todo $n \geq 0$ o n-cubo é o grafo definido segue. O 0-cubo é o grafo trivial. Para cada $n > 0$, o n-cubo é o grafo obtido colocando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada vértice de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia.

(a) Desenhe um n-cubo para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Quantos vértices tem um n-cubo? Justifique[2].

(c) Quantas arestas tem um n-cubo? Justifique[3].

[2]**Sugestão:** Estabeleça uma recorrência para o número de vértices do n-cubo.
[3]**Sugestão:** Estabeleça uma recorrência para o número de vértices do n-cubo.

2 Representação Computacional

13*. Descreva como computar eficientemente o grafo transposto de um grafo direcionado G, quando G é representado

(a) por listas de adjacência, ou

(b) pela matriz de adjacência.

Expresse a eficiência de ambas as soluções em termos assintóticos em função do tamanho do grafo G.

14$^\#$. Considere a idéia de evitar o desperdício de espaço na representação da matriz de adjacência de um grafo G com $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ usando um vetor m contendo somente os elementos acima da diagonal principal de M_G, de tal maneira que

$$M_G[u,v] = \begin{cases} m[f(u,v)], & \text{se } u < v, \\ 0, & \text{se } u = v, \\ m[f(v,u)], & \text{se } u > v, \end{cases}$$

onde $f\colon \{(u,v) \in V(G) \times V(G) \mid u < v\} \to \{0, \ldots, N(n) - 1\}$ é a função que faz a correspondência entre os elementos de M_G e m, e $N(n)$ é o tamanho do vetor m.

(a) Dê uma expressão[4] para $N(n)$.

(b) Dê uma expressão[5] para $f(u,v)$.

(c) Dê uma expressão[6] para $f^{-1}(k)\colon 0 \leq k < N(n)$.

(d) Escreva a função

```
unsigned int vizinho(unsigned int *m, unsigned int u, unsigned int v);
```

que devolve o valor de $M_G[u,v]$, onde M_G é representado pelo vetor `m` tal como descrito acima.

15*. Suponha que a representação de um número inteiro consome i bytes e a representação de um apontador consome a bytes e considere o problema de representar um grafo ponderado de n vértices e m arestas nesta linguagem.

[4]**Sugestão:** Descreva $N(n)$ por meio de uma recorrência e daí resolva esta recorrência.
[5]**Sugestão:** Observe que $f(u,1) = N(u-1)$ e que $f(u,v) = f(u,1) + v - 1$.
[6]**Sugestão:** Observe que $f(u,1) \leq f(u,v) \leq f(u,u-1)$.

(a) Expresse o total de memória consumido na representação do grafo em função de i, a, n e m ao usar

   i. matriz de adjacência

   ii. listas de adjacência

(b) Indique como decidir, em função de i, a, n e m, qual das duas representações ocupa menos memória.

3 Subgrafos

16*. Dê um exemplo de um grafo G com subgrafos H_1, H_2 e H_3 tais que

(a) o grafo H_1 é um subgrafo induzido por vértices;

(b) o grafo H_2 é um subgrafo induzido por arestas mas não é um subgrafo induzido por vértices;

(c) o grafo H_3 não é um subgrafo induzido por arestas nem por vértices.

17*. Seja G um grafo e seja X um conjunto de vértices de G. É verdade que todo subgrafo de G induzido por vértices pode ser obtido a partir de G pela remoção de um conjunto de vértices?

18*. Seja G um grafo e seja X um conjunto de arestas de G. É verdade que

$$G - X = G[E(G) - X]?$$

Justifique.

É verdade que todo subgrafo de G induzido por arestas pode ser obtido a partir de G por uma sequência de remoções de arestas?

19*. Seja G um grafo e seja v um vértice de G. Prove que

$$|E(G - v)| = |E(G)| - \delta_G(v).$$

20*. Seja G um grafo e sejam $A \subseteq E(G)$ e $V = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$.

É verdade que $G[A] = G[V]$? Justifique.

21@. Prove que o problema de determinar o tamanho máximo de um conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil.

22@. Prove que o problema Isomorfismo de Subgrafo é $\mathcal{NP}$–Difícil[7].

[7]**Sugestão:** Mostre uma redução polinomial problema do Conjunto Independente a este problema.

23*. Prove que se G é um grafo, então,

(a) Um conjunto X é independente em G se e somente se X é clique em $\overline{G}$.

(b) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

24*. Qual o tamanho da maior clique que pode ter um grafo de n vértices e m arestas?

25#. Considere o seguinte algoritmo guloso para computar um conjunto independente de um grafo G.

```
Independente(G)
  I ← ∅
  Enquanto V(G) ≠ ∅
      v ← vértice de grau mínimo em G
      acrescente v a I
      remova v e Γ_G(v) de G
  Devolva I
```

(a) Sejam n e Δ, respectivamente, o número de vértices no grafo G e seu grau máximo ao início do algoritmo. Prove que, ao início do laço, sempre é verdade que[8] $n \leq |V(G)| + |I|(\Delta + 1)$.

(b) Conclua daí que $\alpha(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$, para todo grafo G,

(c) Conclua também que $\omega(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{|V(G)| - \delta(G) + 1}$, para todo grafo G,

26#. Prove que todo grafo com pelo menos 6 vértices tem uma clique ou um conjunto independente com 3 vertices.
[9]

[8]**Sugestão:** Para facilitar a expressão do seu raciocínio, defina G_i e I_i como os valores das variáveis G e I no algoritmo ao início da i-ésima iteração

[9]**Sugestão:**
Pense na seguinte formulação, equivalente à do enunciado: qualquer coloração das arestas de um grafo completo de 6 vértices com 2 cores vai ter um triângulo monocromático como subgrafo.

27*. Prove que para todo grafo G, $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

28*. Seja H um subgrafo de um grafo G. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não, justificando sua resposta em cada caso.

(a) $\alpha(H) \leq \alpha(G)$?

(b) $\alpha(G) \leq \alpha(H)$?

(c) $\omega(G) \leq \omega(H)$?

(d) $\omega(H) \leq \omega(G)$?

29*. Prove que um grafo G é bipartido se e somente se $E(G) = \partial_G(X)$ para algum $X \subseteq V(G)$ e que, neste caso, $\{X, V(G) - X\}$ é uma bipartição de G.

30$^@$. Prove que se X, Y é uma bipartição do grafo G, então G tem no máximo $|X||Y|$ arestas.

31$^@$. Prove que um grafo bipartido de n vértices tem no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas.

32*. Prove que o complemento de um grafo bipartido G é conexo se e somente se G não é (bipartido) completo.

33*. Prove que o n-cubo[10] é bipartido, para todo $n \geq 1$.

34$^@$. Prove que o problema de Coloração é $\mathcal{NP}$-difícil[11].

35$^@$. Prove que o problema de determinar o número cromático de um grafo é $\mathcal{NP}$–Difícil.

[10] Veja o Exercício 12

[11] **Sugestão:** Apresente uma redução do problema 3-Coloração ao problema de Coloração.

36*. Considere o algoritmo abaixo que colore os vértices de um grafo dado G.

Colore(G)

$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$
Enquanto *existe vértice de G que não pertence a nenhum conjunto em $\mathcal{C}$*
  $v \leftarrow$ vértice de G que não pertence a nenhum conjunto em $\mathcal{C}$
  Se *v não tem vizinho em algum conjunto $K \in \mathcal{C}$*
    acrescente v ao conjunto K
  Senão
    acrescente o conjunto $\{v\}$ a $\mathcal{C}$
Devolva $\mathcal{C}$

(a) Prove que o algoritmo nem sempre devolve uma coloração mínima do grafo.

(b) Um estudante afirma que se o vértice escolhido no início do laço tiver o maior grau possível, então o algoritmo devolve sempre uma coloração mínima do grafo. Ele está correto? Justifique.

(c) Outro estudante afirma que se o vértice escolhido no início do laço tiver o menor grau possível, então o algoritmo devolve sempre uma coloração mínima do grafo. Ele está correto? Justifique.

4 Passeios, Caminhos e Ciclos

37*. Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência, considerada como uma matriz booleana.

(a) Prove[12] que, para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

$M_G^k[u,v] = 1$ se e somente se existe passeio de tamanho k de u a v em G

(b) Conclua que

$M_G^*[u,v] = 1$ se e somente se existe passeio de u a v em G.

38*. Baseado no enunciado do Exercício 37, proponha um algoritmo que recebe como entrada um grafo G e dois de seus vértices, u e v e devolve a distância de u a v em G.

39*. Baseado no enunciado dos Exercícios 37 e 37, proponha um algoritmo que computa o diâmetro de um grafo dado.

40*. Seja M uma matriz quadrada booleana e seja

$$M^* := \sum_{k \in \mathbb{N}} M^k.$$

Prove que

$$M^* = \sum_{k=0}^{n} M^k, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

41*. Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência, considerada como uma matriz de inteiros. Prove[13] que, para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$, $M_G^k[u,v]$ é o número de passeios de tamanho k de u a v em G.

[12] **Sugestão:** Indução em k.
[13] **Sugestão:** Indução em k.

42#. Um estudante propôs o seguinte algoritmo para contar o número de triângulos de um grafo G dado.

NumeroTriangulos(G)

$M \leftarrow$ matriz de adjacência de G
$T \leftarrow M^3$
Devolva $\frac{1}{6}\sum_{v \in V(G)} T[v,v]$

(a) Prove que o algoritmo está correto[14].

(b) Proponha uma modificação do algoritmo para contar o número de ciclos direcionados de tamanho 3 num grafo direcionado.

43⋆. Um grafo e seu complemento podem ser

(a) ambos conexos?

(b) ambos desconexos?

Justifique.

44⋆. Descreva em palavras os grafos k–regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

45@. Prove que um grafo é bipartido se e somente se não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas.

46⋆. Prove que o n-cubo[15] é hamiltoniano para todo $n \geq 2$.

47@. Prove que todo segmento de caminho mínimo em um grafo G é caminho mínimo em G.

48#. Prove que se P e Q são dois caminhos de tamanho máximo em um grafo conexo G, então P e Q tem um vértice em comum.

[14] **Sugestão:** Use o resultado enunciado no Exercício 41.

[15] Veja o Exercício 12

49\. Seja G um grafo conexo e seja P um caminho de tamanho máximo em G. Prove[16] que o tamanho de um caminho de tamanho máximo em $G - V(P)$ é menor que $|P|$.

50*. É verdade que existe ciclo em um grafo G se e somente se existem passeios distintos com as mesmas pontas em G? Justifique.

51*. É verdade que existe ciclo num grafo se e somente se existe um passeio fechado nesse grafo? Justifique.

52*. Prove que $\gamma(G) > 3$ se e somente se as vizinhanças de u e v são disjuntas para toda aresta $\{u, v\} \in E(G)$.

53*. Prove que os componentes de um grafo G são todos caminhos ou ciclos se e somente se $\Delta(G) \leq 2$.

54*. Prove que todo grafo G tem

(a) caminho de tamanho (pelo menos) $\delta(G)$ e,

(b) ciclo de tamanho pelo menos $\delta(G) + 1$, se $\delta(G) \geq 2$.

55*. Prove que[17], se $k > 1$, então todo grafo k–regular tem

(a) um caminho de tamanho k;

(b) um ciclo de tamanho pelo menos $k + 1$.

56*. Prove que se um grafo G não é acíclico, então

$$\operatorname{diam}(G) \geq \left\lfloor \frac{\gamma(G)}{2} \right\rfloor.$$

57$^@$. Prove que determinar o tamanho do maior ciclo de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$-difícil.

[16]**Sugestão:** use o Exercício 48

[17]**Sugestão:** Use o Exercício 54.

58*. Seja G um grafo não vazio e seja $v \in V(G)$. Seja G_v o grafo obtido ao acrescentar-se a G três novos vértices, v', u e w e as arestas $\{u, v\}$, $\{w, v'\}$ e $\{\{v', r\} \mid r \in \Gamma_G(v)\}$. Prove que G é hamiltoniano se e somente se G_v tem caminho hamiltoniano.

59*. Prove que decidir se um grafo tem caminho hamiltoniano é um problema $\mathcal{NP}$–difícil[18].

60*. Prove que o problema de decidir se um grafo direcionado tem caminho hamiltoniano é $\mathcal{NP}$–difícil.

61*. Seja G um grafo e seja G' o grafo que se obtém ao acrescentar a G um novo vértice v e uma aresta ligando v a cada vértice de G.

Prove que G' é hamiltoniano se e somente se G tem caminho hamiltoniano.

[18] **Sugestão:** Use o Exercício 58

5 Árvores, Florestas e Arborescências

62$^@$. Prove que todo grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas é árvore[19].

63*. Prove que o grafo G é uma floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|.$$

64. A uma certa altura do filme Gênio Indomável o protagonista resolve no quadro negro um problema deixado como desafio por um professor aos seus alunos.

O problema reduz-se a encontrar todas as árvores de 10 vértices duas a duas não isomorfas sem vértices de grau 2.

Seja você também um "gênio indomável" e desenhe estas árvores[20].

65*. Prove que toda árvore T tem (pelo menos) $\Delta(T)$ folhas.

66*. Prove que se T é uma árvore então

$$|\mathcal{C}(T - v)| = \delta_T(v),$$

para todo $v \in V(T)$.

67*. É verdade que todo grafo de n vértices com n (ou mais) arestas tem ciclo? Justifique.

68$^\#$. Um vértice v é *central* em um grafo G se a maior distância de v a qualquer outro vértice de G é a menor possível, isto é, se

$$\max\{d_G(v, u) \mid u \in V(G)\}$$

é mínimo.

[19]**Sugestão:** Use o Exercício 11.
[20]**Sugestão:** São 10 árvores no total.

(a) Seja T uma árvore com pelo menos 3 vértices e seja $T' = T - F$, onde F é o conjunto das folhas de T. Prove que T e T' tem os mesmos centros,

(b) Conclua daí que toda a árvore tem um único centro ou tem dois centros vizinhos.

6 Cortes e Conectividade

69*. É possível que toda aresta de um grafo não trivial seja de corte? Justifique sua resposta e, em caso positivo, caracterize tais grafos.

70*. Prove que um grafo G é conexo se e somente se

$$\partial_G(X) \neq \emptyset, \text{ para todo } \emptyset \subset X \subset V(G).$$

71. Prove que um grafo direcionado G é fortemente conexo se e somente se

$$\partial_G^+(X) \neq \emptyset, \text{ para todo } \emptyset \subset X \subset V(G).$$

72*. É possível que todo vértice de um grafo não trivial seja de corte? Justifique sua resposta e, em caso positivo, caracterize tais grafos.

73*. Dê um exemplo de um grafo conexo G para o qual

$$\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G).$$

74*. É verdade que

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

para todo grafo conexo G?

Justifique.

75. Seja G um grafo, T uma árvore geradora de G e $v \in V(G)$.

(a) É verdade que se v tem grau maior que 1 em T, então v é vértice de corte em G? Justifique.

(b) É verdade que se v é vértice de corte em G então v tem grau maior que 1 em T? Justifique.

76. Prove que todo vértice de corte em um grafo é vértice de corte em qualquer árvore geradora deste grafo.

77*. Considere o jogo em que o jogador recebe um grafo conexo. O objetivo é remover os vértices deste grafo, um a um, sem desconectar o grafo em nenhum momento. O jogador vence se conseguir remover todos os vértices.

(a) Sempre é possível vencer o jogo[21]? Justifique.

(b) Descreva um algoritmo para vencer o jogo nos casos em que é possível vencer.

78$^\#$. Prove que um vértice de um grafo G faz parte de dois blocos distintos de G se e somente é vértice de corte.

79*. É verdade que se u e v são vértices de corte vizinhos em um grafo então a aresta $\{u, v\}$ é de corte neste grafo? Justifique.

80*. Um vértice de corte em um grafo conexo pode ser folha de uma árvore geradora deste grafo? Justifique.

[21] **Sugestão:** Use o ex. 72

7 Trilhas e Grafos Eulerianos

81$^{@}$. Prove que um grafo conexo tem trilha euleriana aberta se e somente se tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

82*. Um grafo conexo onde todos os vértices tem grau par pode ter aresta de corte[22]? Justifique.

[22]**Sugestão:** considere um componente de $G - e$ onde G é um grafo como no enunciado e e é uma aresta de corte em G.

8 Árvores, Florestas e Arborescências

83@. Prove que todo grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas é árvore[23].

84⋆. Prove que o grafo G é uma floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|.$$

85. A uma certa altura do filme Gênio Indomável o protagonista resolve no quadro negro um problema deixado como desafio por um professor aos seus alunos.

O problema reduz-se a encontrar todas as árvores de 10 vértices duas a duas não isomorfas sem vértices de grau 2.

Seja você também um "gênio indomável" e desenhe estas árvores[24].

86⋆. Prove que toda árvore T tem (pelo menos) $\Delta(T)$ folhas.

87⋆. Prove que se T é uma árvore então

$$|\mathcal{C}(T - v)| = \delta_T(v),$$

para todo $v \in V(T)$.

88⋆. É verdade que todo grafo de n vértices com n (ou mais) arestas tem ciclo? Justifique.

89#. Um vértice v é *central* em um grafo G se a maior distância de v a qualquer outro vértice de G é a menor possível, isto é, se

$$\max \{d_G(v, u) \mid u \in V(G)\}$$

é mínimo.

[23]**Sugestão:** Use o Exercício 11.
[24]**Sugestão:** São 10 árvores no total.

(a) Seja T uma árvore com pelo menos 3 vértices e seja $T' = T - F$, onde F é o conjunto das folhas de T. Prove que T e T' tem os mesmos centros,

(b) Conclua daí que toda a árvore tem um único centro ou tem dois centros vizinhos.

90. Prove que um grafo direcionado G tem arborescência geradora se e somente se G tem um vértice r a partir do qual todo vértice de G é alcançável.

91⋆. Prove que o grafo subjacente de uma árborescência é uma árvore.

9 Grafos Direcionados e Ponderados

92⋆. Prove que, se G é um grafo direcionado, então[25]

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v),$$

93⋆. Prove que

$$M_{G^T} = (M_G)^T,$$

para todo grafo direcionado G, onde M^T denota a matriz transposta da matriz M.

94⋆. Ante o problema de classificar um grupo de n jogadores num esporte que não admite empates, um estudante propõe fazer um torneio onde todos jogam contra todos e ao final estabelece-se um "ranking" com base no número de vitórias de cada um, sem necessidade de critérios de desempate.

[25]**Sugestão:** Defina a *matriz de incidência* de um grafo direcionado sem laços G como sendo a matriz $\overline{M}_G$, indexada por $V(G) \times A(G)$ dada por

$$\overline{M}_G[v,a] = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ sai de } v, \\ -1, & \text{se } a \text{ entra em } v, \\ 0, & \text{se } a \text{ não incide em } v. \end{cases}$$

e faça um raciocínio análogo ao da prova do Teorema **??**.

Mostre que o estudante está *muito* errado, provando que para todo n ímpar, é possível que cada jogador ganhe o mesmo número de partidas que perde e, portanto, todos terminem empatados ao final[26].

95. Formule e prove uma versão para grafos direcionados do enunciado do Exercício 37.

96. Formule e prove uma versão para grafos direcionados do enunciado do Exercício 41.

97@. Prove que se P é um caminho direcionado maximal em um grafo direcionado G, então

- todos os vizinhos de entrada de seu vértice inicial estão em P, e
- todos os vizinhos de saída seu vértice final estão em P.

98. Seja G um grafo direcionado sem laços e seja $m := \max\{\delta^-(G), \delta^+(G)\}$. Prove que

(a) o grafo G tem caminho direcionado de tamanho m.

(b) se $m > 0$, então G tem ciclo direcionado de tamanho pelo menos $m + 1$.

99⋆. Prove que todo passeio direcionado de tamanho mínimo entre dois vértices de um grafo direcionado é um caminho direcionado.

100⋆. Prove que o grafo condensado de um grafo direcionado é um grafo direcionado acíclico.

101⋆. Prove que todo grafo direcionado acíclico tem fonte.

102⋆. Um *grafo direcionado hamiltoniano* é um grafo direcionado que tem ciclo hamiltoniano direcionado.

[26] **Sugestão:** Indução em n.

Seja G um grafo e seja $D(G)$ o grafo direcionado dado por

$$\begin{aligned} V(D(G)) &= V(G), \\ A(D(G)) &= \bigcup_{\{u,v\}\in E(G)} \{(u,v),(v,u)\}. \end{aligned}$$

(a) Prove que G é hamiltoniano se e somente se $D(G)$ é hamiltoniano e conclua, a partir daí, que o problema de decidir se um grafo direcionado é hamiltoniano é $\mathcal{NP}$–Difícil.

(b) Conclua que o problema de decidir se um grafo direcionado é hamiltoniano é $\mathcal{NP}$–Difícil.

103*. Seja G um grafo direcionado e seja (G', w) um grafo direcionado com pesos nas arestas completo com o mesmo conjunto de vértices de G onde w é dada por

$$w(u,v) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } (u,v) \in A(G), \\ 1, & \textsf{se } (u,v) \notin A(G) \end{cases}$$

Prove que G é hamiltoniano se e somente se a resposta da instância (G', w) do problema do Caixeiro Viajante tem peso 0. Conclua daí que o problema do Caixeiro Viajante é $\mathcal{NP}$-difícil.

104*. Considere o seguinte algoritmo para o Problema do Caixeiro Viajante

```
CV(G, w)
  (i, f) ← arco de peso mínimo em G
  P ← (i, f)
  Enquanto V(P) ≠ V(G)
      u ← origem de um arco de peso mínimo em ∂⁻(i) fora de V(P)
      v ← destino de um arco de peso mínimo em ∂⁺(f) fora de V(P)
      Se w(u, i) ≤ w(f, v)
          i ← u
          acrescente i ao início de P
      Senão
          f ← v
          acrescente f ao final de P
      acrescente i ao final de P
      Devolva P
```

(a) Mostre que o algoritmo está **errado**, exibindo uma instância do Problema do Caixeiro Viajante para a qual o algoritmo não computa uma resposta correta.

(b) Mostre que o algoritmo está **muito errado**, provando que sua resposta pode ficar arbitrariamente longe da resposta correta, isto é, prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma instância (G, w) do Problema do Caixeiro Viajante tal que

$$\mathrm{OPT}(G, w) < w(\mathsf{CV}(\mathsf{G}, \mathsf{w})) - n,$$

onde $\mathrm{OPT}(G, w)$ denota o peso de uma solução da instância (G, w).

105. Prove que um grafo direcionado G tem arborescência geradora se e somente se G tem um vértice r a partir do qual todo vértice de G é alcançável.

Referências