Funções Geradoras

Exercícios

22 de abril de 2025

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$**:** exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1*. Prove que $\mathbb{Z}_n$ é corpo se e somente se n é primo.

2$^@$. Seja R um anel. Prove que $F(x) \in R[[x]]$ tem inverso multiplicativo em $R[[x]]$ se e somente se $[x^0]F(x)$ tem inverso multiplicativo em R.

3*. Dado $c \in \mathbb{C}$, dê a expressão da função geradora $\dfrac{1}{1-cx}$.

4*. Dê a expressão da função geradora $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ seguindo o seguinte roteiro.

(a) Encontre valores $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$x^2 - 5x + 6 = c(1-ax)(1-bx)$$

(b) Encontre $A(x), B(x) \in \mathcal{C}[[x]]$ tais que

$$\frac{1}{c(1-ax)(1-bx)} = \frac{A(x)}{1-ax} + \frac{B(x)}{1-bx}.$$

5*. Determine $[x^4]F(x)$ para os seguintes valores de $F(x)$.

(a) $F(x) = \frac{1}{1-x}$.

(b) $F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

(c) $F(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

(d) $F(x) = 1 - 2x$.

(e) $F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n * \sum_{n\geq 0} 2^n x^n$.

(f) $F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n * \frac{1}{(1-x)}$.

(g) $F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n * \frac{1}{(1-x)^2}$.

6*. Como observado em aula,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n\geq 0} n^0 x^n, \\ \frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n\geq 0} n^1 x^n. \end{aligned}$$

(a) Obtenha a expressão para $\sum_{n\geq 0} n^2x^n$ como razão entre dois polinômios.

(b) Obtenha a expressão para $\sum_{n\geq 0} n^3x^n$ como razão entre dois polinômios.

(c) Generalize os itens anteriores obtendo a expressão de $\sum_{n\geq 0} n^kx^n$ como razão entre dois polinômios.

7*. Prove que[1] para todo $k \geq 0$,

$$F^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 0} n_k f(n+k)x^n$$

8*. Ache a fórmula fechada para a função geradora da sequência definida por $b_n = n3^n + 1$.

9$^-$. Dê um exemplo de funções geradoras $F(x)$ e $G(x)$ para as quais $F(G(x)) \neq G(F(x))$.

10$^-$. (a) Prove que $F(x) = x$ é o elemento neutro para a operação de composição de funções.

(b) Estabeleça condições necessárias e suficientes para que $F(x)$ seja a inversa composicional de $G(x)$, isto é, para que

$$F(G(x)) = x = G(F(x)).$$

11$^@$. Como visto em sala de aula, a função geradora para uma PA é dada por:

$$F(x) = \frac{f(0)}{1-x} + \frac{rx}{(1-x)^2}$$

Dê a expressão livre de recorrência para a soma dos n primeiros termos de uma PA

12*. Uma progressão geométrica é definida pela recorrência:

$$f(n) = f(n-1)r$$

[1] **Sugestão:** Indução em k.

para todo $n \geq 1$. Utilizando de funções geradoras, mostre que a forma fechada para uma progressão geométrica é $f(n) = f(0)r^n$.

13*. Seguindo a mesma lógica do exercício de soma-PA, dê a expressão livre de recorrência para a soma dos n primeiros termos de uma PG.

14*. O montante de um capital C aplicado a juros compostos é dado por $M_n = M_{n-1}(1+i)$, onde $M_0 = C$. Utilizando de funções geradoras, mostre que $M_n = C(1+i)^n$.

15*. Considere o seguinte algoritmo para computar o quadrado de um inteiro n.

```
Q(n)
----------------------------
Se n = 0
    Devolva 0
Devolva Q(n − 1) + n + n − 1
```

Prove que o algoritmo está correto, isto é, que $\mathsf{Q}(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

16*. Considere o seguinte algoritmo para computar o cubo de um inteiro n.

```
C(n)
----------------------------
Se n = 0
    Devolva 0
Devolva C(n − 1) + 3n(n − 1) + 1
```

Prove por funções geradoras que o algoritmo está correto, isto é, que $\mathsf{C}(n) = n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

17*. Resolva as recorrências a seguir por Funções Geradoras.

(a) $f(n) = 2f(n-1) + 1,$ para todo $n > 0$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

(c) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$

(d) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$

(e) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(f) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(g) $f(n) = 3f(n-1) + n, \text{ para todo } n \geq 1.$

(h) $f(n) = 3f(n-2) + n^2, \text{ para todo } n \geq 2.$

(i) $f(n) = 2f(n-2) + 2n - 2, \text{ para todo } n \geq 2.$

(j) $f(n) = 2f(n-3) + 3n - 2, \text{ para todo } n \geq 3.$

(k) $f(n) = 3f(n-3) + 3n - 3, \text{ para todo } n \geq 3.$

18*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 1, & \text{se } 1 \leq n \leq 2, \\ 8f(n-1) - 19f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$