

# Lista 1 - Algoritmos e Estrutura de Dados II

Profs. Marcos Castilho, André Vignatti e Daniel Oliveira

**Exercício 1.** Considere o seguinte problema computacional.

---

Fatorial

---

Instância:  $n \in \mathbb{N}$ .

Resposta:  $n!$

---

1. Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema.
2. Seja  $m(n)$  o número de multiplicações feitas pelo seu algoritmo para a instância  $n$ .  
Expresse  $m(n)$  como uma recorrência.
3. Resolva esta recorrência.

**Exercício 2.** Considere o seguinte problema computacional.

---

Exponenciação

---

Instância:  $(x, n)$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Resposta:  $x^n$

---

1. Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema de Exponenciação baseado na seguinte observação.

$$x^n = x \cdot x^{n-1}, \forall n > 0.$$

2. Seja  $m(n)$  o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância  $(x, n)$ . Expresse  $m(n)$  como uma recorrência.
3. Resolva esta recorrência.

**Exercício 3.** A sequência de Fibonacci é dada pela recorrência

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Considere o seguinte problema computacional.

---

**Número de Fibonacci**

---

Instância:  $n \in \mathbb{N}$ .Resposta:  $F(n)$ .

---

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.
2. Seja  $s(n)$  o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância  $n$ . Expresse  $s(n)$  como uma recorrência.
3. Seja  $r(n)$  o número de chamadas recursivas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância  $n$ . Expresse  $r(n)$  como uma recorrência.

**Exercício 4.** O seguinte algoritmo recursivo calcula a *função de McCarthy 91*:

---

 $F(n)$ 

---

Se  $n > 100$   Devolva  $n - 10$   Devolva  $F(F(n + 11))$ 

---

1. Preveja o que a função  $F(n)$  calcula.
2. Expresse a função  $F(n)$  como uma recorrência.

**Exercício 5.** O *fatorial descendente* de  $n$  a  $k$  é

$$n_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=n-k+1}^n i$$

Assim, podemos definir o seguinte problema computacional:

---

**Fatorial Descendente**

---

Instância:  $(n, k)$ , onde  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ .Resposta:  $n_k$ 

---

1. Descreva  $n_k$  recursivamente.
2. Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema, baseado na descrição do item anterior.
3. Seja  $m(n, k)$  o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância  $(n, k)$ . Expresse  $m(n, k)$  como uma recorrência.
4. Resolva esta recorrência.

**Exercício 6.** Faça um algoritmo recursivo para o seguinte problema computacional:

---

Multiplicação

---

Instância:  $(n, m)$ , onde  $n, m \in \mathbb{R}$ .

Resposta:  $n \times m$

---

Exemplos:

- $(5, 3)$  tem resposta 15.
- $(5, -3)$  tem resposta  $-15$ .
- $(-5, 3)$  tem resposta  $-15$ .
- $(-5, -3)$  tem resposta 15.

**Exercício 7.** Considere a seguinte relação de recorrência.

$$F(n) = \begin{cases} a, & \text{se } n = 1 \\ F(n-1) + r, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

1. O que a função  $F(n)$  calcula?
2. Resolva a recorrência.
3. Escreva um algoritmo *recursivo* para calcular  $F(n)$ .
4. Você acha uma boa ideia usar o algoritmo recursivo do item anterior?

**Exercício 8.** Considere o seguinte problema computacional.

---

Soma de Progressão Geométrica

---

Instância:  $(a, r, n)$ , onde  $a, r \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Resposta:  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$ .

---

1. Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema.
2. Sejam  $s(n)$  e  $m(n)$ , respectivamente, o número de somas e multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância  $(a, r, n)$ . Expresse  $s(n)$  e  $m(n)$  como recorrências.
3. Resolva as recorrências do item anterior.

**Exercício 9.** Considere o seguinte problema computacional.

---

Máximo Divisor Comum (mdc)

---

Instância:  $(a, b)$ , onde  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Resposta: o máximo divisor comum entre  $a$  e  $b$ .

---

O algoritmo de Euclides para o problema do mdc é a seguinte recorrência.

$$\text{mdc}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{se } b = 0 \\ \text{mdc}(b, a \bmod b), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver o problema.
2. Escreva um algoritmo *iterativo* para resolver o problema.

**Exercício 10.** Considere o seguinte algoritmo.

---

$F(a, b)$

---

Se  $b = 0$

  Devolva 0

Se  $b \bmod 2 = 0$

  Devolva  $F(a + a, \lfloor b/2 \rfloor)$

  Devolva  $F(a + a, \lfloor b/2 \rfloor) + a$

---

1. O que a função  $F(a, b)$  calcula?
2. Expresse a função  $F(a, b)$  como uma recorrência.

**Exercício 11.** Considere o seguinte algoritmo.

---

$F(a, b)$

---

Se  $b = 0$

  Devolva 1

Se  $b \bmod 2 = 0$

  Devolva  $F(a^2, \lfloor b/2 \rfloor)$

  Devolva  $F(a^2, \lfloor b/2 \rfloor) \cdot a$

---

1. O que a função  $F(a, b)$  calcula?
2. Expresse a função  $F(a, b)$  como uma recorrência.

**Exercício 12.** Considere o seguinte algoritmo:

---

 $M(v, a, b)$ 

---

Se  $a = b$   Devolva  $a$  $m \leftarrow M(v, a + 1, b)$ Se  $v[a] < v[m]$   
   $m \leftarrow a$ Devolva  $m$ 

---

1. O algoritmo  $M$  resolve o problema de Mínimo de Vetor discutido em aula?
2. Seja  $c(n)$  o número de comparações entre elementos de  $v$  efetuadas na execução de uma instância de tamanho  $n$ . Expresse  $c(n)$  como uma recorrência.
3. Resolva esta recorrência.

**Exercício 13.** Considere o seguinte problema computacional.

---

**Soma de Vetor**

---

Instância:  $(v, a, b)$ , onde  $v$  é um vetor indexado por  $[a..b]$ .Resposta:  $\sum_{i=a}^b v[i]$ 

---

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.
2. Seja  $s(n)$  o número de somas de elementos de  $v$  efetuadas na execução de seu algoritmo para uma instância de tamanho  $n$ . Expresse  $s(n)$  como uma recorrência, usando como tamanho de uma instância o valor de

$$|(v, a, b)| = b - a + 1 = n$$

3. Resolva esta recorrência.

**Exercício 14.** Considere o seguinte problema computacional.

---

**Inversão de Vetor**

---

Instância:  $(v, a, b)$ , onde  $v$  é um vetor indexado por  $[a..b]$ .Resposta: O vetor  $v$  invertido, isto é, modificado de tal forma que o primeiro elemento se torna o último, o segundo se torna o penúltimo e assim por diante.

---

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.
2. Seja  $t(n)$  o número de trocas entre elementos de  $v$  efetuadas na execução de seu algoritmo uma instância de tamanho  $n$  do problema. Expresse  $t(n)$  como uma recorrência.

**Exercício 15.** O algoritmo abaixo resolve o problema Busca em Vetor definido em aula? Justifique.

---

$B(x, v, a, b)$

---

Se  $a > b$

    Devolva *não*

$r \leftarrow B(x, v, a, b - 1)$

Se  $r \neq \textit{não}$

    Devolva  $r$

Se  $x = v[b]$

    Devolva  $b$

Devolva *não*

---